18798

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

KÖN·PR·REGIERUNG ZU POTSDAM

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Acht und dreifsigster Band.

In vier Heften.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Berlin, 1849.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à PARIS chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des acht und dreifsigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
1.	De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis. Auct. *C. J. Malmstén,* prof. math. Upsaliens.	I.	1
5.	Sur les déterminants gauches. (Suite du mémoire Tome 32. p. 119.) Par Mr. *A. Cayley* à Londres.	II.	93
7.	Note sur les fonctions du second ordre. Par le mème.	II.	105
8.	Einige Aufgaben aus der Combinationslehre. Von Herrn *Weifs,* Lehrer der Mathematik zu Fürth bei Nürnberg. (Fortsetzung der Abhandlung No. 12. im 34ten Bande.)	II.	107
9.	Einige Aufgaben aus der Lehre von den wiederkehrenden Reihen. Von Demselben.	II.	148
11.	Untersuchungen über die analytischen Facultäten. Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Freyburg im Br. (Fortsetzung der Abhandlung No. 1., 7., 11. und 17. Bd. 33. und No. 3. Bd. 35.)	II.	162
13.	Schlufs dieser Abhandlung.	III.	216
16.	Transformation einer beliebigen homogenen Function dritten Grades von zwei Variabeln durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln in eine Form, welche nur die dritten Potenzen der neuen Variabeln enthält. Von Herrn Professor *Otto Hesse* zu Königsberg i. Pr..	III.	262
17.	Anwendung der bestimmten Integrale zur Reihensummirung; nebst Bemerkungen über die unendlichen Reihen und die bestimmten Integrale überhaupt. Von Herrn *J. Dienger,* Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.	III.	266
19.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	IV.	331
20.	Über die Anwendung einiger Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen auf ein bekanntes Problem der Geometrie. Von dem Herrn Professor *Richelot* zu Königsberg i. Pr.	IV.	353

2. Geometrie.

4.	Ableitung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte aus ihrer Polargleichung. Von Herrn Dr. *W. Hittorf* in Bonn..	I.	89

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
6.	Sur quelques théorèmes de la Géométrie de position. (Suite de No. 13. Tome 34.) Par Mr. *Cayley* à Londres.	II.	97
7.	Note sur les fonctions du second ordre. Par le même.	II.	105
12.	De pendulis sphaericis, et de curvis, quae ab ipsis describuntur sphaericis. Auctore Dr. *Christoph. Gudermann,* math. prof. ord. Monast. Guestph. .	III.	185
14.	Über Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung. (Fortsetzung der Abhandlungen No. 10. und No. 11. im 28ten Bande und No. 12. im 37ten Bande.) Von Herrn Professor *Otto Hesse* zu Königsberg i. Pr. . . .	III.	241
15.	Eigenschaften der Wendepuncte der Curven dritter Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe. (Fortsetzung der Abhandlungen No. 10. und No. 11. 28ten Bandes und No. 14. 38ten Bandes.) Von Demselben.	III.	257

3. Mechanik.

2.	Kräfte im Raume. Von Herrn Geh. Hofrath und Professor Dr. *Schweins* in Heidelberg.	I.	40
3.	Fliehmomente, oder die Summe $\Sigma(xX+yY)$ bei Kräften in der Ebene, und $\Sigma(xX+yY+zZ)$ bei Kräften im Raume. Von Demselben. . . .	I.	77
12.	De pendulis sphaericis, et de curvis, quae ab ipsis describuntur sphaericis. Auctore Dr. *Christoph Gudermann,* math. prof. ord. Monast. Guestph. .	III.	185
18.	Essai d'une théorie générale du centre de forces, precédé de quelques considérations sur la résultante. Par Mr. *Steichen,* professeur à l'école militaire de Bruxelles.	IV.	277

II. Angewandte Mathematik.

10.	Über die Gleichgewichts-Lagen eines mit seiner ganzen Grundfläche in eine Flüssigkeit getauchten geraden dreiseitigen Prisma's. Von Hrn. *A. v. Dawidoff* in Moskau.	II.	158

Fac simile einer Handschrift von *Cavalieri.* . . . . . I.
– – – – – – *A. Göpel.* . . . . . II.
– – – – – – *Pfleiderer.* . . . . . III.
– – – – – – *Buzengeiger.* . . . . . IV.

1.

De integralibus quibusdam definitis, seriebusque infinitis.

(Auct. *C. J. Malmstén*, prof. math. Upsaliens.)

§. 1.

Si cognitam formulam

$$\int_0^\infty e^{-xz} \operatorname{Sin} uz \,.\, dz = \frac{u}{x^2+u^2}$$

per du multiplicemus atque ab $u = 0$ integremus, habebimus

$$\frac{1}{2}. \qquad 2\int_0^\infty \frac{e^{-xz}-e^{-xz} \cos uz}{z} \,.\, dz = \log(x^2+u^2) - 2\log x,$$

unde, cum sit

$$\log x = \int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-xz}}{z}\, dz,$$

obtinebitur

$$1. \qquad \log(x^2+u^2) = 2\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-xz}.\operatorname{Cos} uz}{z}\, dz.$$

Multiplicemus jam utrimque per

$$\frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \,.\, du, \qquad [a < \pi],$$

integratione inter $u = 0$ et $u = \infty$ instituta, fit

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \log(x^2+u^2)\, du = 2\int_0^\infty \frac{dz}{z} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} (e^{-z} - e^{-xz} \operatorname{Cos} uz)\, du$$

unde beneficio notae formulae*) sequitur

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \log(x^2+u^2)\, du = \int_0^\infty \frac{e^{-z}\, dz}{z} \left[\operatorname{Tang} \tfrac{1}{2}a - \frac{2e^{-xz} \operatorname{Sin} a}{1+2e^{-z}\operatorname{Cos} a + e^{-2z}}\right]$$

sive, posito

$$e^{-z} = y, \qquad \text{unde} \qquad z = \log \frac{1}{y}, \qquad e^{-z} = -\, dy,$$

*) Videas *Exerc. de Calc. Intégr. par Legendre.* Tom. II. pag. 186.

$$2. \qquad \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \log(x^2+u^2)\,du = \int_0^1 \frac{dy}{\log\frac{1}{y}} \left(\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a - \frac{2y^x \operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2}\right)$$

$$(a < \pi).$$

Facile vero demonstrari potest, si a in ratione qualibet commensurabili sit ad π, id est $a = \frac{m\pi}{n}$ (m et n numeri integri), integrale in dextero aequationis (2.) membro finite semper per functionem Γ exprimi posse. Nam sit brevitatis causa

$$T = \int_0^1 \frac{dy}{\log\frac{1}{y}} \left(\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a - \frac{2y^x \operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2}\right),$$

differentiatione respectu ipsius x facta, prodit

$$3. \qquad \frac{dT}{dx} = 2\int_0^1 \frac{y^x \operatorname{Sin} a\,.\,dy}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2}.$$

In suppositione vero $a = \frac{m\pi}{n}$ cognitum est integrale*)

$$\int_0^1 \frac{y^x \operatorname{Sin} a\,.\,dy}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} = \sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \sin ia\,.\left[\frac{d\,.\log\Gamma\left(\frac{x+n+i}{2n}\right)}{dx} - \frac{d\,.\log\,.\Gamma\left(\frac{x+i}{2n}\right)}{dx}\right]$$

ubi $m+n$ numerus impar est, et

$$\int_0^1 \frac{y^x \operatorname{Sin} a\,.\,dy}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} = \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} S(-1)^{i-1} \sin ia \left[\frac{d\,.\log\Gamma\left(\frac{x+n-i}{n}\right)}{dx} - \frac{d\,\log\,\Gamma\left(\frac{x+i}{n}\right)}{dx}\right]$$

ubi $m+n$ numerus par est; quod quidem in (3.) ductum, suppeditat

$$dT = 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia\,(d\,.\log\Gamma(\tfrac{x+n+i}{2n}) - d\,.\log\Gamma(\tfrac{x+i}{2n}))$$

$$(m+n = \text{num. imp.})$$

$$dT = 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} S(-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia\,(d\,\log\Gamma(\tfrac{x+n-1}{n}) - d\,.\log\Gamma(\tfrac{x+i}{n}))$$

$$(m+n = \text{num. par.})$$

unde, integratione instituta,

---

*) *Legendre Exerç.* Tom II. pag. 163 — 165. — Observamus errorem, qui loco cit. apud *Legendre* occurrit, ubi de formulis, a nobis in textu allatis, dicit, illam valere cum m numerus impar, hanc vero cum m numerus par est. At vero est statuendam, illam aut hanc valere, prout $m+n$ impar aut par est.

$$4.\quad \begin{cases} T = C + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia \log \left\{ \dfrac{\Gamma\left(\frac{x+n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i}{2}\right)} \right\} \\ (m+n = \text{num. imp.}) \\ T = C' + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia \log \left\{ \dfrac{\Gamma\left(\frac{x+n+i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i}{n}\right)} \right\} \\ (m+n = \text{num. par}) \end{cases}.$$

Hinc in primum $x = r$ et deinde $x = s$ ponamus, subtrahendo obtinebimus hoc integrale

$$5.\quad \begin{cases} \int_0^1 \dfrac{dy}{\log\frac{1}{y}} \cdot \dfrac{y^r(1-y^{s-r})}{1+2y\operatorname{Cos}a+y^2} \\ = \operatorname{Cosec}.a \sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia \log \left\{ \dfrac{\Gamma\left(\frac{s+n+i}{2n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{r+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+n+i}{2n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{s+i}{2n}\right)} \right\} \\ (m+n = \text{num. imp.}) \\ \int_0^1 \dfrac{dy}{\log\frac{1}{y}} \cdot \dfrac{y^r(1-y^{s-r})}{1+2y\operatorname{Cos}a+y^2} \\ = \operatorname{Cosec}.a \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} S(-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia \log \left\{ \dfrac{\Gamma\left(\frac{s+n-i}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{r+i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{r+n-i}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{s+i}{n}\right)} \right\} \\ (m+n = \text{num. par}). \end{cases}$$

Harum vero formularum ope valores etiam C et C' jam determinari possunt. Nam si primum $r = 0$ et $s = 1$ et deinde $r = 1$, $s = 2$ ponamus, subtractione facta invenimus

$$\int_0^1 \frac{dy}{\log\frac{1}{y}} \cdot \frac{(1-2y+y^2)\operatorname{Sin}a}{1+2y\operatorname{Cos}a+y^2} = \sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia \log \left\{ \frac{\left(\Gamma\left(\frac{n+i+1}{2n}\right)\right)^2 \cdot \Gamma\left(\frac{i+2}{2n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{i}{2n}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{i+1}{2n}\right)\right)^2 \cdot \Gamma\left(\frac{n+i}{2n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+i+2}{2n}\right)} \right\}$$

$(m+n = \text{num. imp.})$

$$\int_0^1 \frac{dy}{\log\frac{1}{y}} \cdot \frac{(1-2y+y^2)\operatorname{Sin}a}{1+2y\operatorname{Cos}a+y^2} = \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} S(-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia \log \left\{ \frac{\left(\Gamma\left(\frac{n+1-i}{n}\right)\right)^2 \cdot \Gamma\left(\frac{i+2}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{i}{2n}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)^2 \cdot \Gamma\left(\frac{n-i}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n+2-i}{n}\right)} \right\}$$

$(m+n = \text{num. par})$

atque etiam e formulis (4.), posito $x = 1$, prodit

$$\int_0^1 \frac{dy}{\log\frac{1}{y}} \cdot \frac{(1-2y+y^2)\,\mathrm{Sin}\,a}{1+2y\,\mathrm{Cos}\,a+y^2}$$

$$= (1+\mathrm{Cos}.\,a)\left\{C' + 2\sum_{i=1}^{i=n-1}(-1)^{i-1}\,\mathrm{Sin}\,ia\,\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n+i+1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2n}\right)}\right\}\right\}$$

$$(\mathrm{m}+n = \text{num. imp.})$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{\log\frac{1}{y}} \cdot \frac{(1-2y+y^2)\,\mathrm{Sin}\,a}{1+2y\,\mathrm{Cos}\,a+y^2}$$

$$= (1+\mathrm{Cos}\,a)\left\{C' + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{i-1}\,\mathrm{Sin}\,ia\,\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n+1-i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+1}{n}\right)}\right\}\right\}$$

$$(m+n = \text{num. par})$$

quae formulae, inter se comparatae, cum sit omnino

$$2\,\mathrm{Sin}\,ma\,\mathrm{Cos}\,a = \mathrm{Sin}\,(m+1)a + \mathrm{Sin}\,(m-1)a,$$

hos valores ipsorum C et C' suppeditant:

$$C = \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a\,.\log 2n,$$
$$C' = \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a\,\log.\,n.$$

Fit igitur, substitutione in (4.) facta,

$$T = \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a\,.\log 2n + 2\sum_{i=1}^{i=n-1}(-1)^{i-1}\,\mathrm{Sin}\,ia\,\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{x+n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i}{2n}\right)}\right\}$$

$$(m+n = \text{num. imp.})$$

$$T = \mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a\,\log n + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{i-1}\,\mathrm{Sin}\,ia\,\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{x+n+i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i}{n}\right)}\right\}$$

$$(m+n = \text{num. par}),$$

atque si brevitatis causa ponimus

$$6. \qquad L(a,x) = \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\,.\log(x^2+u^2)\,du,$$

ex formula (2.), posito $a = \frac{m\pi}{n}$ ubi $m < n$,

7.
$$\begin{cases} L(a,x) = \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a \log 2n + 2\sum_{i=1}^{i=n-1}(-1)^{i-1}\operatorname{Sin} ia \log\left\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{x+n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i}{2n}\right)}\right\} \\ (m+n = \text{num. par}) \\ L(a,x) = \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a.\log n + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{i-1}\operatorname{Sin} ia.\log\left\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{x+n-i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i}{n}\right)}\right\} \\ (m+n = \text{num. par}) \end{cases}$$

Pro $x=1$ et $a=\frac{1}{2}\pi$, unde $m=1$, $n=2$, e priori accipies

8. $$\int_0^\infty \frac{\log(1+u^2)}{e^{\frac{1}{2}\pi u}+e^{-\frac{1}{2}\pi u}}\,du = \log\left(\frac{4}{\pi}\right).$$

§. 2.

Ut vero ex formulis (7.) nova quaedam integralia definita deducantur, demonstrare primum necesse est hasce formulas etiam pro $x=0$ valere; quod quidem ut fiat, in promtu ponere sufficit, formulam (1.), unde tamquam e fonte illae derivant, justam etiam pro $x=0$ manere.

Cognitae sunt formulae

$$\int_0^w e^{-xz}\operatorname{Cos} uz\,dz = \frac{e^{-wx}(u\operatorname{Sin}u.w - x\operatorname{Cos}u.w)}{x^2+u^2} + \frac{x}{x^2+u^2},$$

$$\int_0^w e^{-uz}\operatorname{Sin} xz\,dz = -\frac{e^{-w.u}(u\operatorname{Sin}wx + x\operatorname{Cos}wx)}{x^2+u^2} + \frac{x}{x^2+u^2},$$

unde subtractione facta habebimus

$$\int_0^\infty dz\,(e^{-xz}\operatorname{Cos} uz - e^{-uz}\operatorname{Sin} xz)$$
$$= \frac{e^{-wx}(u\operatorname{Sin}u.w - x\operatorname{Cos}u.w)}{x^2+u^2} + \frac{e^{-wu}(u\operatorname{Sin}wx + x\operatorname{Cos}wx)}{x^2+u^2}.$$

Jam si, multiplicatione per dx utrimque facta, integrale ab $x=0$ ad $x=u$ sumitus, fit

$$\int_0^w \frac{dz}{z}(\operatorname{Cos} uz - e^{-uz})$$
$$= e^{-wu}\int_0^u \frac{u\operatorname{Sin}wx + x\operatorname{Cos}wx}{x^2+u^2}\,dx + \int_0^u \frac{e^{-wx}(u\operatorname{Sin}uw - x\operatorname{Cos}uw)}{x^2+u^2}\,dx.$$

Facile vero patet pro valoribus ipsius w indefinite crescentibus integralia

$$e^{-wu}.\int_0^u \frac{u\operatorname{Sin}wx + x\operatorname{Cos}wx}{x^2+u^2}\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^u \frac{e^{-wx}(u\operatorname{Sin}uw - x\operatorname{Cos}uw)}{x^2+u^2}\,dx$$

indefinite in nihilum convergere, unde fit ut

$$\lim . \int_0^{\omega} \frac{dz}{z} (\operatorname{Cos} uz - e^{-uz}) = 0 \qquad (\omega = \infty)$$

id est

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{z} (\operatorname{Cos} uz - e^{-uz}) = 0$$

Haec vero formula, si a cognita illa

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-uz}}{z} dz = \log u$$

subtrahitur, obtinebitur

$$9. \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - \operatorname{Cos} uz}{z} dz = \log u$$

unde manifestum fit, formulam (1.), una cum omnibus ex ea derivantibus, etiam pro $x = 0$ valere.

His ita demonstratis, sit jam in (7.) $x = 0$, ponamusque

$$e^{\frac{\pi u}{n}} > y, \text{ unde } u = \frac{n}{\pi} \log y,$$

cum sit $a = \frac{m\pi}{n}$, obtinebis

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{m-1} - y^{-m-1}}{y^n - y^{-n}} \left\{ \log \left(\frac{n}{\pi}\right) \right\} dy$$

$$= \frac{\pi}{2n} . \operatorname{Tang} \frac{m\pi}{2n} . \log 2n + \frac{\pi}{n} . \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \operatorname{Sin} \frac{im\pi}{n} \log \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2n}\right)} \right\}$$

$$(m + n = \text{num. imp.})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{m-1} - y^{-m-1}}{y^n - y_-{}^n} \left\{ \log \left(\frac{n}{\pi}\right) + \log (\log y) \right\} dy$$

$$= \frac{\pi}{2n} \operatorname{Tang} \frac{m\pi}{2n} \log n + \frac{\pi}{n} . \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{i-1} \operatorname{Sin} \frac{im\pi}{n} \log \left\{ \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)} \right\}$$

$$(m + n = \text{num. par}),$$

atque quia est

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{m-1} - y^{-m-1}}{y^n - y^{-n}} dy = -\int_0^1 \frac{z^{\frac{m}{2n} - \frac{1}{2}} - z^{-\frac{m}{2n} - \frac{1}{2}}}{1 - z} dz = \frac{\pi}{2n} . \operatorname{Tang} \frac{m\pi}{2n},$$

etiam

10.
$$\begin{cases} \int_0^\infty \frac{y^{m-1}-y^{-m-1}}{y^n-y^{-n}} \log(\log y)\,dy \\ = \frac{\pi}{2n}\,\mathrm{Tang}\,\frac{m\pi}{2n}\log 2\pi + \frac{\pi}{n}\,.\,\underset{i=1}{\overset{i=n-1}{S}}(-1)^{i-1}\,\mathrm{Sin}\,\frac{im\pi}{n}\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2n}\right)}\right\} \\ (m+n = \text{num. imp.}) \\ \int_0^\infty \frac{y^{m-1}-y^{-m-1}}{y^n-y^{-n}}\,.\,\log(\log y)\,dy \\ = \frac{\pi}{2n}\,\mathrm{Tang}\,\frac{m\pi}{2n}\,\log\pi + \frac{\pi}{n}\,.\,\underset{i=1}{\overset{i=\frac{1}{2}(n-1)}{S}}(-1)^{i-1}\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{im\pi}{n}\log\left\{\frac{\Gamma\left(1-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)}\right\} \\ (m+n = \text{num. par}). \end{cases}$$

Hinc sequitur pro $m = 1$,

11.
$$\begin{cases} \int_1^\infty \frac{y^{n-2}\log(\log y)\,dy}{1+y^2+y^4+\ldots+y^{2(n-1)}} \\ = \frac{\pi}{2n}\,.\,\mathrm{Tang}\,\frac{\pi}{2n}\log 2\pi + \frac{\pi}{n}\,.\,\underset{i=1}{\overset{i=n-1}{S}}(-1)^{i-1}\,\mathrm{Sin}\,\frac{i\pi}{n}\,.\,\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2n}\right)}\right\} \\ (n = \text{num. par}) \\ \int_1^\infty \frac{y^{n-2}\,.\,\log(\log y)\,dy}{1+y^2+y^4+\ldots+y^{2(n-1)}} \\ = \frac{\pi}{2n}\,\mathrm{Tang}\,\frac{\pi}{2n}\,\log\pi + \frac{\pi}{n}\,.\,\underset{i=1}{\overset{i=\frac{1}{2}(n-1)}{S}}(-1)^{i-1}\,\mathrm{Sin}\,\frac{i\pi}{n}\,\log\left\{\frac{\Gamma\left(1-\frac{i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)}\right\} \\ (n = \text{num. imp.} \end{cases}$$

Ex. gr. posito in illa $n = 2$ et in hac $n = 3$, habebimus, si in hac y^2 in y mutatur,

12.
$$\begin{cases} \int_0^\infty \frac{\log(\log y)\,dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\pi\log\left\{\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,.\,\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})}\right\} \\ \int_0^\infty \frac{\log(\log y)\,dy}{1+y+y^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\log\left\{\frac{(2\pi)^{\frac{1}{3}}\,.\,\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})}\right\}. \end{cases}$$

§. 3.

Ex §. primo jam apparuit, transcendentem illam, quam per $L(a, x)$ designavimus, finite semper per Γ exprimi posse, cum a in ratione commensurabili ad π est. Nunc in hoc §. versabinur circa proprietates quasdam ejus maxime notandas. Sit igitur in priori formularum (7.) $x = \frac{1}{2}\pi$; tunc erit

$$13. \qquad L(\tfrac{1}{2}\pi, x) = 2\log\left\{\frac{2\Gamma\left(\frac{x+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{4}\right)}\right\},$$

unde, si $x+2$ loco ipsius x ponitur, addendo invenimus

$$14. \qquad L(\tfrac{1}{2}\pi, x+2) + L(\tfrac{1}{2}\pi, x) = 2\log(x+1).$$

Si vero in (13.) $2-x$ loco ipsius x substituimus, e relatione cognita

$$\Gamma(a).\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin} a\pi},$$

similiter addendo erit

$$15. \qquad L(\tfrac{1}{2}\pi, x) + L(\tfrac{1}{2}\pi, 2-x) = 2\log\left[(x-1).\operatorname{Cot}.\frac{(x-1)\pi}{4}\right],$$

id quod pro $x=1$ formulam (8.) reddit

$$16. \qquad L(\tfrac{1}{2}\pi, 1) = \log\left(\frac{4}{\pi}\right).$$

E formulis (14. et 15.) functionem $L(\frac{1}{2}\pi, x)$ pro quolibet ipsius x valore cognitam habemus, si modo per totam periodum ab $x=0$ ad $x=1$ cognita sit, Praeterea formulae (14. et 16.) docent, $L(\frac{1}{2}\pi, x)$ pro $x=$ quolibet numero integro impari finite per logarithmos et π exprimi posse.

Sit jam priori formularum (7.) $a = \frac{2}{3}\pi$; tunc erit

$$L(\tfrac{2}{3}\pi, x) = 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\pi \log\left\{\frac{6.\Gamma\left(\frac{x+4}{6}\right).\Gamma\left(\frac{x+5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{6}\right).\Gamma\left(\frac{x+2}{6}\right)}\right\}$$

unde simili fere modo uc supra obtinebimus

$$17. \qquad \begin{cases} L(\frac{2}{3}\pi, x+3) + L(\frac{2}{3}\pi, x) = 2\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi \log[(x+2)(x+1)] \\ L(\frac{2}{3}\pi, x) + L(\frac{2}{3}\pi, 3-x) \\ = 2\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi \log\left[(x-2)(x-1).\operatorname{Tang}\frac{(x+2)\pi}{6}.\operatorname{Tang}\frac{(x+1)\pi}{6}\right], \end{cases}$$

atque e posteriore pro $x = \frac{3}{2}$:

$$18. \qquad L(\tfrac{2}{3}\pi, \tfrac{3}{2}) = 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\pi \log(\tfrac{1}{2}\operatorname{Cotang}\frac{\pi}{12}).$$

E formulis (17.) sequitur, ut functio $L(\frac{2}{3}\pi, x)$ pro omnibus ipsius x valoribus cognita sit, si modo pro quolibet valore inter $x=0$ et $x=\frac{3}{2}$ cognitam habeamus; praeterea prior harum formularum una cum (18.) docet, $L(\frac{2}{3}\pi, x)$ finite per logarithmos et functiones trigonometricas exprimi posse pro $x = \frac{1}{2}((2i+1).3)$, designante i numerum quemlibet integrum.

At vero relationes longe generaliores invenire possumus, e quibus

praecedentes tamquam casus speciales derivari possunt. Nam ubi $a = \frac{m\pi}{n}$ et $m + n =$ numerus impar est, habemus etiam

$$19. \qquad \text{Tang } \tfrac{1}{2}a = \sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \text{ Sin } ia,$$

quare prior formularum (7.) in hanc formam transformari potest:

$$20. \qquad L(a, x) = 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \text{ Sin } ia \log \left\{ \frac{(2n)^{\frac{1}{2}} . \Gamma\left(\frac{x+n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i}{2n}\right)} \right\}.$$

$$(m + n = \text{num. imp.})$$

Substituamus hic $x + n$ pro x; tunc addendo habebimus

$$21. \qquad L(a, x + n) + L(a, x) = 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \text{ Sin } ia \log (x + i)$$

$$m + n = \text{num. imp.}$$

Si porro in (20.) $n - x$ loco x substituitur, prodit etiam, addendo,

$$L(a, x) + L(a, n - x) = 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \text{ Sin } ia \log \left\{ \frac{(2n)^{\frac{1}{2}} . \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{x+i}{2n})}{\Gamma(\frac{x+i}{2n})} \right\}$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \text{ Sin } ia \log \left\{ \frac{(2n)^{\frac{1}{2}} . \Gamma(1 + \frac{i-x}{2n})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{x+i}{2n})} \right\},$$

sive, cum sit

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \text{ Sin } ia \log \left\{ \frac{(2n)^{\frac{1}{2}} . \Gamma(1 + \frac{i-x}{2n})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{i-x}{2n})} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \text{ Sin } ia \log \left\{ \frac{(2n)^{\frac{1}{2}} . \Gamma(\frac{3}{2} - \frac{x+i}{2n})}{\Gamma(1 - \frac{x+i}{2n})} \right\},$$

etiam

$$L(a, x) + L(a, n - x)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \text{ Sin } ia \log \left\{ \frac{2n . \Gamma(\frac{3}{2} - \frac{x+i}{2n}) . \Gamma(\frac{1}{1} + \frac{x+i}{2n})}{\Gamma(\frac{x+i}{2n}) . \Gamma(1 - \frac{x+i}{2n})} \right\}.$$

Est autem

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}-\tfrac{x+i}{2n}).\Gamma(\tfrac{1}{2}+\tfrac{x+i}{2n}) = \frac{n-x-i}{2n}\cdot\frac{\pi}{\operatorname{Sin}\frac{(x+i)\pi}{2n}},$$

$$\Gamma(\tfrac{x+i}{2n}).\Gamma(1-\tfrac{x+i}{2n}) = \frac{\pi}{\operatorname{Sin}\frac{(x+i)\pi}{2n}},$$

unde sequitur

$$L(a,x)+L(a,n-x) = 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1}\operatorname{Sin} ia \log[(n-x-i).\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}(x+i)\pi],$$

sive denique, posito $n-\iota$ loco i,

22. $$L(a,x)+L(a,n-x) = 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1}\operatorname{Sin} ia \log[(x-i)\operatorname{Cotang}\frac{(x-i)\pi}{2n}].$$

$$(m+n = \text{num. imp.})$$

Constat igitur e formulis (**21.** et **22.**), functionem $L(a,x)$ pro quovis ipsius x valore cognitam esse, si modo per totam periodum ab $x=0$ ad $x=\frac{1}{2}n$ cognita sit, exsistente $m+n$ numero impari.

Posito in (**22.**) $x=\frac{1}{2}n$, habemus formulam

23. $$L(a,\tfrac{1}{2}n) = \sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1}\operatorname{Sin} ia \log[(\tfrac{1}{2}n-i)\operatorname{Cotang}(\frac{\pi}{4}-\frac{i\pi}{2n})],$$

quae quidem pro $i=\frac{1}{2}n$ expressionem $\log 0.\infty$ praesentat; cujus tamen verus valor facile invenitur $\log\left(\frac{2n}{\pi}\right)$. Haec formula una cum (**21.**) docet, functionem $L(a,x)$, si $m+n$ numerus impar est, finite per logarithmos et functiones trigonometricas exprimi posse, posito $x=\frac{1}{2}n(2i+1)$, designante i numerum quemvis integrum.

Consimili fere modo relationes analogas e posteriori formularum (**7.**) derivare possumus. Nam substituatur ibi $x=n$ loco x, erit

$$L(a,x+n) = \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a\log.n + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1} S(-1)^{i-1}\operatorname{Sin} ia\log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{2n+x-i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+x+i}{n}\right)}\right\},$$

unde, subtrahendo,

24. $$L(a,x+n)-L(a,x) = 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} S(-1)^{i-1}\operatorname{Sin} ia.\log\left\{\frac{x+n-i}{x+i}\right\}$$

$$(m+n = \text{num. par.})$$

Ceterum, si in eadem formula (**7.**) $n-x$ pro x ponitur, fit

$$L(a, n-x) = \text{Tang } \tfrac{1}{2}a \,.\log n + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} S(-1)^{i-1} \text{Sin } ia \log \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{2n-x-i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+i+x}{n}\right)} \right\},$$

unde subtractione e cognita functionis Γ ratione

$$\textbf{25.} \qquad L(a, x) - L(a, n-x) = 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} S(-1)^{i} \text{Sin } ia \log \left\{ \frac{x-i}{n-x-i} \cdot \frac{\text{Sin } \frac{(x+i)\pi}{n}}{\text{Sin } \frac{(x-i)\pi}{n}} \right\}.$$

$$(m + n = \text{num. par.})$$

Formularum (24. et 25.) beneficio sequitur, ut, exsistente $m + n$ numero pari, functionem $L(a, x)$ pro quovis ipsius x valore cognitam omnino habeamus, si modo per totam periodum ab $x = 0$ ad $x = \frac{1}{2}n$ cognita sit.

Ponamus jam successive loco x:

$$x, \quad x + \frac{2n}{r}, \quad x + \frac{4n}{r}, \quad x + \frac{6n}{r}, \ldots . x + \frac{(r-1).2n}{r}$$

in priori formularum (7.), et

$$x, \quad x + \frac{n}{r}, \quad x + \frac{2n}{r}, \quad x + \frac{3n}{r}, \ldots . x + \frac{(r-1).n}{r}$$

in posteriori; tunc beneficio cognitae formulae

$$\Gamma(y) \,.\, \Gamma(y + \tfrac{1}{r}) \,.\, \Gamma(y + \tfrac{2}{r}) \ldots . \Gamma(y + \tfrac{r-1}{r}) = \Gamma(ry) \,.\, (2\pi)^{\frac{1}{2}(r-1)} \,.\, r^{\frac{1}{2}-ry}$$

summando invenimus

$$\textbf{26.} \quad \begin{cases} L(a, x) + L(a, x + \frac{2n}{r}) + L(a, x + \frac{4n}{r}) + \ldots . + L(a, x + \frac{(r-1)2n}{r}) \\ \quad = r \text{ Tang } \frac{1}{2}a \log . 2n + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} S(-1)^{i-1} \text{Sin } ia \log \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}r + \frac{r(x+i)}{n})}{r^{\frac{1}{2}r}\, \Gamma(\frac{r(x+i)}{2n})} \right\} \\ \qquad (m + n = \text{num. imp.}) \\ L(a, x) + L(a, x + \frac{n}{r}) + L(a, x + \frac{2n}{r}) + \ldots . L(a, x + \frac{(r-1).n}{r}) \\ \quad = r \text{ Tang } \frac{1}{2}a \,.\log n + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} S(-1)^{i-1} \text{Sin } ia \log \left\{ \frac{\Gamma(r + \frac{r(x-i)}{n})}{r^{r-\frac{2ri}{n}} \,.\, \Gamma(\frac{r(x+i)}{n})} \right\} \\ \qquad (m + n = \text{num. par.}) \end{cases}$$

Facile apparet, priorem harum summarum per logarithmos exprimi posse, cum r numerus par est.

§. 4.

Cognita est formula

$$27.\quad \int_0^\infty z^{s-1} e^{-xz} \operatorname{Cos} uz\, dz = \frac{\Gamma(s)}{(x^2+u^2)^{\frac{1}{2}s}} . \operatorname{Cos}\left(s \operatorname{ArcTang} \frac{u}{x}\right),$$

quae, exsistente $1 > s > 0$, pro $x = 0$ etiam legitima, praebet

$$28.\quad \int_0^\infty z^{s-1} \operatorname{Cos} uz\, dz = \frac{\operatorname{Cos}.\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)}{u^s} .$$

Multiplicemus (27.) utrimque per

$$\frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} . du \qquad [a < \pi];$$

integratione inter $u = 0$ et $u = \infty$ instituta, fit

$$\int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} . \frac{\operatorname{Cos}\left(s . \operatorname{ArcTang} \frac{u}{x}\right)}{(x^2+u^2)^{\frac{s}{2}}} . du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} . \int_0^\infty e^{-xz} . z^{s-1} dz . \int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} . \operatorname{Cos} uz . du$$

$$= \frac{\operatorname{Sin} a}{\Gamma(s)} . \int_0^\infty \frac{e^{-xz} z^{s-1} . e^{-z} dz}{1 + 2e^{-z} \operatorname{Cos} a + e^{-2z}} ,$$

unde, in dextero membro $e^{-z} = y$ ponendo, provenit

$$29.\quad \int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} . \frac{\operatorname{Cos}\left(s . \operatorname{ArcTang} \frac{u}{x}\right)}{(x^2+u^2)^{\frac{1}{2}s}} du = \frac{\operatorname{Sin} a}{\Gamma(s)} . \int_0^1 \frac{y^x \left(\log \frac{1}{y}\right)^{s-1} dy}{1 + 2y \operatorname{Cos} a + y^2}$$

et pro $x = 0$, si modo $1 > s > 0$,

$$30.\quad \int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} . \frac{du}{u^s} = \frac{\operatorname{Sin} a}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} . \int_0^1 \frac{\left(\log \frac{1}{y}\right)^{s-1} dy}{1 + 2y \operatorname{Cos} a + y^2} .$$

Ex hac vero formula, si $a = \frac{m\pi}{n}$ et $e^{-\frac{\pi u}{n}} = y$ ponitur, unde fit

$$u = \frac{n}{\pi} . \log \frac{1}{y} \quad \text{et} \quad du = -\frac{n}{\pi} . \frac{dy}{y} ,$$

transformatione facta eruitur

$$31.\quad \int_0^1 \frac{y^{m-1} - y^{-m-1}}{y^n - y^{-n}} . \frac{dy}{\left(\log \frac{1}{y}\right)^s} = \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1-s} . \operatorname{Sin} \frac{m\pi}{n}}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} . \int_0^1 \frac{\left(\log \frac{1}{y}\right)^{s-1} dy}{1 + 2y \operatorname{Cos} \frac{m\pi}{n} + y^2} ,$$

et pro $m = 1$,

$$32.\quad \int_0^1 \frac{y^{n-2} . dy}{1 + y^2 \ldots + y^{2(n-1)}} . \frac{1}{\left(\log \frac{1}{y}\right)^s} = \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1-s} . \operatorname{Sin} \frac{\pi}{n}}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} . \int_0^1 \frac{\left(\log \frac{1}{y}\right)^{s-1} dy}{1 + 2y \operatorname{Cos} \frac{\pi}{n} + y^2} .$$

Appellemus jam

$$\textbf{33.}\qquad G(s)=\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1+y+y^2},\qquad G_1(s)=\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1+y^2};$$

formula (**32.**) dabit, posito $n=3$ et mutato y^2 in y:

$$\textbf{34.}\qquad G(1-s)=\frac{(\frac{2}{3}\pi)^{1-s}\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\,.\,G(s),$$

atque eâdem pro $n=2$ immediate colligitur

$$\textbf{35.}\qquad G_1(1-s)=\frac{(\frac{1}{2}\pi)^{1-s}}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\,.\,G_1(s).$$

Ecce simplices et notandae aequationes, quae functiones $G(s)$ et $G_1(s)$ earumque complementarias $G(1-s)$ et $G_1(1-s)$ inter se conjungunt; in quo respectu analogae sunt cum hac cognita functionis Γ formula

$$\Gamma(a)\,.\,\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\operatorname{Sin}a\pi}.$$

Ex formulis (**34.** et **35.**) logarithmando obtinebimus

$$\log G(1-s)-\log G(s)=(1-s)\log\tfrac{2}{3}\pi+\log\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\pi-\log\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}s\pi-\log\Gamma(s),$$

$$\log G_1(1-s)-\log G_1(s)=(1-s)\log\tfrac{1}{2}\pi-\log\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}s\pi-\log\Gamma(s)$$

unde, si brevitatis causa ponimus

$$\textbf{36.}\qquad \begin{cases} F(s)=\dfrac{d.G(s)}{ds}=\displaystyle\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}\log(\log\frac{1}{y})\,dy}{1+y+y^2}, \\ F_1(s)=\dfrac{dG_1(s)}{ds}=\displaystyle\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}.\log(\log\frac{1}{y}).dy}{1+y^2}, \end{cases}$$

differentiando habebimus has novas relationes

$$\textbf{37.}\qquad \begin{cases} \dfrac{F(s)}{G(s)}+\dfrac{F(1-s)}{G(1-s)}=\log\tfrac{2}{3}\pi+Z'(s)-\tfrac{1}{2}\pi\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}s\pi, \\ \dfrac{F_1(s)}{G_1(s)}+\dfrac{F_1(1-s)}{G_1(1-s)}=\log\tfrac{1}{2}\pi+Z'(s)-\tfrac{1}{2}\pi\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}s\pi, \end{cases}$$

si cum *Legendre* $\frac{d.\log\Gamma(s)}{ds}$ per $Z'(s)$ signamus.

Supponamus in (**37.**) $s=\frac{1}{2}$; tunc erit

$$\int_0^1 \frac{\log(\log\frac{1}{y})}{1+y+y^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(\log\frac{1}{y})}}=\tfrac{1}{2}(\log\frac{\pi}{6}-\tfrac{1}{2}\pi-C)\cdot\int_0^1\frac{1}{1+y+y^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(\log\frac{1}{y})}}$$

$$\int_0^1 \frac{\log(\log\frac{1}{y})}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(\log\frac{1}{y})}}=\tfrac{1}{2}(\log\frac{\pi}{8}-\tfrac{1}{2}\pi-C)\cdot\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(\log\frac{1}{y})}},$$

seu ponendo $\log \frac{1}{y} = x$:

$$38. \quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\log x}{e^x+1+e^{-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}(\log \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\pi - C) \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1+e^{-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ \int_0^\infty \frac{\log x}{e^x+e^{-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}(\log \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\pi - C) \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, \end{cases}$$

exsistente $C = -Z'(1)$ cognita illa *Euleri* Constante **0,577 216 .....** Hae formulae, quas non vidimus hucusque propositas, haud indignae nobis videntur attentione Geometrarum.

Ex formulis (38.) duas jam deducemus relationes, quae in serierum transformationibus haud infimo loco dignae videntur. Nimirum, exsistentibus identico modo

$$39. \quad \begin{cases} \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{3}\pi}{e^x+1-e^{-x}} = \mathbf{S}_{i=1}^{i=n}(-1)^{i-1} \cdot e^{-ix} \cdot \operatorname{Sin} \frac{1}{3} i\pi + \frac{(-1)^n \cdot e^{-nx}(\operatorname{Sin} \frac{1}{3}(n+1)\pi + e^{-x} \operatorname{Sin} \frac{1}{3} n\pi)}{1+e^{-x}+e^{-2x}} \\ \frac{1}{e^x+e^{-x}} = \mathbf{S}_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i \cdot e^{-(2i+1)x} + \frac{(-1)^n \cdot e^{-2nx}}{e^x+e^{-x}}, \end{cases}$$

ex cognita formula

$$40. \quad \int_0^\infty e^{-kx} \cdot \log x \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}(\log k + 2\log 2 + C)$$

habebimus

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{3}\pi \cdot \int_0^\infty \frac{\log x}{e^x+1+e^{-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \mathbf{S}_{i=1}^{i=n}(-1)^i \cdot \operatorname{Sin} \tfrac{1}{3} i\pi \cdot \frac{\log i + 2\log 2 + C}{\sqrt{i}}$$

$$+ (-1)^n \{P(n) \cdot \operatorname{Sin} \tfrac{1}{3}(n+1)\pi + P(n+1) \operatorname{Sin} \tfrac{1}{3} n\pi\},$$

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{e^x+e^{-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} \cdot \mathbf{S}(-1)^{i+1} \cdot \frac{\log(2i+1)+2\log 2+C}{\sqrt{(2i+1)}} + (-1)^n \cdot Q(n),$$

ubi brevitatis causa posuimus

$$P(n) = \int_0^\infty \frac{e^{-nx}\log x}{1+e^{-x}+e^{-2x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Theta \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-nx}\log x \cdot dx}{\sqrt{x}} = -\frac{\Theta \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}(\log n + 2\log 2 + C),$$

$$Q(n) = \int_0^\infty \frac{e^{-2nx}\log x}{e^x+e^{-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Theta_1 \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-2nx}\log x \cdot dx}{\sqrt{x}} = -\frac{\Theta_1 \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{(2n)}}(\log 2n + 2\log 2 + C),$$

exsistente $1 > \frac{\Theta}{\Theta_1} > 0$. Facile vero aparet esse

$$\lim P(n) = 0, \qquad \lim Q(n) = 0 \qquad [n = \infty],$$

unde concludi licet

41.
$$\begin{cases} \operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\pi \cdot \int_0^\infty \frac{\log x}{e^x+1+e^{-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=1}^{i=\infty} (-1)^i \operatorname{Sin}\tfrac{1}{3} i\pi \cdot \frac{\log i + 2\log 2 + C}{\sqrt{i}} \text{ et} \\ \int_0^\infty \frac{\log x}{e^x+e^{-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=0}^{i=\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\log(2i+1) + 2\log 2 + C}{\sqrt{(2i+1)}} . \end{cases}$$

Beneficio vero formularum (39.) facillimo etiam negotio deducere possumus

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{3}\pi \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1+e^{-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=1}^{i=\infty} (-1)^{i-1} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{3} i\pi}{\sqrt{i}} ,$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{(2i+1)}} ,$$

quae formulae una cum (41.), respectu ad (38.) habito, post reductiones quasdam facillimas praebent

42.
$$\begin{cases} \dfrac{\log 1}{\sqrt{1}} - \dfrac{\log 2}{\sqrt{2}} + \dfrac{\log 4}{\sqrt{4}} - \dfrac{\log 5}{\sqrt{5}} + \dfrac{\log 7}{\sqrt{7}} - \text{etc.} \\ = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - C - \log \tfrac{8}{3}\pi) \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}} - \text{etc.} \ldots . \right\} \\ \dfrac{\log 1}{\sqrt{1}} - \dfrac{\log 3}{\sqrt{3}} + \dfrac{\log 5}{\sqrt{5}} - \dfrac{\log 7}{\sqrt{7}} + \dfrac{\log 9}{\sqrt{9}} - \text{etc.} \\ = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - C - \log 2\pi) \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{7}} + \dfrac{1}{\sqrt{9}} - \text{etc.} \right\} \end{cases}$$

quae relationes etiam ita scribi possunt:

43.
$$\begin{cases} \dfrac{1^{\frac{1}{\sqrt{1}}} \cdot 4^{\frac{1}{\sqrt{4}}} \cdot 7^{\frac{1}{\sqrt{7}}} \cdot 10^{\frac{1}{\sqrt{10}}} \ldots .}{2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 5^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \cdot 8^{\frac{1}{\sqrt{8}}} \cdot 13^{\frac{1}{\sqrt{13}}} \ldots .} = e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - C - \log\frac{8}{3}\pi) A} \\ \dfrac{1^{\frac{1}{\sqrt{1}}} \cdot 5^{\frac{1}{\sqrt{4}}} \cdot 9^{\frac{1}{\sqrt{9}}} \cdot 13^{\frac{1}{\sqrt{13}}} \ldots .}{3^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot 7^{\frac{1}{\sqrt{7}}} \cdot 11^{\frac{1}{\sqrt{11}}} \cdot 15^{\frac{1}{\sqrt{15}}} \ldots .} = e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - C - \log 2\pi) \cdot B} \end{cases}$$

exsistentibus

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1+e^{-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \ldots . \text{ etc.}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \ldots . \text{ etc.}$$

§. 5.

Si $\dfrac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}}$ in seriem evolvimus, exsistente identico modo

$$\frac{1}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} = e^{-\pi u} \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=0}^{i=n-1} e^{-2i\pi u} + \frac{e^{-2n\pi u}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}},$$

fit utique

$$\frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} = \mathop{\mathbf{S}}_{i=0}^{i=n-1} [e^{-[(2i+1)\pi-a]u} - e^{-[(2i+1)\pi+a]u}] + \frac{e^{-2n\pi u}(e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}$$

unde

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{du}{u^s} = \Gamma(1-s) \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=0}^{i=n-1} [\frac{1}{((2i+1)\pi-a)^{1-s}} - \frac{1}{((2i+1)\pi+a)^{1-s}}] + \varphi(n)$$

ubi brevitatis causa posuimus

$$\varphi(n) = \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{e^{-2n\pi u} \cdot du}{u^s} = M \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-2n\pi u} du}{u^s} = \frac{M\Gamma(1-s)}{(2n\pi)^{1-s}},$$

exsistente M quantitate quadam finata. Hinc vero facile apparet

$$\lim . \varphi(n) = 0 \qquad [n = \infty]$$

atque igitur

44. $$\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{du}{u^s} = \Gamma(1-s) \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=0}^{i=n-1} [\frac{1}{((2i+1)\pi-a)^{1-s}} - \frac{1}{((2i+1)\pi+a)^{1-s}}].$$

Jam vero, exsistente identico modo

$44\frac{1}{2}$. $$\frac{\operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} = \mathop{\mathbf{S}}_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} y^{i-1} \operatorname{Sin} ia + \frac{(-1)^n . y^n (\operatorname{Sin}(n+1)a + y \operatorname{Sin} na)}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2},$$

habebimus etiam

45. $$\int_0^1 \frac{\operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} \cdot \frac{dy}{(\log \frac{1}{y})^{1-s}}$$

$$= \Gamma(s) \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} \frac{\operatorname{Sin} ia}{i^s} + (-1)^n (W(n) \operatorname{Sin}(n+1)a + W(n+1) \operatorname{Sin} na),$$

ubi brevitatis causa posuimus

$$W(n) = \int_0^1 \frac{y^n (\log \frac{1}{y})^{s-1} dy}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} = \Theta \cdot \int_0^1 y^n (\log \frac{1}{y})^{s-1} dy = \frac{\Theta . \Gamma(s)}{(n+1)^s},$$

exsistente $1 > \Theta > 0$. Facile igitur apparet esse

$$\lim W(n) = 0 \qquad [n = \infty]$$

unde ex (45.) obtinebitur

46. $$\int_0^1 \frac{\operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} \cdot \frac{dy}{(\log \frac{1}{y})^{1-s}} = \Gamma(s) \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=1}^{i=\infty} (-1)^{i-1} \cdot \frac{\operatorname{Sin} ia}{i^s}.$$

Substitutis vero in (29.) valoribus, quos formulae (44. et 46.) praebent, hanc notandam inter duas series infinitas relationem habemus, si s in $1-s$ mutatur:

$$47.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{(\pi-a)^s} - \dfrac{1}{(\pi+a)^s} + \dfrac{1}{(3\pi-a)^s} - \dfrac{1}{(3\pi+a)^s} + \dfrac{1}{(5\pi-a)^s} - \dfrac{1}{(5\pi+a)^s} + \text{etc.} \\ \quad = \dfrac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi \,.\, \Gamma(s)} \left\{ \dfrac{\operatorname{Sin} a}{1^{1-s}} - \dfrac{\operatorname{Sin} 2a}{2^{1-s}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 3a}{3^{1-s}} - \dfrac{\operatorname{Sin} 4a}{4^{1-s}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 5a}{5^{1-s}} - \text{etc.} \right\} \end{cases}$$

et si $\pi - a$ loco a ponimus:

$$48.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^s} - \dfrac{1}{(2\pi-a)^s} + \dfrac{1}{(2\pi+a)^s} - \dfrac{1}{(4\pi-a)^s} + \dfrac{1}{(4\pi+a)^s} - \dfrac{1}{(6\pi-a)^s} + \text{etc.} \\ \quad = \dfrac{1}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi \,.\, \Gamma(s)} \left\{ \dfrac{\operatorname{Sin} a}{1^{1-s}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 2a}{2^{1-s}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 3a}{3^{1-s}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 4a}{4^{1-s}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 5a}{5^{1-s}} + \text{etc.} \right\} \end{cases}$$

Hinc si $s = \frac{1}{2}$ facimus fit utique

$$49.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{(\pi-a)}} - \dfrac{1}{\sqrt{(\pi+a)}} + \dfrac{1}{\sqrt{(3\pi-a)}} - \dfrac{1}{\sqrt{(3\pi+a)}} + \dfrac{1}{\sqrt{(5\pi-a)}} - \dfrac{1}{\sqrt{(5\pi+a)}} + \text{etc.} \\ \quad = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \left\{ \dfrac{\operatorname{Sin} a}{\sqrt{1}} - \dfrac{\operatorname{Sin} 2a}{\sqrt{2}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 3a}{\sqrt{3}} - \dfrac{\operatorname{Sin} 4a}{\sqrt{4}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 5a}{\sqrt{5}} - \text{etc.} \right\} \\ \dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi-a)}} + \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi+a)}} - \dfrac{1}{\sqrt{(4\pi-a)}} + \dfrac{1}{\sqrt{(4\pi+a)}} - \dfrac{1}{\sqrt{(4\pi-6)}} + \text{etc.} \\ \quad = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \left\{ \dfrac{\operatorname{Sin} a}{\sqrt{1}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 2a}{\sqrt{2}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 3a}{\sqrt{3}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 4a}{\sqrt{4}} + \dfrac{\operatorname{Sin} 5a}{\sqrt{5}} + \text{etc.} \right. \end{cases}$$

Ponamus in (47. et 48.), a esse in ratione commensurabili ad π, i. e. $a = \frac{m\pi}{n}$ ($m < n$ num. integr.); facile tunc obtinebitur

$$50.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{(n-m)^s} - \dfrac{1}{(n+m)^s} + \dfrac{1}{(3n-m)^s} - \dfrac{1}{(3n+m)^s} + \dfrac{1}{(5n-m)^s} - \dfrac{1}{(5n+m)^s} + \text{etc.} \\ \quad = \dfrac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^s}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi \,.\, \Gamma(s)} \cdot \left\{ \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{n}}{1^{1-s}} - \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{2m\pi}{n}}{2^{1-s}} + \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{3m\pi}{n}}{3^{1-s}} - \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{4m\pi}{n}}{4^{1-s}} + \text{etc.} \right\} \\ \dfrac{1}{m^s} - \dfrac{1}{(2n-m)^s} + \dfrac{1}{(2n+m)^s} - \dfrac{1}{(4n-m)^s} + \dfrac{1}{(4n+m)^s} - \dfrac{1}{(6n-m)^s} + \text{etc.} \\ \quad = \dfrac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^s}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi \,.\, \Gamma(s)} \left\{ \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{n}}{1^{1-s}} + \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{2m\pi}{n}}{2^{1-s}} + \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{3m\pi}{n}}{3^{1-s}} + \dfrac{\operatorname{Sin}\frac{4m\pi}{n}}{4^{1-s}} + \text{etc.} \right\} \end{cases}$$

Ex. 1. Exsistentibus $m = 1$, $n = 2$, fit

$$51.\quad \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \text{etc.} \ldots\ldots$$
$$= \frac{(\frac{1}{2}\pi)^s}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi \,.\, \Gamma(s)} \cdot \left\{ \frac{1}{1^{1-s}} - \frac{1}{3^{1-s}} + \frac{1}{5^{1-s}} - \frac{1}{7^{1-s}} + \text{etc.} \right\}$$

Ex. 2. Exsistentibus in priori formularum (50.) $m = 1$, $n = 3$, fit

$$52. \quad \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} - \text{etc.} \ldots.$$
$$= \frac{(\frac{2}{3}\pi)^s . \operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} \left\{ \frac{1}{1^{1-s}} - \frac{1}{2^{1-s}} + \frac{1}{4^{1-s}} - \frac{1}{5^{1-s}} + \frac{1}{7^{1-s}} - \text{etc.} \right\}$$

Formulas (**51.** et **52.**) memini (ni fallor) me vidisse ab *Eulero* alicubi per inductionem inventas, omni demonstratione carentes; neque apud quemquam alium demonstrationem earum invenimus, quamquam formâ suâ attentione Geometrarum digna videantur.

Ex. **3.** Exsistentibus in posteriore formularum **(50.)** $m = 1$, $n = 3$, posito brevitatis causa

$$f(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} - \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} - \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} - \text{etc.}$$
$$\varphi(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} - \frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} - \frac{1}{10^s} - \frac{1}{11^s} + \text{etc.}$$

fit utique

$$f(s) = \frac{(\frac{1}{3}\pi)^s . \operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} \cdot \varphi(1-s).$$

Cum autem sit

$$\varphi(s) = f(s) + 2^{-s} \left\{ \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s} + \text{etc.} \right\}$$

atque etiam

$$\varphi(s) = f(s) + 2^{-s} f(s) - 2^{-2s} \left\{ \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} - \frac{1}{5^s} + \text{etc.} \right\}$$

unde facile prodit

$$(1 + 2^{-s})\, \varphi(s) = (1 + 2^{1-s})\, f(s),$$

has duas relationes habebimus:

$$53. \quad \begin{cases} f(s) = \dfrac{(\frac{1}{3}\pi)^s . \operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} \cdot \dfrac{1+2^s}{1+2^{s-1}} \cdot f(1-s) \\ \varphi(s) = \dfrac{(\frac{1}{3}\pi)^s . \operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} \cdot \dfrac{2(1+2^{s-1})}{1+2^s} \cdot \varphi(1-s). \end{cases}$$

Ex. **4.** Exsistentibus in **(50.)** $m = 1$, $n = 4$, posito brevitatis causa

$$F(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} - \frac{1}{13^s} - \frac{1}{15^s} + \text{etc.}$$
$$W(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \frac{1}{11^s} + \text{etc.}$$
$$\psi(s) = \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{11^s} - \frac{1}{13^s} + \frac{1}{19^s} - \frac{1}{21^s}$$
$$P(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \frac{1}{15^s} + \frac{1}{17^s} - \text{etc.}$$

fit utique

$$\psi(s) = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^s \operatorname{Sin}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} . F(1-s) - \frac{\frac{1}{2}.(\frac{1}{2}\pi)^s}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} . W(1-s),$$

$$P(s) = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^s \operatorname{Sin}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} . F(1-s) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi)^s}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} . W(1-s),$$

unde addendo, cum sit

$$\psi(s) + P(s) = F(s),$$

erit

$$54. \qquad F(s) = \frac{2.\left(\frac{\pi}{4}\right)^s \operatorname{Sin}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi . \Gamma(s)} . F(1-s).$$

§. 6.

Differentiemus jam formulam (44.) respectu s tamquam variabilis; tum erit

$$\int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} . u^{-s} \log u . du$$

$$= Z'(1-s) . \int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} . \frac{du}{u^s} - \Gamma(1-s) . \sum_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{\log((2i+1)\pi - a)}{((2i+1)\pi - a)^{1-s}} - \frac{\log((2i+1)\pi + a)}{((2i+1)\pi + a)^{1-s}}\right],$$

unde pro $s = 0$, exsistente

$$Z'(1) = -C \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} . du = \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a,$$

habebimus

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{\log((2i+1)\pi - a)}{((2i+1)\pi - a)^{1-s}} - \frac{\log((2i+1)\pi + a)}{((2i+1)\pi - a)^{1-s}}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}C . \operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a - \int_0^\infty \frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \log u . du.$$

Utcumque vero a est in ratione commensurabili ad π, valorem integralis, quod in dextero membro occurrit, formulae (7.) (pro $x = 0$) praebent. Sit igitur $a = \frac{m\pi}{n}$ (m et n numeri integri, $n > m$); tunc obtinebimus

$$\frac{n}{\pi} . \sum_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{\log((2i+1)n - m)}{(2i+1)n - m} - \frac{\log((2i+1)n + m)}{(2i+1)n + m}\right]$$

$$+ \log\frac{\pi}{n} \sum_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{1}{(2i+1)\pi - \frac{m\pi}{n}} - \frac{1}{(2i+1)\pi + \frac{m\pi}{n}}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}C . \operatorname{Tang}\frac{m\pi}{2n} - \int \frac{e^{\frac{m\pi}{n}.u} - e^{-\frac{m\pi}{n}.u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} . \log u . du,$$

unde, cum sit ex (44.) (pro $s = 0$)

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{1}{(2i+1)\pi - \frac{m\pi}{n}} - \frac{1}{(2i+1)\pi + \frac{m\pi}{n}}\right] = \int_0^\infty \frac{e^{\frac{m\pi}{n}\cdot u} - e^{-\frac{m\pi}{n}\cdot u}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \cdot du = \tfrac{1}{2}\operatorname{Tang}\frac{m\pi}{2n},$$

fit denique ex formulis (7.) citatis

55.
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\log(n-m)}{n-m} - \dfrac{\log(n+m)}{n+m} + \dfrac{\log(3n-m)}{3n-m} - \dfrac{\log(3n+m)}{3n+m} + \dfrac{\log(5n-m)}{5n-m} - \text{etc.} \\ = -\dfrac{\pi}{2n}\cdot\operatorname{Tang}\dfrac{m\pi}{2n}(C+\log 2\pi) - \dfrac{\pi}{n}\cdot\sum_{i=1}^{i=n-1}(-1)^{i-1}\operatorname{Sin}\dfrac{im\pi}{n}\log\left\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2n}\right)}\right\} \\ (m+n = \text{num. imp.}) \\ \dfrac{\log(n-m)}{n-m} - \dfrac{\log(n+m)}{n+m} + \dfrac{\log(3n-m)}{3n-m} - \dfrac{\log(3n+m)}{3n+m} + \dfrac{\log(5n-m)}{5n-m} - \text{etc.} \\ = -\dfrac{\pi}{2n}\cdot\operatorname{Tang}\dfrac{m\pi}{2n}(C+\log\pi) - \dfrac{\pi}{n}\cdot\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{i-1}\operatorname{Sin}\dfrac{im\pi}{n}\log\left\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)}\right\} \\ (m+n = \text{num. par}), \end{array}\right.$$

atque si $n - m$ loco m ponimus,

56.
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\log m}{m} - \dfrac{\log(2n-m)}{2n-m} + \dfrac{\log(2n+m)}{2n+m} - \dfrac{\log(4n-m)}{4n-m} + \dfrac{\log(4n+m)}{4n+m} - \text{etc.} \\ = -\dfrac{\pi}{2n}\operatorname{Cotang}\dfrac{m\pi}{2n}(C+\log 2\pi) + \dfrac{\pi}{n}\cdot\sum_{i=1}^{i=n-1}\operatorname{Sin}\dfrac{im\pi}{n}\log\left\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+i}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2n}\right)}\right\} \\ (m = \text{num. imp.}) \\ \dfrac{\log m}{m} - \dfrac{\log(2n-m)}{2n-m} + \dfrac{\log(2n+m)}{2n+m} - \dfrac{\log(4n-m)}{4n-m} + \dfrac{\log(4n+m)}{4n+m} - \text{etc.} \\ = -\dfrac{\pi}{2n}\operatorname{Cotang}\dfrac{m\pi}{2n}(C+\log\pi) + \dfrac{\pi}{n}\cdot\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)}\cdot\operatorname{Sin}\dfrac{im\pi}{n}\log\left\{\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+i}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{n}\right)}\right\} \\ (m = \text{num. par}). \end{array}\right.$$

Ex. 1. Posito $n = 2$, $m = 1$, fit

$$\frac{\log 1}{1} - \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 5}{5} - \frac{\log 7}{7} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4}(\log\pi - C) - \pi\log\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right)$$

atque inde

$$\frac{1.5^{\frac{1}{5}}.9^{\frac{1}{9}}.13^{\frac{1}{13}}\ldots.}{3^{\frac{1}{3}}.7^{\frac{1}{7}}.11^{\frac{1}{11}}.15^{\frac{1}{15}}\ldots.} = \left\{\frac{\pi e^{-C}}{(\Gamma(\frac{3}{4}))^4}\right\}^{\frac{\pi}{4}}.$$

Ex. 2. Posito $n=3$, $m=1$, exsistente

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\text{etc.}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}},$$

fit utique

$$\frac{\log 1}{1}-\frac{\log 2}{2}+\frac{\log 4}{4}-\frac{\log 5}{5}+\frac{\log 7}{7}-\text{etc.}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\log\left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\right\}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}(C+\log 2\pi),$$

$$\frac{\log 1}{1}-\frac{\log 5}{5}+\frac{\log 7}{7}-\frac{\log 11}{11}+\frac{\log 13}{13}-\text{etc.}$$
$$=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left\{\log\frac{2\pi}{\sqrt{3}}-C-2\log\left[\Gamma(\tfrac{5}{6}).\Gamma(\tfrac{2}{3}),\right.\right.$$

atque inde

$$\frac{1.4^{\frac{1}{4}}.7^{\frac{1}{7}}.10^{\frac{1}{10}}\ldots.}{2^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{5}}.8^{\frac{1}{8}}.10^{\frac{1}{11}}\ldots.}=\left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{3})e^{-\frac{1}{3}C}}{\Gamma(\frac{2}{3}).(2\pi)^{\frac{1}{3}}}\right\}^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}},$$

$$\frac{1.7^{\frac{1}{7}}.13^{\frac{1}{13}}.19^{\frac{1}{19}}\ldots.}{5^{\frac{1}{5}}.11^{\frac{1}{11}}.17^{\frac{1}{17}}.23^{\frac{1}{23}}\ldots.}=\left\{\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}C}}{3^{\frac{1}{4}}.\Gamma(\frac{2}{3}).\Gamma(\frac{5}{6})}\right\}^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Ex. 3. Posito $n=4$, $m=1$, fit

$$\frac{\log 1}{1}-\frac{\log 3}{3}+\frac{\log 5}{5}-\frac{\log 11}{11}+\frac{\log 13}{13}-\text{etc.}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log\left\{\frac{\Gamma(\frac{5}{8}).\Gamma(\frac{3}{8})}{2^{\frac{1}{4}}.\pi^{\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}C}}\right\}+\tfrac{1}{2}\pi\log\left\{\frac{e^{-\frac{1}{2}C}.\pi^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{3}{4})}\right\},$$

$$\frac{\log 1}{1}-\frac{\log 7}{7}+\frac{\log 9}{9}-\frac{\log 15}{15}+\frac{\log 17}{17}-\text{etc.}=\tfrac{1}{2}\pi\log\left\{\frac{\pi^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}C}}{\Gamma(\frac{3}{4})}\right\}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\log\left\{\frac{2^{\frac{1}{4}}.\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}C}}{\Gamma(\frac{5}{8}).\Gamma(\frac{3}{8})}\right\},$$

atque inde

$$\frac{1.5^{\frac{1}{5}}.13^{\frac{1}{13}}.21^{\frac{1}{21}}\ldots.}{3^{\frac{1}{3}}.11^{\frac{1}{11}}.19^{\frac{1}{19}}.27^{\frac{1}{27}}\ldots.}=\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}C}\pi^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{3}{4})}\right)^{\frac{1}{2}\pi}.\left\{\frac{\Gamma(\frac{5}{8}).\Gamma(\frac{3}{8})}{2^{\frac{1}{4}}.\pi^{\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}C}}\right\}^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}},$$

$$\frac{1.9^{\frac{1}{9}}.17^{\frac{1}{17}}.25^{\frac{1}{25}}\ldots.}{7^{\frac{1}{7}}.15^{\frac{1}{15}}.23^{\frac{1}{23}}.31^{\frac{1}{31}}\ldots.}=\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}C}.\pi^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{3}{4})}\right)^{\frac{1}{2}\pi}.\left\{\frac{2^{\frac{1}{4}}.\pi^{\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}C}}{\Gamma(\frac{5}{8}).\Gamma(\frac{3}{8})}\right\}^{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}.$$

§. 7.

Si in formula (29.) $a=0$ ponitur, fit

$$57.\quad \int_0^\infty \frac{2u.du}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}.\frac{\text{Cos}\,(s.\text{ArcTang}\,\frac{u}{x})}{(x^2+u^2)^{\frac{1}{2}s}}=\frac{1}{\Gamma(s)}.\int_0^1\frac{y^x(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{(1+y)^2};$$

unde subtractione facile habebimus

$$58.\quad \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{\operatorname{Cos}(s.\operatorname{ArcTang}\frac{u}{x})}{(x^2+u^2)^{\frac{1}{2}s}}\,.\,du$$
$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} - \frac{a}{(1+y)^2}\right) \cdot y^x (\log \frac{1}{y})^{s-1}\,dy.$$

Differentiemus hanc formulam respectu s tamquam variabilis, posteaque $s=1$ ponamus; tunc exsistente

$$\operatorname{ArcTang}\frac{u}{x} = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{ArcTang}\frac{x}{u}, \qquad Z'(1) = -C,$$

obtinebimus

$$59.\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{u\,du}{x^2+u^2} - xF(x) + \tfrac{1}{2}xW(x) \\ = -\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} - \frac{a}{(1+y)^2}\right) \cdot y^x \log(\log \frac{1}{y})\,dy \\ \quad + C\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{Sin} a}{1+2y\operatorname{Cos} a+y^2} - \frac{a}{(1+y)^2}\right) \cdot y^x \,.\, dy, \end{cases}$$

positis brevitatis causa

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{\operatorname{ArcTang}\frac{x}{u}}{\frac{x}{u}} \cdot \frac{dy}{x^2+u^2}$$
$$= \Theta \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{dy}{x^2+u^2}, \qquad (1 > \Theta > 0)$$
$$W(x) = \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{\log(x^2+u^2)\,dy}{x^2+u^2}.$$

Cum autem sit

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\Theta \cdot \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{u(e^{\pi u}-e^{-\pi u})} \cdot \frac{2u\,du}{x^2+u^2} + \Theta \int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{du}{x^2+u^2}$$
$$= M\int_0^1 \frac{2u\,du}{x^2+u^2} + \frac{\Theta}{x^2+\xi^2} \cdot \int_0^1 \frac{e^{au}-e^{-2au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\,.\,du$$
$$= M(\log(1+x^2) - \log x^2) + \frac{\Theta N}{x^2+\xi^2}$$

(ubi, quodcumque sit x, M et N numquam non finitum conservant valorem et ξ quantitas < 1 est), atque

$$W(x)=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{u(e^{\pi u}-e^{-\pi u})}\cdot\frac{\log(x^2+u^2).2u\,du}{x^2+u^2}+\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\cdot\frac{\log(x^2+u^2)dy}{x^2+u^2}$$

$$=M_1\int_0^\infty \frac{\log(x^2+u^2).2u.du}{x^2+u^2}+\frac{\log(x^2+\xi_1^2)}{x^2+\xi_1^2}\cdot\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\,du$$

$$=M_1[(\log(1+x^2))^2-(\log x^2)^2]+N.\frac{\log(x^2+\xi_1^2)}{x^2+\xi_1^2}$$

(ubi, quodcumque x sit, idem omnino de M_1 et ξ_1 valet, quod supra de M et ξ dictum est); facile concludi licet

$$\lim.xF(x)=0,\qquad \lim.xW(x)=0,\qquad [x=\infty],$$

unde ex (59.) habebimus, convergente x in nihilum,

$$\tfrac{1}{2}\pi\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\cdot\frac{du}{u}$$

$$=-\int_0^\infty\left(\frac{\operatorname{Sin}a}{1+2y\operatorname{Cos}a+y^2}-\frac{a}{(1+y)^2}\right)\log(\log\frac{1}{y})dy+C.\int_0^1\left(\frac{\operatorname{Sin}a}{1+2y\operatorname{Cos}a+y^2}-\frac{a}{(1+y)^2}\right)dy$$

seu

60. $$\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\cdot\frac{du}{u}=-\frac{2}{\pi}\int_0^1\left(\frac{\operatorname{Sin}a}{1+2y\operatorname{Cos}a+y^2}-\frac{a}{(1+y)^2}\right)\log(\log\frac{1}{y})dy,$$

exsistente

$$\int_0^1\left(\frac{\operatorname{Sin}a}{1+2y\operatorname{Cos}a+y^2}\right)-\frac{a}{(1+y)^2}\Big)dy=0.$$

Facimus

$$K=\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}\cdot\frac{du}{u};$$

differentiatione respectu a facta, habebimus

$$\frac{dK}{da}=\int_0^\infty \frac{e^{au}-e^{-au}-2}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}}.du=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{y^{\frac{a}{\pi}}+y^{-\frac{a}{\pi}}-2}{1-y^2}dy,$$

unde

61. $$\frac{dK}{da}=\frac{1}{2\pi}\{2Z'(\tfrac{1}{2})-Z'(\tfrac{1}{2}+\frac{a}{2\pi})-Z'(\tfrac{1}{2}-\frac{a}{2\pi}),$$

cum in genere sit*)

$$\int_0^1\frac{y^a-y^b}{1-y^2}dy=\tfrac{1}{2}Z'\tfrac{1}{2}(b+1)-\tfrac{1}{2}Z'\tfrac{1}{2}(a+1).$$

Ex formula vero (61.), integratione ab $a=0$ instituta, redundat

*) Vid. *Legendre Exerc. du Calc. Int.* Tom. II. pag. 156.

$$\int_0^1 \frac{e^{au}-e^{-au}-2au}{e^{\pi u}-e^{-\pi u}} \cdot \frac{du}{u} = \frac{a}{\pi} \cdot Z'(\tfrac{1}{2}) - \log \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{a}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{a}{2\pi})} \right\},$$

quod cum (**60.**) comparatum praebet

$$\textbf{62.} \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{Sin} a . \log(\log \frac{1}{y})\, dy}{1+2y \operatorname{Cos} a + y^2} = a \int_0^1 \frac{\log(\log \frac{1}{y})}{1+y^2} - \tfrac{1}{2} a Z'(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\pi \log \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{a}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{a}{2\pi})} \right\}.$$

Pro $a = \frac{1}{2}\pi$ beneficio formulae (**12.**) (prioris) obtinebimus

$$\int_0^1 \frac{\log(\log \frac{1}{y})\, dy}{(1+y)^2} = \tfrac{1}{2} Z'(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} \log 2\pi,$$

quod in (**62.**) ductum praebet denique

$$\textbf{63.} \quad \int_0^1 \frac{\log(\log \frac{1}{y})\, dy}{1+2y \operatorname{Cos} a + y^2} = \frac{\pi}{2 \operatorname{Sin} a} \cdot \log \left\{ \frac{(2\pi)^{\frac{a}{\pi}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}+\frac{a}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{a}{2\pi})} \right\};$$

quae nova formula admodum notanda videtur.

§. 8.

Si formula ($44\frac{1}{2}$) utrimque per $\log(\log \frac{1}{y})$ multiplicetur, integratione ab $y = 0$ ad $y = 1$ instituta, ex formula (**63.**) habebimus

$$\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia \int_0^1 y^{i-1} \log(\log \frac{1}{y})\, dy + (-1)^n \{\operatorname{Sin}(n+1)a \,.\, G(n) + \operatorname{Sin} na \,.\, G(n+1)\} = \tfrac{1}{2}\pi \log \left\{ \frac{(2\pi)^{\frac{a}{\pi}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}+\frac{a}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{a}{2\pi})} \right\},$$

posito brevitatis causa

$$G(n = \int_0^1 \frac{y^n \log(\log \frac{1}{y})\, dy}{1+2y \operatorname{Cos} a + y^2} = \Theta \int_0^1 y^n \log(\log \frac{1}{y})\, dy, \qquad (1 > \Theta > 0)$$

unde, exsistente

$$\int_0^1 y^{r-1} \log(\log \frac{1}{y})\, dy = -\frac{\log r + C}{r}$$

(ubi C est constans ille *Euleri* **0,577 216** ....), obtinebimus

$$\sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \cdot \frac{\operatorname{Sin} ia \log i}{i} + C \cdot \sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \frac{\operatorname{Sin} ia}{i}$$
$$+ (-1)^{n+1} \{\operatorname{Sin}(n+1)a \cdot G(n) + \operatorname{Sin} na \cdot G(n+1)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \log \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{a}{2\pi})} \right\} - \tfrac{1}{2} a \log 2\pi$$

et

$$G(n) = -\frac{\Theta}{n+1} \{\log(n+1) + C\}, \qquad (1 > \Theta > 0).$$

Cum autem facile inde appareat, esse

$$\lim G(n) = 0, \qquad [n = \infty]$$

fit omnino

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} S(-1)^{i-1} \cdot \frac{\operatorname{Sin} ia \cdot \log i}{i} + C \cdot \sum_{i=1}^{i=\infty} S(-1)^{i-1} \cdot \frac{\operatorname{Sin} ia}{i} = \tfrac{1}{2}\pi \log \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\pi})} \right\} - \tfrac{1}{2} a \log 2\pi,$$

unde, exsistente

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} S(-1)^{i-1} \cdot \frac{\operatorname{Sin} ia}{i} = \tfrac{1}{2} a, \qquad (a < \pi),$$

hanc denique notandam formulam habebimus:

64. $$\frac{\operatorname{Sin} a \cdot \log 1}{1} - \frac{\operatorname{Sin} 2a \cdot \log 2}{2} + \frac{\operatorname{Sin} 3a \cdot \log 3}{3} - \frac{\operatorname{Sin} 4a \cdot \log 4}{4} + \text{etc.}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \log \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{a}{2\pi})} \right\} - \tfrac{1}{2} a (C + \log 2\pi);$$

atque, si $\pi - a$ loco a ponitur:

65. $$\frac{\operatorname{Sin} a \cdot \log 1}{1} + \frac{\operatorname{Sin} 2a \cdot \log 2}{2} + \frac{\operatorname{Sin} 3a \cdot \log 3}{3} + \frac{\operatorname{Sin} 4a \cdot \log 4}{4} + \text{etc.}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \log \left\{ \frac{\Gamma(\frac{a}{2\pi})}{\Gamma(1 - \frac{a}{2\pi})} \right\} - \tfrac{1}{2}(\pi - a)(C + \log 2\pi).$$

Ex his duabus formulis, addendo, hanc tertiam obtinebimus:

66. $$\frac{\operatorname{Sin} a \cdot \log 1}{1} + \frac{\operatorname{Sin} 3a \cdot \log 3}{3} + \frac{\operatorname{Sin} 5a \cdot \log 5}{5} + \text{etc.}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi \log \left\{ \frac{\Gamma(\frac{a}{2\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{a}{2\pi})} \right\} - \tfrac{1}{4}\pi \left(C - \log \frac{2\pi}{\operatorname{Tang} \frac{1}{2} a} \right).$$

Ex. 1. Posito $a = \frac{1}{2}\pi$, fit

$$\frac{\log 1}{1} - \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 5}{5} - \frac{\log 7}{7} + \text{etc.} = \frac{\pi}{4}(\log \pi - C) - \pi \log \Gamma(\tfrac{3}{4})$$

atque inde

$$\frac{1.5^{\frac{1}{5}}.9^{\frac{1}{9}}.13^{\frac{1}{13}} \ldots.}{3^{\frac{1}{3}}.7^{\frac{1}{7}}.11^{\frac{1}{11}}.15^{\frac{1}{15}} \ldots.} = \left\{\frac{\pi e^{-C}}{(\Gamma(\frac{3}{4}))^4}\right\};$$

quod jam supra ivenimus.

Ex. 2. Posito $a = \frac{1}{3}\pi$, fit

$$\frac{\log 1}{1} - \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 4}{4} - \frac{\log 5}{5} + \frac{\log 7}{7} - \text{etc.} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \log\left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\right\} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}(C + \log 2\pi),$$

$$\frac{\log 1}{1} + \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 4}{4} - \frac{\log 5}{5} + \frac{\log 7}{7} + \text{etc.} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}(\log 2\pi - 2C) - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \log \Gamma(\tfrac{5}{6}),$$

$$\frac{\log 1}{1} - \frac{\log 5}{5} + \frac{\log 7}{7} - \frac{\log 11}{11} + \frac{\log 13}{13} - \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\{\log \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - C - 2\log[\Gamma(\tfrac{5}{6}) \,.\, \Gamma(\tfrac{2}{3})],$$

(ex quibus formulis primam et tertiam jam supra invenimus), atque inde

$$\frac{1.4^{\frac{1}{4}}.7^{\frac{1}{7}}.10^{\frac{1}{10}} \ldots.}{2^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{5}}.8_{8}.11^{\frac{1}{11}} \ldots.} = \left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{3})e^{-\frac{1}{3}C}}{\Gamma(\frac{2}{3}).(2\pi)^{\frac{1}{3}}}\right\}^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}},$$

$$\frac{1.2^{\frac{1}{2}}.7^{\frac{1}{7}}.8^{\frac{1}{8}} \ldots.}{4^{\frac{1}{4}}.5^{\frac{1}{5}}.10^{\frac{1}{10}}.11^{\frac{1}{11}} \ldots.} = \left\{\frac{(2\pi)^{\frac{1}{3}}.e^{-\frac{2}{3}C}}{(\Gamma(\frac{5}{6}))^2}\right\}^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}},$$

$$\frac{1.7^{\frac{1}{7}}.13^{\frac{1}{13}}.19^{\frac{1}{19}} \ldots.}{5^{\frac{1}{5}}.11^{\frac{1}{11}}.17^{\frac{1}{17}}.23^{\frac{1}{23}} \ldots.} = \left\{\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}C}}{3^{\frac{1}{4}}.\Gamma(\frac{2}{3})\,\Gamma(\frac{5}{6})}\right\}^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Ex. 3. Posito in (66.) $a = \frac{1}{4}\pi$, fit utique

$$\frac{\log 1}{1} + \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 5}{5} - \frac{\log 7}{7} - \text{etc.} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left\{\frac{2^{\frac{1}{4}}.\Gamma(\frac{1}{8}).\Gamma(\frac{3}{8})}{e^{-\frac{1}{2}C}.(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\right\},$$

atque inde

$$\frac{1.3^{\frac{1}{3}}.9^{\frac{1}{9}}.11^{\frac{1}{11}} \ldots.}{5^{\frac{1}{5}}.7^{\frac{1}{7}}.13^{\frac{1}{13}}.15^{\frac{1}{15}} \ldots.} = \left\{\frac{2^{\frac{1}{4}}.\Gamma(\frac{1}{8}).\Gamma(\frac{3}{8})}{e^{-\frac{1}{2}C}.(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\right\}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

§. 2.

Revocemus jam formulum (1.) (eam etiam pro $x = 0$ valere demonstravimus), quam utrimque per

$$\frac{e^{au} - e^{-au}}{e^{\pi u} - e^{-\pi u}} \,.\, du$$

multiplicemus; tunc integratione inter $u = 0$ et $u = \infty$ facta, fit

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} \log(x^2+u^2)\,du = 2\int_0^\infty \frac{dz}{z} \cdot \int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} (e^{-z} - e^{-xz} \operatorname{Cos} uz)\,du,$$

unde beneficio notae formulae*) sequitur

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} \log(x^2+u^2)\,du = \int_0^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{z} \left(\operatorname{Sec} \tfrac{1}{2}a - \frac{2e^{-(x-\frac{1}{2})z}(1+e^{-z})\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}{1+2e^{-z}\operatorname{Cos}a+e^{-2z}}\right),$$

sive, posito

$$e^{-z} = y, \qquad \text{unde} \qquad z = \log\left(\frac{1}{y}\right), \qquad e^{-z}dz = -dy:$$

67. $$\frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} \cdot \log(x^2+u^2) = \int_0^1 \left(\operatorname{Sec}.\tfrac{1}{2}a - \frac{2y^{x-1}(1+y)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}{1+2y\operatorname{Cos}a+y^2}\right) \cdot \frac{dy}{\log\frac{1}{y}}$$

$$(\mathrm{a} < \pi).$$

Appellemus

68. $$\mathfrak{L}(a, x) = \int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} \cdot \log(x^2+u^2)\,du.$$

Si in formula (2.) $x + \frac{1}{2}$ et $x - \frac{1}{2}$ loco x substituimus, addendo habebimus hanc simplicem inter $L(a, x)$ et $\mathfrak{L}(a, x)$ correlationem:

69. $$2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}a \cdot \mathfrak{L}(a, x) = L(a, x+\tfrac{1}{2}) + L(a, x-\tfrac{1}{2}).$$

His cognitis, si a est ad π in ratione qualibet commensurabili, i. e. pro $a = \frac{m\pi}{n}$, facile pro functione $\mathfrak{L}(a, x)$ invenire possumus formulas, quae cum iis, quae supra pro $L(a, x)$ proposuimus, analogae sunt. Etenim si ponitur in (7.) $x + \frac{1}{2}$ et $x - \frac{1}{2}$ loco x, inde addendo habebimus

$$L(a, x+\tfrac{1}{2}) + L(a, x-\tfrac{1}{2})$$

$$= 2\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a \log 2n + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia \log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{x+n+i+\frac{1}{2}}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i+\frac{1}{2}}{2n}\right)}\right\}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia \log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{x+n+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}\right\}$$

$$= 2\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a \log 2n + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} (\operatorname{Sin} ia - \operatorname{Sin}(i-1)a) \log\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{x+n+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}\right\}$$

$$(m + n = \text{num. imp.})$$

---

*) Vid. *Exerc. d. Calc. Intégr. par Legendre.* Tom. II. pag. 186.

$$L(a, x+\tfrac{1}{2}) + L(a, x-\tfrac{1}{2})$$

$$= 2\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a \log . n + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{i-1} \mathrm{Sin}\, ia \log \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{x+n-i+\frac{1}{2}}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x-i-\frac{1}{2}}{n}\right)} \right\}$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{i-1} \mathrm{Sin}\, ia \log \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{x+n-i-\frac{1}{2}}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i+\frac{1}{2}}{n}\right)} \right\}$$

$$= 2\,\mathrm{Tang}\,\tfrac{1}{2}a . \log n + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{i-1} (\mathrm{Sin}\, ia - \mathrm{Sin}\,(i-1)a) \log \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{x+n-i+\frac{1}{2}}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i-\frac{1}{2}}{n}\right)} \right\}$$

$$(m + n = \text{num. par.}),$$

cum sit

$$\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{i-1} \mathrm{Sin}\, ia \log \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{x+n-i-\frac{1}{2}}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i+\frac{1}{2}}{n}\right)} \right\} = -\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{i-1} \mathrm{Sin}\,(i-1)a \log \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{x+n-i-\frac{1}{2}}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i+\frac{1}{2}}{n}\right)} \right\}$$

Hinc autem, divisione per $2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}a$ facta, quia est in genere

$$\mathrm{Sin}\, ia - \mathrm{Sin}\,(i-1)a = 2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{Cos}\,(i-\tfrac{1}{2})a,$$

beneficio formulae (69.) colligitur

70.
$$\begin{cases} \mathfrak{L}(a, x) = \mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}a \log 2n + 2\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} \mathrm{Cos}\,(i-\frac{1}{2})a \log \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{x+n+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)} \right\} \\ (m + n = \text{num. imp.}) \\ \mathfrak{L}(a, x) = \mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}a \log n + 2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{i-1} \mathrm{Cos}\,(i-\frac{1}{2})a \log \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{x+n-i+\frac{1}{2}}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i-\frac{1}{2}}{n}\right)} \right\}. \end{cases}$$

§. 10.

Si in formulis (70.) pro $x = 0$ faciamus

$$e^{\frac{\pi u}{n}} = y, \quad \text{unde} \quad u = \frac{n}{\pi} \log y,$$

habebimus utique, exsistente $a = \frac{m\pi}{n}$,

$$\int_1^\infty \frac{y^{m-1}+y^{-m-1}}{y^n+y^{-n}} \left\{\log\frac{n}{\pi} + \log(\log y)\right\} dy$$

$$= \frac{\pi}{2n} \operatorname{Sec}\frac{m\pi}{2n} \log 2n + \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})\frac{m\pi}{n} \cdot \log\left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i-\frac{1}{2}}{2n})}{\Gamma(\frac{i-\frac{1}{2}}{2n})}\right\}$$

$$(m+n = \text{num. imp.})$$

$$\int_1^\infty \frac{y^{m-1}+y^{-m-1}}{y^n+y^{-n}} \left\{\log\frac{n}{\pi} + \log(\log y)\right\} dy$$

$$= \frac{\pi}{2n} \operatorname{Sec}\frac{m\pi}{2n} \log n + \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})\frac{m\pi}{n} \cdot \log\left\{\frac{\Gamma(1-\frac{i-\frac{1}{2}}{n})}{\Gamma(\frac{i-\frac{1}{2}}{n})}\right\}$$

$$(m+n = \text{num. par}).$$

Hinc vero, cum sit

$$\int_1^\infty \frac{y^{m-1}+y^{-m-1}}{y^n+y^{-n}} dy = \frac{\pi}{2n} \operatorname{Sec}\frac{m\pi}{2n},$$

sequitur

71.
$$\int_1^\infty \frac{y^{m-1}+y^{-m-1}}{y^n+y^{-n}} \cdot \log(\log y)\, dy$$

$$= \frac{\pi}{2n} \operatorname{Sec} \cdot \frac{m\pi}{2n} \log 2\pi + \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})\frac{m\pi}{n} \cdot \log\left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{i-\frac{1}{2}}{2n})}{\Gamma(\frac{i-\frac{1}{2}}{2n})}\right\}$$

$$(m+n = \text{num. imp.})$$

$$\int_1^\infty \frac{y^{m-1}+y^{-m-1}}{y^n+y^{-n}} \cdot \log(\log y)\, dy$$

$$= \frac{\pi}{2n} \operatorname{Sec} \frac{m\pi}{2n} \log \pi + \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})\frac{m\pi}{n} \cdot \log\left\{\frac{\Gamma(1-\frac{i-\frac{1}{2}}{n})}{\Gamma(\frac{i-\frac{1}{2}}{n})}\right\}$$

$$(m+n = \text{num. par}).$$

Posito in posteriori $m = 1$ et $n = 3$, mutato y^2 in y, habebimus post reductionem quandam facillimam,

72. $$\int_1^\infty \frac{\log(\log y)\, dy}{1-y+y^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (\tfrac{5}{6}\log 2\pi - \log\Gamma(\tfrac{1}{6})).$$

§. 11.

In suppositione $a = \frac{m\pi}{n}$, exsistente $m+n$ numero integro impari, constat

$$\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a = \sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \operatorname{Sin} ia.$$

atque, posito $i-1$ loco i,

$$\operatorname{Tang}\tfrac{1}{2}a = -\sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \operatorname{Sin}(i-1)a;$$

unde addendo, divisione per $2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a$ facta, fit omnino

$$73. \qquad \operatorname{Sec}\tfrac{1}{2}a = \sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a.$$

Quocirca prior formularum (70.) ita etiam exhiberi potest:

$$74. \qquad \mathfrak{L}(a,x) = 2\sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a \log\left\{\frac{(2n)^{\frac{1}{2}}.\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}\right\}$$

$$(m+n = \text{num. imp.}).$$

Ponatur hic $x+n$ loco x; fit, utique addendo,

$$75. \qquad \mathfrak{L}(a,x+n)+\mathfrak{L}(a,x) = 2\sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a \log(x+i-\tfrac{1}{2})$$

$$(m+n = \text{num. imp.}).$$

Ceterum ex eâdem formula, si $n-x$ loco x substituitur, similiter addendo prodit:

$$\mathfrak{L}(a,x)+\mathfrak{L}(a,n-x) = 2\sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a \,.\log\left\{\frac{(2n)^{\frac{1}{2}}.\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{x+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}\right\}$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a \,.\log\left\{\frac{(2n)^{\frac{1}{2}}.\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n+i-x-\frac{1}{2}}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+i-x-\frac{1}{2}}{2n}\right)}\right\},$$

sive, cum sit

$$\sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a \,.\log\left\{\frac{(2n)^{\frac{1}{2}}.\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n+i-x-\frac{1}{2}}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+i-x-\frac{1}{2}}{2n}\right)}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} S(-1)^{i-1} \operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a \,.\log\left\{\frac{(2n)^{\frac{1}{2}}.\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{x+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{x+i-\frac{1}{2}}{2n}\right)}\right\},$$

etiam, respectu ad cognitam functionis Γ proprietatem (eodem modo ac supra ad formulae (22.) deductionem):

$$76.\quad \mathfrak{L}(a,x)+\mathfrak{L}(a,n-x)=2\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i-1}\operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a\,.\log\left[(i-x-\tfrac{1}{2})\,.\operatorname{Cotang}\frac{(i-1-\frac{1}{2})\pi}{2n}\right]$$

$$(m+n=\text{num. imp.})$$

E posteriore etiam formularum (70.) relationes analogas derivare possumus. Etenim, substituto ibi $x+n$ pro x, subtrahendo erit

$$77.\quad \mathfrak{L}(a,x+n)-\mathfrak{L}(a,x)=2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{i-1}\operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a\,.\log\left\{\frac{x+n+\frac{1}{2}-i}{x+i-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$(m+n=\text{num. par}).$$

Atque si in eadem formula $n-x$ loco x ponitur, fit etiam subtrahendo, calculo facto,

$$78.\quad \mathfrak{L}(a,x)-\mathfrak{L}(a,n-x)=2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{i-1}\operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a\,.\log\left\{\frac{x+\frac{1}{2}-i}{n-x-i+\frac{1}{2}}\,.\,\frac{\operatorname{Sin}\frac{(x+i-\frac{1}{2})\pi}{n}}{\operatorname{Sin}\frac{(x-i+\frac{1}{2})\pi}{n}}\right\}$$

$$(m+n=\text{num. par}).$$

E formulis (75. et 77.), una cum (76. et 78.) conjunctis, sequitur, ut, sive impar, sive par sit $m+n$, functionem $\mathfrak{L}(a,x)$ pro quovis ipsius x valore cognitam habeamus, si modo per totam periodum ab $x=0$ ad $x=\frac{1}{2}n$ cognita sit. Si in (76.) $x=\frac{1}{2}n$ ponitur, prodit

$$79.\quad \mathfrak{L}(a,\tfrac{1}{2}n)=\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i-1}\operatorname{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a\,\log\left\{(\tfrac{1}{2}(n+1)-i)\,.\operatorname{Cotang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{(i-\frac{1}{2})\,.\,\pi}{2n}\right)\right\}$$

$$(m+n=\text{num. imp.}),$$

unde, si simul formulam (75.) consideras, colligitur, exsistente $m+n$ numero impari, $\mathfrak{L}(a,x)$ pro $x=\frac{1}{2}(2i+1)n$ per logarithmos et functiones circulares numquam non exprimi posse. Haec formula (79.) pro $i=\frac{1}{2}(n+1)$ expressionem $\log 0\,.\,\infty$ praesentat; sed verus ejus valor facile invenitus est $\log\left(\frac{2n}{\pi}\right)$.

Ponamus jam successive loco x:

$$x,\quad x+\frac{2n}{r},\quad x+\frac{4n}{r},\quad x+\frac{6n}{r},\ \ldots\ x+\frac{(r-1)\,.\,2n}{r},$$

in priori formularum (70.), et

$$x,\quad x+\frac{n}{r},\quad x+\frac{2n}{r},\quad x+\frac{3n}{r},\ \ldots\ x+\frac{(r-1)\,.\,n}{r}$$

in posteriori; eodem modo ac supra in §. 3. e cognitae functionis Γ proprietate obtinebimus

$$80.\quad \begin{cases} \mathfrak{L}(a,x)+\mathfrak{L}(a,x+\frac{2n}{r})+\mathfrak{L}(a,x+\frac{4n}{r})+\ldots.+\mathfrak{L}(a,x+\frac{(r-1).2n}{r}) \\ = r\,\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}a\,\log.2n+2\sum_{i=1}^{i=n}S(-1)^{i-1}\,\mathrm{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a\,.\,\log\left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}r+\frac{r(x+i-\frac{1}{2})}{n}}{r^{\frac{1}{2}r}\,\Gamma(\frac{r(x+i-\frac{1}{2})}{2n})}\right\} \\ (m+n=\text{num. imp.}) \\ \mathfrak{L}(a,x)+\mathfrak{L}(a,x+\frac{n}{r})+\mathfrak{L}(a,x+\frac{2n}{r})+\ldots.\,\mathfrak{L}(a,x+\frac{(r-1).n}{r}) \\ = r\,\mathrm{Sec}\,\frac{1}{2}a\,.\log n+2\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)}S(-1)^{i-1}\,\mathrm{Cos}(i-\tfrac{1}{2})a.\log\left\{\frac{\Gamma(r+\frac{r(x-i+\frac{1}{2})}{n})}{r^{r-\frac{r(2i-1)}{n}}.\Gamma(\frac{r(x+i-\frac{1}{2})}{n})}\right\} \end{cases}$$

unde apparet, priorem harum summarum, cum r numerus par est, finite semper per logarithmos posse signari.

§. 12.

Multiplicemus formulam (27.) utrimque per

$$\frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\,.\,du;$$

tunc, integratione inter $u=0$ et $u=\infty$ instituta, fit

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\,.\,\frac{\mathrm{Cos}(s.\mathrm{ArcTang}\frac{u}{x})\,du}{(x^2+u^2)^{\frac{1}{2}s}}$$
$$=\frac{1}{\Gamma(s)}\,.\int_0^\infty e^{-xz}\,.\,z^{s-1}dz\int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\,\mathrm{Cos}\,uz\,.\,du$$
$$=\frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a}{\Gamma(s)}\,.\int_0^\infty \frac{z^{s-1}\,.\,e^{-(x-\frac{1}{2})}\,(1+e^{-z})\,.\,e^{-z}\,dz}{1+2e^{-z}\,\mathrm{Cos}\,a+e^{-2z}}$$

unde, si in dextero membro $e^{-z}=y$ ponimus, prodit

$$81.\quad \int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\,.\,\frac{\mathrm{Cos}\,(s.\mathrm{ArcTang}\,\frac{u}{x})}{(x^2+u^2)^{\frac{1}{2}s}}\,du=\frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a}{\Gamma(s)}\,.\int_0^1 \frac{y^{x-\frac{1}{2}}(1+y)\,(\log\frac{1}{y})^{s-1}\,dy}{1+2y\,\mathrm{Cos}\,a+y^2},$$

et pro $x=0$ (si modo $1>s>0$) mutato y in y^2,

$$82.\quad \int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\,.\,\frac{du}{u^s}=\frac{2^s\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\,.\int_0^1 \frac{(1+y^2)\,(\log\frac{1}{y})^{s-1}\,dy}{1+2y\,\mathrm{Cos}\,a+y^2}.$$

Ex hac vero formula, si $a=\frac{m\pi}{n}$ et $e^{-\frac{\pi u}{n}}=y$ ponitur, transformatione peracta, fit

$$83.\quad \int_0^1 \frac{y^{m-1}+y^{-m-1}}{y^n+y^{-n}} \cdot \frac{dy}{(\log\frac{1}{y})^s} = \frac{2.\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1-s}\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{2n}}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)} \cdot \int_0^1 \frac{(1+y^2)(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1+2y^2\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{n}+y^4}.$$

Posito $m=1$ et $n=2$, si brevitatis causa appellamus

$$84.\quad Q(s)=\int_0^1 \frac{1+y^2}{1+y^4}\cdot(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy,$$

hanc inter functionem $Q(s)$ et ejus complementariam relationem habebimus:

$$85.\quad Q(1-s)=\frac{2.\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1-s}.\operatorname{Sin}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\cdot Q(s).$$

Posito porro in (83.) $m=1$ et $m=3$, reductionibus factis, provenit

$$86.\quad \int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{-s}dy}{1-y+y^2} = \frac{(\frac{2}{3}\pi)^{1-s}\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\cdot\int_0^1 \frac{2(1+y^2)}{1+y^2+y^4}\cdot(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy.$$

Cum autem sit

$$87.\quad \int_0^1 \frac{2(1+y^2)}{1+y^2+y^4}\cdot(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy=\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1+y+y^2}+\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1-y+y^2},$$

atque etiam

$$\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1+y+y^2}=\int_0^1 \frac{2^{2s}\,.\,y^3(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1+y^4+y^8}$$

$$=2^{2s-2}\int_0^1 \frac{2y(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1-y^2+y^4}-2^{2s-2}\int_0^1 \frac{2y(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1+y^2+y^4},$$

i. e.

$$(1+2^{s-1})\cdot\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1+y+y^2}=2^{s-1}\cdot\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1-y+y^2};$$

fit etiam ex (87.),

$$\int_0^1 \frac{2(1+y^2)}{1+y^2+y^4}\cdot(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy=\frac{1+2^s}{1+2^{s-1}}\cdot\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1-y+y^2},$$

quod in (86.) ductam, posito brevitatis causa

$$88.\quad R(s)=\int_0^1 \frac{(\log\frac{1}{y})^{s-1}}{1-y+y^2},$$

hanc notandam relationem praebet:

$$89.\quad R(1-s)=\frac{(\frac{1}{3}\pi)^{1-s}\operatorname{Sin}\frac{1}{3}\pi}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\cdot\frac{1+2^s}{1+2^{s-1}}\cdot R(s).$$

Ex formulis (85. et 89.) logarithmando obtinebimus

$$\log Q(1-s) = \log 2 \operatorname{Sin} \tfrac{1}{4}\pi + (1-s)\log \tfrac{1}{4}\pi - \log \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}s\pi - \log \Gamma(s) + \log Q(s),$$

$$\log R(1-s) = (1-s)\log \tfrac{1}{3}\pi + \log \operatorname{Sin} \tfrac{1}{3}\pi + \log (1+2^s) - \log \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}s\pi - \log \Gamma(s) - \log(1+2^{s-1}) + \log Q(s),$$

unde, positis brevitatis causa

$$M(s) = \frac{dQ(s)}{ds} = \int_0^1 \frac{1+y^2}{1+y^4} \cdot \log(\log \frac{1}{y}) \cdot (\log \frac{1}{y})^{s-1} dy \quad \text{et}$$

$$N(s) = \frac{dR(s)}{ds} = \int_0^1 \frac{\log(\log \frac{1}{y}) \cdot (\log \frac{1}{y})^{s-1} dy}{1-y+y^2},$$

differentiando habebimus

90.
$$\begin{cases} \dfrac{M(s)}{Q(s)} + \dfrac{M(1-s)}{Q(1-s)} = \log \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2}s\pi + Z'(s) \quad \text{et} \\ \dfrac{N(s)}{R(s)} + \dfrac{N(1-s)}{R(1-s)} = \log \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{Tang} \tfrac{1}{2}s\pi + Z'(s) - \dfrac{\log 2}{(1+2^s)(1+2^{1-s})}. \end{cases}$$

Supponamus $s = \frac{1}{2}$; tunc erit

$$\int_0^1 \frac{1+y^2}{1+y^4} \cdot \frac{\log(\log \frac{1}{y})\, dy}{\sqrt{(\log \frac{1}{y})}} = \tfrac{1}{2}(\log \frac{\pi}{16} - \tfrac{1}{2}\pi - C) \cdot \int_0^1 \frac{1+y^2}{1+y^4} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(\log \frac{1}{y})}},$$

$$\int_0^1 \frac{\log(\log \frac{1}{y})\, dy}{1-y+y^2} = \tfrac{1}{2}(\log \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{2}\pi - C - (5-2\sqrt{2})\log 2) \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+y+y^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(\log \frac{1}{y})}},$$

seu, ponendo $\log \frac{1}{y} = x$:

91.
$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}} \cdot \frac{\log x \,.\, dx}{\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}(\log \frac{\pi}{16} - \tfrac{1}{2}\pi - C) \cdot \int_0^\infty \frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{e^x-1+e^{-x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}(\log \tfrac{1}{3}\pi - \tfrac{1}{2}\pi - C - (5-2\sqrt{2})\log 2) \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x}-1+e^{-2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, \end{cases}$$

quae quidem ejusdem omnino generis sunt, ac formulae (38.).

Ex his formulis analogâ omnino methodo, qua ad formulas (42.) inveniendas usi sumus, has duas aeque notandas relationes deducere licet:

92.
$$\begin{cases} \dfrac{\log 1}{\sqrt{1}} + \dfrac{\log 3}{\sqrt{3}} - \dfrac{\log 5}{\sqrt{5}} - \dfrac{\log 7}{\sqrt{7}} + \dfrac{\log 9}{\sqrt{9}} + \text{etc.} \\ = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - C - \log \pi)\left\{\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{7}} + \dfrac{1}{\sqrt{9}} + \text{etc.}\right\} \quad \text{et} \\ \dfrac{\log 1}{\sqrt{1}} + \dfrac{\log 2}{\sqrt{2}} - \dfrac{\log 4}{\sqrt{4}} - \dfrac{\log 5}{\sqrt{5}} + \dfrac{\log 7}{\sqrt{7}} + \dfrac{\log 8}{\sqrt{8}} - \dfrac{\log 10}{\sqrt{10}} - \text{etc.} \\ = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - C - 2\sqrt{2}\log 2 - \log \tfrac{\pi}{6})\left\{\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} - \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}} + \dfrac{1}{\sqrt{8}} - \text{etc.}\right\} \end{cases}$$

§. 13.

Si

$$\frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}$$

in seriem evolvimus, fit utique identice:

$$\frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} = \mathbf{S}_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i\,[e^{-[(2i+1)\pi-a]u} + e^{-[(2i+1)\pi+a]u}] + \frac{(-1)^n e^{-2n\pi u}(e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}},$$

unde

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\cdot\frac{du}{u^s}$$

$$= \Gamma(1-s)\,.\,\mathbf{S}_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i\,[\frac{1}{((2i+1)\pi-a)^{1-s}} + \frac{1}{((2i+1)\pi+a)^{1-s}}] + (-1)^n.\,\varphi_1(n),$$

ubi brevitatis causa posuimus

$$\varphi_1(n) = \int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\cdot\frac{e^{-2n\pi u}\,du}{u^s} = E\,.\int_0^\infty \frac{e^{-2n\pi u}\,du}{u^s} = \frac{M\Gamma(1-s)}{(2n\pi)^{1-s}},$$

(exsistente E quantitate quadam finita); atque, cum evidenter sit

$$\lim \varphi(n) = 0 \qquad [n=\infty],$$

etiam

$$\mathbf{93.}\quad \int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\cdot\frac{du}{u^s} = \Gamma(1-s)\,.\,\mathbf{S}_{i=0}^{i=\infty}(-1)^i[\frac{1}{((2i+1)\pi-a)^{1-s}} - \frac{1}{((2i+1)\pi+a)^{1-s}}].$$

Jam vero exsistente

$$\frac{(1+y^2)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}{1+2y^2\operatorname{Cos}a+y^4} = \mathbf{S}_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i\,.\,y^{2i}\,.\operatorname{Cos}(i+\tfrac{1}{2})a + (-1)^n\,.\,y^{2n}\,.\,\frac{\operatorname{Cos}(n+\frac{1}{2})a+y^2\operatorname{Cos}(n-\frac{1}{2})a}{1+2y^2\operatorname{Cos}a+y^4},$$

habebimus etiam

$$\int_0^1 \frac{(1-y^2)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}{1+2y^2\operatorname{Cos}a+y^4}\cdot\frac{dy}{(\log\frac{1}{y})^{1-s}}$$

$$= \Gamma(s).\,\mathbf{S}_{i=1}^{i=n}(-1)^i\,.\,\frac{\operatorname{Cos}(i+\frac{1}{2})a}{(2i+1)^s} + (1)^n(p(n)\operatorname{Cos}(n+\tfrac{1}{2})a + p(n+1)\operatorname{Cos}(n-\tfrac{1}{2})a),$$

posito brevitatis causa

$$p(n) = \int_0^1 \frac{y^{2n}.(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy}{1+2y^2\operatorname{Cos}a+y^4} = \Theta\,.\int_0^1 y^{2n}(\log\frac{1}{y})^{s-1}dy = \frac{\Theta\,.\,\Gamma(s)}{(2n+1)^s} \quad (1>\Theta>0).$$

Manifestum igitur est

$$\lim p(n) = 0 \qquad [n=\infty],$$

unde fit utique

$$94.\qquad \int_0^1 \frac{(1+y^2)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}{1+2y^2\operatorname{Cos}a+y^4}\cdot\frac{dy}{\left(\log\frac{1}{y}\right)^{1-s}} = \Gamma(s)\,.\sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)^i\,.\,\frac{\operatorname{Cos}(i+\frac{1}{2})a}{(2i+1)^s}\,.$$

Valoribus vero, quos formulae (93. et 94.) praebent, in (82.) substitutis, si s in $1-s$ mutatur, prodit,

$$95.\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{(\pi-a)^s}+\frac{1}{(\pi+a)^s}-\frac{1}{(3\pi-a)^s}-\frac{1}{(3\pi+a)^s}+\frac{1}{(5\pi-a)^s}+\frac{1}{(5\pi+a)^s}-\text{etc.}\\ &=\frac{2^{1-s}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}a}{1^{1-s}}-\frac{\operatorname{Cos}\frac{3}{2}a}{3^{1-s}}+\frac{\operatorname{Cos}\frac{5}{2}a}{5^{1-s}}-\frac{\operatorname{Cos}\frac{7}{2}a}{7^{1-s}}+\frac{\operatorname{Cos}\frac{9}{2}a}{9^{1-s}}-\text{etc.}\right\}\end{aligned}\right.$$

et si $\pi-a$ loco a ponitur:

$$96.\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a^s}+\frac{1}{(2\pi-a)^s}-\frac{1}{(2\pi+a)^s}-\frac{1}{(4\pi-a)^s}+\frac{1}{(4\pi+a)^s}+\frac{1}{(6\pi-a)^s}-\text{etc.}\\ &=\frac{2^{1-s}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi\;\Gamma(s)}\left\{\frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}a}{1^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}\frac{3}{2}a}{3^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}\frac{5}{2}a}{5^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}\frac{7}{2}a}{7^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}\frac{9}{2}a}{9^{1-s}}+\text{etc.}\right\}\end{aligned}\right.$$

atque si $a=\frac{m\pi}{n}$ ($m<n$ num. integr.) supponamus:

$$97.\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{(n-m)^s}+\frac{1}{(n+m)^s}-\frac{1}{(3n-m)^s}-\frac{1}{(3n+m)^s}+\frac{1}{(5n-m)^s}+\frac{1}{(5n+m)^s}-\text{etc.}\\ &=\frac{2.\left(\frac{\pi}{2n}\right)^s}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\cdot\left\{\frac{\operatorname{Cos}\frac{m\pi}{2n}}{1^{1-s}}-\frac{\operatorname{Cos}\frac{3m\pi}{2n}}{3^{1-s}}+\frac{\operatorname{Cos}\frac{5m\pi}{2n}}{5^{1-s}}-\frac{\operatorname{Cos}\frac{7m\pi}{2n}}{7^{1-s}}+\text{etc.}\right\}\\ &\frac{1}{m^s}+\frac{1}{(2n-m)^s}-\frac{1}{(2n+m)^s}-\frac{1}{(4n-m)^s}+\frac{1}{(4n+m)^s}+\frac{1}{(6n-m)^s}-\text{etc.}\\ &=\frac{2.\left(\frac{\pi}{2n}\right)^s}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\left\{\frac{\operatorname{Sin}\frac{m\pi}{2n}}{1^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}\frac{3m\pi}{2n}}{3^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}\frac{5m\pi}{2n}}{5^{1-s}}+\frac{\operatorname{Sin}\frac{7m\pi}{2n}}{7^{1-s}}+\text{etc.}\right\}\end{aligned}\right.$$

Ex. 1. Posito $m=1$, $n=2$, fit

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{11^s}-\text{etc.}$$

$$=\frac{2.\left(\frac{\pi}{4}\right)^s.\operatorname{Sin}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi\,.\,\Gamma(s)}\left\{\frac{1}{1^{1-s}}+\frac{1}{3^{1-s}}-\frac{1}{5^{1-s}}-\frac{1}{7^{1-s}}+\text{etc.}\right\};$$

quod jam supra in (54.) invenimus.

Ex. 2. Posito $m=1$, $n=3$, prior formularum (97.), factis quibusdam facillimis reductionibus, formulas (53.) reddit; e posteriore vero, positis brevitatis causa

$$T(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}-\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}-\text{etc.}$$

$$W(s)=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}-\frac{1}{11^s}+\text{etc.}$$

fit

$$T(s) = \frac{2\left(\frac{\pi}{6}\right)^s}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi \,.\, \Gamma(s)} \{\tfrac{1}{2}T(1-s) + 3^{s-1}W(1-s)\},$$

unde, cum sit

$$W(s) = T(s) - 3^{-s}W(s),$$

habebimus

$$98. \qquad T(s) = \frac{(\frac{1}{2}\pi)^s}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}s\pi \,.\, \Gamma(s)} \cdot \frac{1+3^{-s}}{1+3^{s-1}} \,.\, T(1-s).$$

§. 14.

Differentiemus jam formulam (93.) respectu s tamquam variabilis, tunc erit

$$\int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} \,.\, u^{-s} \log u \,.\, du$$

$$= Z'(1-s) \,.\, \int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} \cdot \frac{du}{u^s} - \Gamma(1-s) \,.\, \mathop{\mathbf{S}}_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i \left[\frac{\log((2i+1)\pi-a)}{((2i+1)\pi-a)^{1-s}} + \frac{\log((2i+1)\pi+a)}{((2i+1)\pi+a)^{1-s}}\right],$$

et pro $s = 0$, exsistente $Z'(1) = -C$ et

$$99. \qquad \int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} \,.\, du = \tfrac{1}{2}\operatorname{Sec} a,$$

habebimus

$$\mathop{\mathbf{S}}_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i \left[\frac{\log((2i+1)\pi-a)}{(2i+1)\pi-a} - \frac{\log((2i+1)\pi+a)}{(2i+1)\pi+a}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}C \operatorname{Sec} \tfrac{1}{2}a - \int_0^\infty \frac{e^{au}+e^{-au}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} \log u \,.\, du.$$

Ubicumque vero a est ad π in ratione commensurabili, integralia in dextero membro valorem formulae (70.) (pro $x = 0$) praebent. Sit igitur $a = \frac{m\pi}{n}$; tunc obtinebimus

$$\frac{n}{\pi} \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i \left[\frac{\log((2i+1)n-m)}{(2i+1)n-m} - \frac{\log((2i+1)n+m)}{(2i+1)n+m}\right]$$

$$+ \log\frac{\pi}{n} \cdot \mathop{\mathbf{S}}_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i \left[\frac{1}{(2i+1)\pi - \frac{m\pi}{n}} + \frac{1}{(2i+1)\pi + \frac{m\pi}{n}}\right]$$

$$= -\tfrac{1}{2}C \,.\, \operatorname{Sec} \,.\, \frac{m\pi}{2n} - \int_0^\infty \frac{e^{\frac{m\pi}{n}\,.\,u} + e^{-\frac{m\pi}{n}\,.\,u}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}} \,.\, \log u \,.\, du,$$

unde, cum sit ex (93.) (pro $s = 0$)

$$\sum_{i=0}^{i=\infty}(-1)^i\left[\frac{1}{(2i+1)\pi-\frac{m\pi}{n}}+\frac{1}{(2i+1)\pi+\frac{m\pi}{n}}\right]=\int_0^\infty \frac{e^{\frac{m\pi}{n}\cdot u}+e^{-\frac{m\pi}{n}\cdot u}}{e^{\pi u}+e^{-\pi u}}\cdot du=\tfrac{1}{2}\operatorname{Sec}\frac{m\pi}{2n},$$

fit denique ex formulis (70.) citatis:

100.
$$\begin{cases}\dfrac{\log(n-m)}{n-m}+\dfrac{\log(n+m)}{n+m}-\dfrac{\log(3n-m)}{3n-m}-\dfrac{\log(3n+m)}{3n+m}+\dfrac{\log(5n-m)}{5n-m}\\ \qquad+\dfrac{\log(5n+m)}{5n+m}-\text{etc.}\\ =-\dfrac{\pi}{2n}\operatorname{Sec}\dfrac{m\pi}{2n}(C+\log 2\pi)-\dfrac{\pi}{n}\cdot\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{i-1}\cdot\operatorname{Cos}(2i-1)\cdot\dfrac{m\pi}{2n}\cdot\log\left\{\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i-\frac{1}{2}}{2n})}{\Gamma(\frac{i-\frac{1}{2}}{2n})}\right\}\\ \qquad(m+n=\text{num. imp.})\\ \dfrac{\log(n-m)}{n-m}+\dfrac{\log(n+m)}{n+m}-\dfrac{\log(3n-m)}{3n-m}-\dfrac{\log(3n+m)}{3n+m}+\dfrac{\log(5n-m)}{5n-m}\\ \qquad+\dfrac{\log(5n+m)}{5n+m}-\text{etc.}\\ =-\dfrac{\pi}{2n}\operatorname{Sec}\dfrac{m\pi}{2n}\cdot(C+\log 2\pi)-\dfrac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{i-1}\operatorname{Cos}(2i-1)\cdot\dfrac{m\pi}{n}\cdot\log\left\{\dfrac{\Gamma(1-\frac{i-\frac{1}{2}}{n})}{\Gamma(\frac{i-\frac{1}{2}}{n})}\right\}\\ \qquad(m+n=\text{num. par}),\end{cases}$$

atque, si $n-m$ loco m ponitur,

101.
$$\begin{cases}\dfrac{\log m}{m}+\dfrac{\log(2n-m)}{2n-m}-\dfrac{\log(2n+m)}{2n+m}-\dfrac{\log(4n-m)}{4n-m}+\dfrac{\log(4n+m)}{4n+m}\\ \qquad+\dfrac{\log(6n-m)}{6n-m}-\text{etc.}\\ =-\dfrac{\pi}{2n}\operatorname{Cosec}\cdot\dfrac{m\pi}{2n}\cdot(C+\log 2\pi)-\dfrac{\pi}{n}\cdot\sum_{i=1}^{i=n}\operatorname{Sin}(2i-1)\cdot\dfrac{m\pi}{n}\cdot\log\left\{\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{i-\frac{1}{2}}{2n})}{\Gamma(\frac{i-\frac{1}{2}}{2n})}\right\}\\ \qquad(m=\text{num. imp.})\\ \dfrac{\log m}{m}+\dfrac{\log(2n-m)}{2n-m}-\dfrac{\log(2n+m)}{2n+m}-\dfrac{\log(4n-m)}{4n-m}+\dfrac{\log(4n+m)}{4n+m}\\ \qquad+\dfrac{\log(6n-m)}{6n-m}-\text{etc.}\\ =-\dfrac{\pi}{2n}\operatorname{Cosec}\cdot\dfrac{m\pi}{2n}\cdot(C+\log\pi)-\dfrac{\pi}{n}\cdot\sum_{i=1}^{i=\frac{1}{2}(n-1)}\operatorname{Sin}(2i-1)\cdot\dfrac{m\pi}{2n}\cdot\log\left\{\dfrac{\Gamma(1-\frac{i-\frac{1}{2}}{n})}{\Gamma(\frac{i-\frac{1}{2}}{n})}\right\}\\ \qquad(m=\text{num. par}).\end{cases}$$

Ex. 1. Posito $m=1$, $n=2$, fit

$$\frac{\log 1}{1}+\frac{\log 3}{3}-\frac{\log 5}{5}-\frac{\log 7}{7}+\frac{\log 9}{9}+\frac{\log 11}{11}-\text{etc.}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\log\left\{\frac{2^{\frac{1}{4}}.\Gamma(\frac{1}{8}).\Gamma(\frac{3}{8})}{e^{\frac{1}{2}C}.(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\right\},$$

atque inde

$$\frac{1.3^{\frac{1}{3}}.9^{\frac{1}{9}}.11^{\frac{1}{11}}.17^{\frac{1}{17}}\ldots.}{5^{\frac{1}{5}}.7^{\frac{1}{7}}.13^{\frac{1}{13}}.15^{\frac{1}{15}}.21^{\frac{1}{21}}\ldots.}=\left\{\frac{2^{\frac{1}{4}}.\Gamma(\frac{1}{8}).\Gamma(\frac{3}{8})}{e^{\frac{1}{2}C}.(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\right\}^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

Ex. $m=1$, $n=3$, fit

$$\frac{\log 1}{1}+\frac{\log 2}{2}-\frac{\log 4}{4}-\frac{\log 5}{5}+\frac{\log 7}{7}+\frac{\log 8}{8}-\text{etc.}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}(\log 2\pi-2C)-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\log\Gamma(\tfrac{5}{6}),$$

$$\frac{\log 1}{1}+\frac{\log 5}{5}-\frac{\log 7}{7}-\frac{\log 11}{11}+\frac{\log 13}{13}+\text{etc.}=\tfrac{1}{3}\pi\log\left\{\frac{3^{\frac{1}{4}}e^{-C}.\Gamma(\frac{1}{4})}{2^{\frac{1}{2}}.(\Gamma(\frac{3}{4}))^3}\right\},$$

atque inde

$$\frac{1.2^{\frac{1}{2}}.7^{\frac{1}{7}}.8^{\frac{1}{8}}\ldots.}{4^{\frac{1}{4}}.5^{\frac{1}{5}}.10^{\frac{1}{10}}.11^{\frac{1}{11}}\ldots.}=\left\{\frac{(2\pi)^{\frac{1}{3}}.e^{-\frac{2}{3}C}}{(\Gamma(\frac{5}{6}))^2}\right\}^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}},$$

$$\frac{1.5^{\frac{1}{5}}.13^{\frac{1}{13}}.17^{\frac{1}{17}}\ldots.}{7^{\frac{1}{7}}.11^{\frac{1}{11}}.19^{\frac{1}{19}}.23^{\frac{1}{23}}\ldots.}=\left\{\frac{3^{\frac{1}{4}}.e^{-C}.\Gamma(\frac{1}{4})}{2^{\frac{1}{2}}.(\Gamma(\frac{3}{4}))^3}\right\}^{\frac{\pi}{3}}.$$

P. S. Ex antecedentibus hanc etiam demonstrare licet notandam formulam

$$\text{Cos}\tfrac{1}{2}a.\log 1-\tfrac{1}{3}\text{Cos}\tfrac{3}{2}a\log 3+\tfrac{1}{5}\text{Cos}\tfrac{5}{2}a.\log 5-\tfrac{1}{7}\text{Cos}\tfrac{7}{2}a\log 7+\tfrac{1}{9}\text{Cos}\tfrac{9}{2}a.\log 9+\text{etc.}$$
$$=\frac{\pi}{4}(\log\pi-C-\log\text{Cos}\tfrac{1}{2}a)-\tfrac{1}{2}\pi\log\left[\Gamma(\tfrac{3}{4}+\frac{a}{4\pi}).\Gamma(\tfrac{3}{4}-\frac{a}{4\pi})\right],$$

quae, quodcumque sit $a<\pi$, valet.

Upsaliae D. 1. Maji 1846.

2.
Kräfte im Raume.

(Von Herrn Geh. Hofr. und Professor Dr. *Schweins* in Heidelberg.)

1.

Die Bewegung eines Kräftensystems lässt sich auf eine gerade fortgehende und auf eine drehende Bewegung oder Kraft zurückführen. Die erste erhält man durch das Parallelepipedum, dessen Kanten die Summen der Projectionen der Kräfte auf die Coordinaten-Axen sind. Sie ist bekanntlich für alle Puncte im Raume von gleicher Grösse und gleicher (paralleler) Richtung.

Ein anderes Parallelepipedum führt zur Grösse der drehenden Kraft, zur Ebene, in welcher diese drehende Kraft wirkt, und zur Richtung der Dreh-Axe, um welche die Drehung Statt findet. Es werden nämlich auf die Coordinaten-Ebenen xy, xz, yz die Drehmomente der Kräfte projicirt und, wenn der Anfangspunct der Coordinaten der Drehpunct ist, auf den Coordinaten z, y, x Theile z', y', x' nach Verhältniss der Summen N, M, L dieser Projectionen genommen. Diese Theile sind die Kanten des rechtwinklichten Parallelepipedums, dessen Diagonale nicht allein die Grösse des Drehmoments des ganzen Kräftensystems, sondern auch die Richtung der Dreh-Axe dieses Drehmoments angibt, dessen Kraft in der Ebene liegt, die senkrecht zu dieser Dreh-Axe ist und durch den Drehpunct geht.

Hier habe ich die Gegenstände bezeichnet: *Drehmoment*, *Dreh-Axe*, *Momenten-Ebene*, und die durch das Durchschneiden dieser Ebenen erzeugten *Gegenlinien*, welche ich einer neuen Untersuchung unterworfen habe, deren reichliche und wichtige Ergebnisse ich hier bekannt mache. — Herr Professor *Möbius* hat dieselben Gegenstände in der gegenwärtigen Zeitschrift im X. Bd. 1833, Seite 336. und in seiner Statik 1. Th. 1837 auf eine ihm ganz eigenthümliche Weise behandelt, und sich dadurch ein grosses Verdienst erworben. Mein Verfahren hat mit dem seinigen nichts gemein. Es ist nicht meine Absicht, Bekanntes zu geben; ich werde hievon so viel mittheilen, als nöthig ist, um Das, was mir angehört, verständlich zu machen, und jenen

selbst neue Grundlagen geben. Der Stoff ist reich genug, dass Mehrere Antheil nehmen können. Ich werde es anzeigen, wenn ich mit ihm in den Resultaten zusammenkomme.

In Hinsicht der Drehmomente unterscheide ich (was bisher nicht geschehen ist) ein *vollständiges* von einem *unvollständigen* Drehmomente. Jenes ist die Summe der Projectionen der Drehmomente der einzelnen Kräfte auf die Ebene, welche ich oben Momenten-Ebene genannt habe; oder: wenn auf drei zu einander senkrechten Ebenen, deren Durchschnitt zum Drehpunct genommen wird, die Drehmomente der Kräfte projicirt werden und die Summen dieser Projectionen auf zwei dieser Ebenen $= 0$ sind, so ist das Drehmoment in der dritten Ebene ein *vollständiges*: verschwinden diese Summen aber nicht, so ist das Drehmoment in jeder dieser Ebenen ein *unvollständiges*. Zu dieser Unterscheidung bin ich geführt durch die Beobachtung, dass es viele Wahrheiten gibt, die für ersteres, aber nicht für letzteres gelten.

Um die Uebersicht zu erleichtern, habe ich den reichen Stoff unter folgende Ueberschriften gebracht: A. *Vollständiges Drehmoment*, und zwar *a.* Drehmoment, Momenten-Ebene und Dreh-Axe; *b.* Momenten-Ebenen in Verbindung, und *c.* Gegenlinien. B. *Unvollständiges Drehmoment*, und C. *Ein Kräftensystem durch zwei Kräfte ersetzt.*

A. *Vollständiges Drehmoment.*

a. *Drehmoment, Momenten-Ebene und Dreh-Axe.*

2.

Die Bezeichnung sei diejenige, welche gewöhnlich gebraucht wird; nämlich die Summen der Projectionen der Kräfte $P, P_1, \ldots$ auf die rechtwinklichten Coordinaten-Axen x, y, z seien

$$\Sigma X = A, \qquad \Sigma Y = B, \qquad \Sigma Z = C,$$

und die Summen der Projectionen der Drehmomente der Kräfte um den Anfangspunct (000) der Coordinaten auf die Coordinaten-Ebenen yz, xz, xy seien

$$\Sigma(yZ - zY) = L, \qquad \Sigma(zX - xZ) = M, \qquad \Sigma(xY - yX) = N.$$

Hiezu komme folgende Bezeichnung: Für den Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ gehen L, M, N über in

$$L - y_0 C + z_0 B = L_0,$$
$$M - z_0 A + x_0 C = M_0,$$
$$N - x_0 B + y_0 A = N_0.$$

Aehnliches gilt von $L_1, M_1, N_1, L', M', N', \ldots$ für die Drehpuncte $(x_1\, y_1\, z_1)$, $(x'\, y'\, z'), \ldots$.

Für die Drehpuncte (000), $(x_0\, y_0\, z_0)$, $(x_1\, y_1\, z_1)$, ... sollen die Drehmomente durch $R, R_0, R_1, \ldots$, die Momenten-Ebenen durch $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots$, die zugehörigen Dreh-Axen durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots$, die diesen Drehpuncten zugehörigen gerade fortgehenden Kräfte durch $E, E_0, E_1, \ldots$ (welche sämmtlich gleich sind), vorgestellt werden, und zuletzt durch K die Summe der Producte

$$A.L + B.M + C.N = K.$$

3.

Mit Hülfe dieser Bezeichnung können für einen bestimmten Drehpunct das vollständige Drehmoment, die Momenten-Ebene und die Dreh-Axe in wenigen Zeichen angegeben werden. Es ist nämlich für den Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ das *vollständige Drehmoment*

$$1. \qquad R_0^2 = L_0^2 + M_0^2 + N_0^2;$$

die *Momenten-Ebene* $\mathfrak{M}_0$ ist

$$2. \qquad (x-x_0)\,L_0 + (y-y_0)\,M_0 + (z-z_0)\,N_0 = 0$$

und die *Dreh-Axe* $\mathfrak{A}_0$ ist

$$3. \qquad \frac{x-x_0}{L_0} = \frac{y-y_0}{M_0} = \frac{z-z_0}{N_0}.$$

4.

Die Grundwahrheit für einen grossen Theil der Untersuchung ist die Unveränderlichkeit der Summe der Producte, welche durch K vorgestellt ist. Es ist merkwürdig, dass, obgleich A, B, C mit der Richtung des Coordinatensystems, und L, M, N sowohl mit dem Drehpuncte als mit der Richtung des Coordinatensystems sich ändern, die Summe der Producte

$$A.L + B.M + C.N = K$$

keine Aenderung erleidet.

Dass K sich nicht mit dem Drehpuncte ändert, ist leicht zu beweisen; denn man hat nur in

$$A.L_0 + B.M_0 + C.N_0$$

die obigen Werthe für L_0, M_0, N_0 einzuführen. Dies gibt

$$A.L + B.M + C.N;$$

es ist also

$$K = K_0 = K_1 = \ldots.$$

Um aber zu beweisen, dass auch die Veränderung der Richtung der

Coordinaten-Axen keinen Einfluss auf K hat, werde angenommen, dass die neuen Coordinaten x', y', z' mit den alten Coordinaten Winkel bilden, deren Cosinusse folgende sind:

Mit	x	y	z
x'	α	β	γ
y'	α'	β'	γ'
z'	α''	β''	γ''.

Hiedurch geht nach Dem, was sich in meiner Untersuchung über die virtuelle Geschwindigkeiten *) findet,

$$A \text{ über in } \alpha\Sigma X' + \alpha'\Sigma Y' + \alpha''\Sigma Z',$$
$$B \text{ - - } \beta\Sigma X' + \beta'\Sigma Y' + \beta''\Sigma Z',$$
$$C \text{ - - } \gamma\Sigma X' + \gamma'\Sigma Y' + \gamma''\Sigma Z',$$

oder

$$A.L \text{ über in } (\alpha A' + \alpha' B' + \alpha'' C').L,$$
$$B.M \text{ - - } (\beta A' + \beta' B' + \beta'' C').M,$$
$$C.N \text{ - - } (\gamma A' + \gamma' B' + \gamma'' C').N,$$

mithin $A.L + B.M + C.N$ über in

$$A'(\alpha L + \beta M + \gamma N) + B'(\alpha' L + \beta' M + \gamma' N) + C'(\alpha'' L + \beta'' M + \gamma'' N).$$

Es sind aber die Factoren von A', B', C' die Summen der Projectionen von L, M, N auf die Ebenen $y'z'$, auf $x'z'$ und auf $x'y'$: werden diese durch L', M', N' vorgestellt, so entsteht die Gleichung

$$4. \qquad A.L + B.M + C.N = A'.L' + B'.M' + C'.N',$$

d. h.: *Die Summe der Producte* AL, BM *und* CN *ist für dasselbe Kräftensystem sowohl von dem Drehpuncte als von der Richtung des Coordinatensystems unabhängig, und eine beständige Grösse.*

5.

Diese Eigenschaft der Summe K ist auch der Grund, warum ich von ihr beginne. Ich messe [dividire] sie durch das Product aus der gerade fortgehenden Kraft und aus dem vollständigen Drehmomente, nämlich durch $E_0 . R_0$; so dass

$$\frac{K}{E_0 . R_0} = \frac{A}{E_0} \cdot \frac{L_0}{R_0} + \frac{B}{E_0} \cdot \frac{M_0}{R_0} + \frac{C}{E_0} \cdot \frac{N_0}{R_0}.$$

Die ersten Factoren vorstehender Producte sind die Cosinusse der Winkel, welche E_0 oder die Diagonale des ersten Parallelepipedums —, und die zweiten

*) Perfecta solutio problematis. 4. 1813. Heidelbergae. pag. 13.

Factoren sind die Cosinusse der Winkel, welche $\mathfrak{A}_0$, die Diagonale des zweiten Parallelepipedums, mit den Coordinaten-Axen bildet. Das, was zur Rechten des Gleichheitszeichens steht, ist also der Cosinus des Winkels, den die beiden Diagonalen oder die gerade fortgehende Kraft und die Dreh-Axe bilden; also ist

$$\frac{K}{E_0 \,.\, R_0} = \cos\,(\mathfrak{A}_0\, E_0),$$

oder

$$5. \qquad A.L + B.M + C.N = K = E_0 \,.\, R_0 \,.\, \cos\,(\mathfrak{A}_0\, E_0).$$

Diese Gleichung kann auf verschiedene Weise gedeutet werden. Zuerst kann

$$E_0 \,.\, \cos\,(\mathfrak{A}_0\, E_0)$$

betrachtet werden als die Projection der gerade fortgehenden Kraft E_0 oder als die Projection aller Kräfte P, P_1, ... auf die Dreh-Axe $\mathfrak{A}_0$. Wird die Summe dieser Projectionen durch

$$\Sigma P_a$$

vorgestellt, so ergibt sich bei dieser Betrachtungsweise aus vorstehender Gleichung folgender Satz:

$$6. \qquad A.L + B.M + C.N = K = R_0 \,.\, \Sigma P_a;$$

d. h.: *Das Product aus dem vollständigen Drehmomente eines Puncts und aus der Projection aller Kräfte auf die Richtung der Dreh-Axe dieses Drehmoments ist eine beständige Grösse und gleich der Summe der Producte* AL, BM *und* CN.

Dieser Satz kann benutzt werden, um durch ein einfaches Verfahren das vollständige Drehmoment einer Linie als Dreh-Axe zu finden. Man projicire die sämmtlichen Kräfte auf diese Linie, und suche R_0 durch die Gleichung

$$R_0 = \frac{K}{EP_a}.$$

Dieses Verfahren setzt aber voraus, es sei schon bekannt, dass die Linie die Eigenschaft einer Dreh-Axe hat; denn nicht alle Linien (wie ich später zeigen werde) können Dreh-Axen sein. Wer dieses nicht beachten wollte, würde zu grossen Irrthümern gelangen.

Die obige Gleichung (5.) gibt auch zu folgender Betrachtung Anlass. In ihr sind K und E_0 unveränderliche Grössen; also ist auch das Product

$$R_0 \,.\, \cos\,(\mathfrak{A}_0\, E_0)$$

eine beständige Grösse und, obgleich seine Factoren von dem Drehpuncte abhangen, von diesem Drehpuncte unabhängig. Ich nehme eine Ebene an, wel-

che senkrecht zu der gerade fortgehenden Kraft oder senkrecht zu allen $E, E_0, E_1 \ldots$ ist, und nenne sie *Normal-Ebene*. Im allgemeinen ist es gleichgültig, durch welchen Drehpunct diese Ebene geht.

Da nun das vorstehende Product die Projection des Drehmoments R_0 auf eine Normal-Ebene ist, so ist durch diese Betrachtungsweise folgender Satz erlangt:

7. *Die Projectionen aller vollständigen Drehmomente auf eine Normal-Ebene sind gleich, und jede Projection ist* $= \frac{K}{E}$.

6.

Der Winkel, welchen die Dreh-Axe $\mathfrak{A}_0$ des vollständigen Drehmoments R_0 mit der gerade fortgehenden Kraft E_0 bildet, kann von 0^0 bis 90^0 wachsen, also der Cosinus von 1 bis 0 abnehmen, mithin der Factor R_0 von seinem kleinsten Werthe bis ins Unendliche wachsen. Dieses führt zu der Frage: *Für welche Drehpuncte findet das kleinste vollständige Drehmoment Statt?*

Die Drehpuncte für das kleinste vollständige Drehmoment, und dieses Drehmoment selbst, werden durch die Gleichung

$$K_0 = E_0 \,.\, R_0,$$

oder durch

$$(AL_0 + BM_0 + CN_0)^2 = (A^2 + B^2 + C^2)\,(L_0^2 + M_0^2 + N_0^2).$$

bestimmt. Diese nimmt auch folgende Gestalt an:

$$(AM_0 - BL_0)^2 + (AN_0 - CL_0)^2 + (BN_0 - CM_0)^2 = 0$$

und gibt zu erkennen, dass

$$AM_0 - BL_0 = AN_0 - CL_0 = BN_0 - CM_0 = 0,$$

oder dass

$$\begin{aligned} AM - BL + ACx_0 + BCy_0 - (A^2 + B^2)z_0 &= 0,\\ CL - AN + ABx_0 - (A^2 + C^2)y_0 + BCz_0 &= 0,\\ BN - CM - (B^2 + C^2)x_0 + ABy_0 + ACz_0 &= 0 \end{aligned}$$

ist; woraus sich folgende Gleichungen ergeben:

8.
$$\begin{cases} -\frac{AK}{E^2} + L - Cy + Bz = 0,\\ -\frac{BK}{E^2} + M - Az + Cx = 0,\\ -\frac{CK}{E^2} + N - Bx + Ay = 0. \end{cases}$$

Die Drehpuncte, für welche das kleinste vollständige Drehmoment Statt findet,

liegen also in einer geraden Linie. Ferner geht aus diesen Gleichungen, welche auch schon bei Andern vorkommen, hervor, dass diese Linie die Richtung der gerade fortgehenden Kraft hat. Ferner gehen die Gleichungen der Dreh-Axe

$$\frac{x-x_0}{L_0} = \frac{y-y_0}{M_0} = \frac{z-z_0}{N_0}$$

für einen Punct $(x_0\ y_0\ z_0)$ in dieser Linie der kleinsten Drehmomente mittels der eben gefundenen Gleichungen, weil x_0, y_0, z_0 ihnen genügen müssen, in folgende über:

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}.$$

Die Dreh-Axe hat also die Richtung der gerade fortgehenden Kraft und fällt mit dieser Linie der kleinsten vollständigen Drehmomente zusammen. Daher:

9. *Die Linie der kleinsten vollständigen Drehmomente, auch Hauptdrehlinie genannt, ist die Dreh-Axe aller Drehpuncte, welche in ihr angenommen werden. Die Momenten-Ebenen dieser Drehpuncte sind zu ihr senkrecht und das vollständige Drehmoment jedes Drehpuncts in ihr ist*

$$R_k = \frac{K}{E} = \frac{AL+BM+CN}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und gleich der Projection jedes vollständigen Drehmoments irgend eines Drehpuncts im Raume auf die Normal-Ebene.

Hieraus folgt umgekehrt, dass

10. $K = E \,.\, R_k$;

d. h.: *Die Summe der Producte* AL, BM *und* CN *ist gleich dem Producte aus der gerade fortgehenden Kraft und aus dem kleinsten vollständigen Drehmomente.*

7.

Das vollständige Drehmoment jedes Puncts ausserhalb der Hauptdrehlinie ist grösser, als das eben gefundene Drehmoment R_k; es hangt von der Entfernung seines Drehpuncts von dieser Hauptdrehlinie ab, und seine Grösse kann durch das kleinste vollständige Drehmoment R_k und durch die Entfernung seines Drehpuncts von der Hauptdrehlinie angegeben werden. Denn fället man aus dem Drehpuncte $(x_0\ y_0\ z_0)$ auf die Hauptdrehlinie eine senkrechte Linie h, so findet sich für ihre Grösse durch geeignete Rechnungen die Gleichung

$$h^2 = \frac{R_0^2 . E^2 - K^2}{E^4},$$

und folglich, mit Berücksichtigung von (10.), die Gleichung

$$11. \qquad R_0^2 = R_k^2 + h^2 . E^2 \quad \text{oder} \quad R_0^2 - R_k^2 = h^2 . E^2 ;$$

d. h.: *Die Zunahmen der zweiten Potenzen der vollständigen Drehmomente wachsen nach Verhältniss der zweiten Potenzen der Entfernungen ihrer Drehpuncte von der Hauptdrehlinie.*

Bei Kräften im Raume gilt also im Allgemeinen nicht das Verhältniss der Drehmomente, welches bei Kräften in der Ebene gilt. Nur dann, wenn eine Mittelkraft Statt findet, oder wenn $R_k = 0$ ist, findet unter den vollständigen Drehmomenten bei Kräften im Raume dasselbe Verhältniss Statt, wie bei Kräften in der Ebene. — Dass die Drehmomente mit der Entfernung der Drehpuncte von der Hauptdrehlinie wachsen, war schon bekannt; aber nicht, nach welchem Verhältnisse.

Aus dem so eben gefundenen Satze folgt, dass Drehpuncte, welche von der Hauptdrehlinie gleich weit abstehen, gleiche vollständige Drehmomente haben.

Nachdem das Verhältniss der vollständigen Drehmomente in Hinsicht ihrer Grösse gefunden, ist noch übrig, dasjenige in Hinsicht ihrer Richtung zu suchen.

Bei den Drehpuncten in der Hauptdrehlinie fallen die Dreh-Axen mit dieser Hauptdrehlinie zusammen, und ihre Momenten-Ebenen sind senkrecht zu derselben. Wenn nun der Drehpunct die Hauptdrehlinie verlässt, so wird das vollständige Drehmoment grösser; zugleich neigt sich die Dreh-Axe und weicht von der Hauptdrehlinie immer mehr ab*). Man sieht dieses aus der oben gefundenen Gleichung

$$\cos(\mathfrak{A}_0 \boldsymbol{E}_0) = \frac{K}{E . R_0},$$

oder noch besser, wenn man den Cosinus in die Tangente umsetzt, nämlich aus

$$12. \qquad \operatorname{tg}(\mathfrak{A}_0 \boldsymbol{E}_0) = h . \frac{E^2}{K} = h . \frac{A^2+B^2+C^2}{AL+BM+CN}.$$

Die Tangente dieses Winkels wächst also im Verhältniss der Entfernung des Drehpuncts von der Hauptdrehlinie. Die Dreh-Axe für unendlich entfernte Drehpuncte wird zu einer Senkrechten auf die Hauptdrehlinie, und die Momenten-Ebene geht durch dieselbe.

---

*) Herr Professor *Möbius* gelangt S. 141, 1. Thl. durch andere Betrachtungen zu demselben Satze.

8.

Ausser der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$, welche durch die Gleichung (2.) angegeben wird, kommen hier noch folgende Ebenen in Betracht:

Erstens: die Ebene, welche ich Normal-Ebene nannte; und zwar diejenige, welche durch den Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ geht; ihre Gleichung ist, weil sie zu B_0 senkrecht ist, folgende:

13. $$(x-x_0)A + (y-y_0)B + (z-z_0)C = 0.$$

Zweitens: die Ebene, welche durch die Hauptdrehlinie und durch den Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ geht; ihre Gleichung ist

14. $(x-x_0)(E^2L_0-AK)+(y-y_0)(E^2M_0-BK)+(z-z_0)(E^2N_0-CK)=0$, und

Drittens: die Ebene, welche durch die Dreh-Axe und durch die gerade fortgehende Kraft E_0 geht; ihre Gleichung ist

15. $(x-x_0)(CM_0-BN)+(y-y_0)(AN_0-CL_0)+(z-z_0)(BL_0-AM_0)=0.$

Die drei Ebenen (2., 13. und 14.) durchschneiden sich in einer Linie, welche senkrecht zur Hauptdrehlinie ist; denn die Gleichungen dieses Durchschnitts sind

16. $$\frac{x-x_0}{C.M_0-B.N_0} = \frac{y-y_0}{A.N_0-C.L_0} = \frac{z-z_0}{B.L_0-A.M_0}.$$

Die Ebene $\mathfrak{A}_0E_0$ (15.) durchdringt die Momenten-Ebene $\mathfrak{N}.2$ in einer Linie, deren Gleichungen

17. $$\frac{x-x_0}{A.R_0^2-L_0.K} = \frac{y-y_0}{B.R_0^2-M_0.K} = \frac{z-z_0}{C.R_0^2-N_0.K}$$

sind, und die Normal-Ebene N 13 in einer Linie, deren Gleichungen

18. $$\frac{x-x_0}{E^2.L_0-A.K} = \frac{y-y_0}{E^2.M_0-B.K} = \frac{z-z_0}{E^2.N_0-C.K}.$$

sind. Aus den Gleichungen (15. und 16.) geht hervor, dass die Ebene $\mathfrak{A}_0E_0$ zu der Linie, welche vom Drehpuncte $(x_0\, y_0\, z_0)$ auf die Hauptdrehlinie senkrecht gefället wird, senkrecht ist. Daher:

19. *Die Momenten-Ebene, die Normal-Ebene eines Drehpuncts, und die Ebene, welche durch diesen Drehpunct und durch die Hauptdrehlinie geht: diese drei Ebenen durchschneiden sich in einer Linie, welche zur Hauptdrehlinie senkrecht ist; und zu dieser Durchschnittslinie ist die Ebene senkrecht, welche durch die gerade fortgehende Kraft* E_0 *und durch die Dreh-Axe* $\mathfrak{A}_0$ *geht.*

9.

Die Drehpuncte in der Richtung einer gerade fortgehenden Kraft haben gleiche Drehmomente, denn sie stehen von der Hauptdrehlinie gleich weit

ab. Die Momenten-Ebenen dieser Drehpuncte gehen durch die Linien, welche von diesen Puncten senkrecht auf die Hauptdrehlinie gefället werden und unter sich parallel sind. Auch bilden diese Momenten-Ebenen mit der Hauptdrehlinie gleiche Winkel. Hieraus folgt, dass die Momenten-Ebenen dieser Drehpuncte parallel sind, und dass auch ihre Dreh-Axen in einer und derselben Ebene liegen und parallel sind*). Dieser Satz lässt sich auch unabhängig von obiger Betrachtungsweise begründen. Ist nämlich $(x'y'z')$ ein Punct der Linie $\boldsymbol{E}_0$, so ist

$$\frac{x'-x_0}{A} = \frac{y'-y_0}{B} = \frac{z'-z_0}{C},$$

also

$$y' = \frac{B(x'-x_0)+Ay_0}{A}, \qquad z' = \frac{C(x'-x_0)+Az_0}{A},$$

mithin

$$L' = L - y'C + z'B = L - y_0C + z_0B = L_0,$$

und eben so ist auch

$$M' = M_0 \qquad \text{und} \qquad N' = N_0.$$

Es können also L', M', N' mit L_0, M_0, N_0 verwechselt werden. Die Gleichungen des vollständigen Drehmoments R', der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}'$ und der Dreh-Axe $\mathfrak{A}'$, nämlich

$$R'^2 = L'^2 + M'^2 + N'^2,$$
$$(x-x')L' + (y-y')M' + (z-z')N' = 0,$$
$$\frac{x-x'}{L'} = \frac{y-y'}{M'} = \frac{z-z'}{N'},$$

gehen durch diese Verwechselung in folgende über:

$$R'^2 = L_0^2 + M_0^2 + N_0^2 = R_0^2,$$
$$(x-x')L_0 + (y-y_1)M_0 + (z-z')N_0 = 0,$$
$$\frac{x-x'}{L_0} = \frac{y-y'}{M_0} = \frac{z-z'}{N_0};$$

aus welchen folgt, dass die Drehmomente der Puncte in der Linie $\boldsymbol{E}_0$ gleich, die Momenten-Ebenen parallel und auch ihre Dreh-Axen parallel sind, und also in einer Ebene $(\mathfrak{A}_0 \boldsymbol{E}_0)$ liegen.

10.

Es ist noch übrig, auszumitteln, ob nur die Momenten-Ebenen von Puncten in der Richtung einer gerade fortgehenden Kraft die oben gefundene Eigenschaft, nämlich die der Parallelität besitzen, oder ob noch andere Momen-

*) *Möbius* Statik. 1. Th. S. 154.

ten-Ebenen parallel sein können. Zu diesem Zwecke nehme man irgend zwei Drehpuncte $(x_0\, y_0\, z_0)$, $(x_1\, y_1\, z_1)$, zu welchen die Momenten-Ebenen

$$(x-x_0)\,L_0 + (y-y_0)\,M_0 + (z-z_0)\,N_0 = 0,$$
$$(x-x_1)\,L_1 + (y-y_1)\,M_1 + (z-z_1)\,N_1 = 0$$

gehören. Sollen diese parallel sein, so müssen folgende Gleichungen zugleich Statt finden:

$$\frac{L_0}{L_1} = \frac{M_0}{M_1} = \frac{N_0}{N_1}.$$

Wird nun zur Abkürzung

$$L(x_1-x_0) + M(y_1-y_0) + N(z_1-z_0)$$
$$+ A(y_0z_1-y_1z_0) + B(z_0x_1-z_1x_0) + C(x_0y_1-x_1y_0) = f$$

gesetzt, so kann diesen Bedingungsgleichungen folgende Gestalt gegeben werden:

$$C.f-(z'-z_0)K = -B.f+(y'-y_0)K = A.f-(x'-x_0)K = 0,$$

und hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{x'-x_0}{A} = \frac{y'-y_0}{B} = \frac{z'-z_0}{C}.$$

Da nun diese Gleichungen der Linie E_0 angehören, so ist durch sie folgender Satz gewonnen:

20. *Nur die Momenten-Ebenen von Drehpuncten in der Richtung einer geraden fortgehenden Kraft können parallel sein.*

11.

Aus allem Diesen geht Folgendes hervor:

Die Drehpuncte, die in dem Mantel einer Walze liegen, deren Durchschnitt ein Kreis und deren Axe die Hauptdrehlinie ist, haben gleiche Drehmomente*); ihre Momenten-Ebenen bilden gleiche Winkel mit der Hauptdrehlinie; die Momenten-Ebenen derjenigen Puncte, welche in einem Umringe liegen, berühren einen Doppelkegel, dessen Spitze und Axe in der Hauptdrehlinie liegen; und in der Ebene, welche den Mantel berührt, liegen alle parallele Dreh-Axen der Drehpuncte, die in der Berührungslinie dieses Mantels sich befinden.

12.

Die Dreh-Axe $\mathfrak{A}_0$ berührt den Mantel in dem Drehpuncte $(x_0\, y_0\, z_0)$; jede zwei Puncte dieser Dreh-Axe, die auf beiden Seiten dieses Drehpuncts

*) *Möbius*, Seite 141. N. 1.

liegen und gleich weit von ihm abstehen, sind auch gleich weit von der Hauptdrehlinie entfernt, haben also gleiche Drehmomente, die aber grösser sind, als das Drehmoment des Berührungspuncts $(x_0\ y_0\ z_0)$; denn ihre Drehpuncte stehen von der Hauptdrehlinie weiter ab als $(x_0\ y_0\ z_0)$. Daher:

21. *Zu jedem Drehpuncte gehört eine bestimmte Dreh-Axe und ein bestimmtes vollständiges Drehmoment; jeder andere Punct der Dreh-Axe hat ein grösseres vollständiges Drehmoment, und dieses ist desto grösser, je weiter sein Drehpnnct von dem Berührungspuncte* $(x_0 y_0 z_0)$ *absteht.*

Da hier kein freies Drehmoment ist, und verschiedenen Drehpuncten verschiedene Momenten-Ebenen und verschiedene Dreh-Axen angehören, so muss, wenn die Momenten-Ebene oder die Dreh-Axe gegeben ist, auch der zugehörige Drehpunct gefunden werden können.

Das vollständige Drehmoment bestimmt nicht den Drehpunct, sondern nur den Mantel der Walze, in welchem der Drehpunct liegt. Dieses folgt sowohl aus dem Obigen, als aus der Gleichung für das vollständige Drehmoment

$$R_0^2 = (L - y_0 C + z_0 B)^2 + (M - z_0 A + x_0 C)^2 + (L - x_0 B + y_0 A)^2,$$

welche die Gleichung einer Walze mit kreisförmigem Durchschnitte ist.

Die erste hier zu lösende Aufgabe ist: *den Drehpunct der Ebene*

$$ax + by + cz = d$$

suchen.

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung der Momenten-Ebene

$$(x - x_0) L_0 + (y - y_0) M_0 + (z - z_0) N_0 = 0,$$

oder mit

$$xL_0 + yM_0 + zN_0 = x_0 L + y_0 M + z_0 N,$$

so erhält man zur Bestimmung der Coordinaten des Drehpuncts die Gleichungen

$$\frac{L_0}{a} = \frac{M_0}{b} = \frac{N_0}{c} = \frac{x_0 L + y_0 M + z_0 N}{d},$$

und aus diesen Gleichungen folgende Werthe:

22.
$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{dA - cM + bM}{aA + bB + cC}, \\ y_0 = \dfrac{dB - aN + cL}{aA + bB + cC}, \\ z_0 = \dfrac{dC - bL + aM}{aA + bB + cC}. \end{cases}$$

Man kann selbst die Grösse des vollständigen Drehmoments R_0, welches der gegebenen Ebene angehört, aus den Elementen der gegebenen Gleichung berechnen. Man findet, wenn man die gefundenen Werthe von x_0, y_0, z_0 in die Gleichung für R_0 einführt:

$$23. \qquad R_0 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}{aA+bB+cC} \cdot K.$$

Es ist nicht unwichtig, hievon Anwendung auf die Coordinaten-Ebenen zu machen und den Drehpunct jeder dieser Ebenen aufzusuchen. Die Gleichung der Ebene xy ist

$$z = 0;$$

mithin ist $a = b = d = 0$, und die Coordinaten des Drehpuncts dieser Ebene sind

$$x_0 = -\frac{M}{C}, \qquad y_0 = +\frac{L}{C}, \qquad z_0 = 0.$$

Eben so ergeben sich für den Drehpunct der Ebene xz die Coordinaten

$$x_0 = +\frac{N}{B}, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = -\frac{L}{B},$$

und für den Drehpunct der Ebene yz die Coordinaten

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = -\frac{N}{A}, \qquad z_0 = +\frac{M}{A}.$$

Merkwürdig ist, dass in allen diesen drei Fällen der Gleichung

$$xL + yM + zN = 0$$

durch die drei Werthe x_0, y_0, z_0 Genüge geschieht. Da nun dieselbe die Gleichung der Ebene des Drehmoments ist, wenn der Anfangspunct der Coordinaten zum Drehpunct angenommen wird, so haben die vier Drehpuncte folgende Eigenschaft:

24. *Die drei Drehpuncte der drei rechtwinklichten Coordinaten-Ebenen und ihr Durchschnittspunct liegen in einer Ebene, und der Durchschnittspunct oder der Anfangspunct der Coordinaten ist der Drehpunct dieser Ebene* *).

Die vollständigen Drehmomente dieser drei Ebenen xy, xz, yz, durch R_{xy}, R_{xz}, R_{yz} bezeichnet, sind nach N. **23**.:

$$25. \qquad R_{xy} = \frac{K}{C}, \qquad R_{xz} = \frac{K}{B}, \qquad R_{yz} = \frac{K}{A}.$$

Die vollständigen Drehmomente für die Coordinaten-Ebenen sind nicht N, M, L: diese sind nur die Projectionen des vollständigen Drehmoments, welches dem Anfangspuncte der Coordinaten als Drehpunct angehört.

---

*) *Möbius*, S. 154.

13.

Ich gehe jetzt zur zweiten, wichtigeren Aufgabe über, nämlich: *den Drehpunct einer Linie suchen.*

Die Gleichungen der Linie seien

$$y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1.$$

Dieselben, verbunden mit den Gleichungen der Dreh-Axe, führen zu den vier Gleichungen

$$a \,.\, \boldsymbol{L}_0 = M_0, \qquad a_1 \boldsymbol{L}_0 = N_0, \qquad y_0 = ax_0 + b, \qquad z_0 = a_1 x_0 + b_1,$$

zwischen den drei Grössen x_0, y_0, z_0, und diese nicht allein zu den Werthen dieser Grössen oder der Coordinaten des zu bestimmenden Drehpuncts, sondern auch zu einer Bedingungsgleichung. Wird nämlich zur Abkürzung

$$26. \qquad 1 + a^2 + a_1^2 = p, \qquad A + aB + a_1 C = q,$$
$$\boldsymbol{L} - bC + b_1 B = l, \qquad M - Ab_1 = m, \qquad N + Ab = n$$

gesetzt, so sind die Coordinaten des Drehpuncts:

$$27. \qquad x_0 = \frac{al-m}{pC-a_1 q} \qquad \text{oder} \qquad = \frac{a_1 l - n}{-pB+aq},$$
$$y_0 = ax_0 + b, \qquad z_0 = a_1 x_0 + b_1$$

und die Bedingungsgleichung, welche von a, b, a_1, b_1 befriedigt werden muss, wenn die gegebene Linie einen Drehpunct haben oder die Linie einer Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments sein soll, ist

$$28. \qquad (a_1 l - n)\,(pC - a_1 q)\,(al - m)\,(pB - aq) = 0.$$

Um die Anwendung dieser wichtigen Bedingungsgleichung zu erleichtern, gebe ich ihr folgende Gestalt:

$$29. \qquad q \,.\, h - p \,.\, \boldsymbol{K} = 0,$$

wo

$$30. \qquad h = \boldsymbol{L} - bC + b_1 B + a(M - b_1 A) + a_1 (N + bA)$$
$$= l + a \,.\, m + a_1 \,.\, n.$$

ist. Es ist gut, hier anzumerken, dass

$$31. \qquad A \,.\, l + B \,.\, m + C \,.\, n = K$$

ist. Hieraus geht hervor, dass man nicht nach Willkür Dreh-Axen annehmen kann; denn für jeden Punct gibt es zwar eine Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments, aber nicht umgekehrt für jede Linie einen Drehpunct; oder nicht jede Linie kann eine Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments sein.

Führt man diese Werthe (27.) von x_0, y_0, z_0 in die Gleichung für das Drehmoment R_0 ein, so erhält man zuerst

$$L_0 = L - bC + b_1 B + (-aC + a_1 B)x_0 = \frac{Ch - a_1 K}{Cp - a_1 q},$$
$$M_0 = M - b_1 A + (C - a_1 A)x_0 = \frac{a(Ch - a_1 K)}{Cp - a_1 q},$$
$$N_0 = N + bA + (-B + aA)x_0 = \frac{K - Ah + a(aK - Bh)}{Cp - a_1 q},$$

und zuletzt das Drehmoment

$$32. \qquad R_0^2 = \frac{(1+a^2)(Ch - a_1 K)^2 + (Ah - K + a(Bh - aK))^2}{(Cp - a_1 q)^2};$$

wobei noch die Bedingungsgleichung

$$q \,.\, h - p \,.\, K = 0$$

zu berücksichtigen ist.

Die Gleichungen (29., 27. und 32.) geben die Eigenschaft an, welche eine Linie haben muss, wenn sie eine Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments sein soll; ferner, wenn diese Eigenschaft vorhanden ist, wie ihr Drehpunct gefunden, und zuletzt, wie das Drehmoment selbst aus den Elementen der Gleichungen der Linie berechnet wird.

Bedenkt man, dass in einer Ebene, welche den Mantel einer Walze berührt, nur die Linien nach einer bestimmten Richtung Dreh-Axen sein können, alle übrigen Linien in dieser Ebene nicht, so kommt man bald zu der Ueberzeugung, dass die Anzahl der Linien, welche zu Dreh-Axen eines vollständigen Drehmoments genommen werden können, im Verhältniss zu jenen, welche zu beseitigen sind, sehr klein ist.

Zur Berechnung der Grösse des vollständigen Drehmoments einer Linie, als Dreh-Axe betrachtet, habe ich in (5. und 32.) zwei verschiedene Verfahrungs-Arten angegeben. Beide setzen aber voraus, dass man sich entweder durch die Bedingungsgleichung (28. oder 29.) von der Zuverlässigkeit der Linie als Dreh-Axe versichert hat, oder dass dieses durch andere Betrachtungen schon ausgemittelt sei.

Um einige Anwendungen hievon zu machen, soll untersucht werden, wann die Coordinaten-Axen Dreh-Axen eines vollständigen Drehmoments, und wo ihre Drehpuncte sind.

Die Gleichungen für die Coordinaten-Axe x sind

$$y = 0, \qquad z = 0;$$

also ist $a = a_1 = b = b_1 = 0$. Die Coordinaten-Axe x ist also nur dann eine Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments, wenn

$$B \,.\, M + C \,.\, N = 0$$

ist, und wenn diese Bedingung erfüllt wird, so sind die Coordinaten des Drehpuncts

$$x_0 = \frac{N}{B} = -\frac{M}{C}, \quad y_0 = 0 \quad \text{und} \quad z_0 = 0.$$

Das vollständige Drehmoment dieses Drehpuncts ist nach (32.)

$$R_0 = L.$$

Auf gleiche Weise findet man in (29.), $\frac{1}{a} = b_1 = 0$, also, dass die Coordinaten-Axe y nur dann eine Dreh-Axe eines vollständigen Drehmoments ist, wenn

$$A \,.\, L + C \,.\, N = 0.$$

ist. Das Gleiche gilt von z (in (29.), $\frac{1}{a_1} = b = 0$), wenn

$$A \,.\, L + B \,.\, M = 0.$$

ist. Also:

33. *Drei zu einander senkrechte und in einem Puncte sich durchschneidende Linien können nicht zugleich Dreh-Axen vollständiger Drehmomente sein; und nur zwei derselben, z. B.* x *und* y, *können Dreh-Axen sein, wenn*

$$\mathrm{A \,.\, L = - \,B \,.\, M = - \,C \,.\, N} \quad \textit{ist.}$$

14.

Vermittelst der oben (29.) gefundenen Bedingungsgleichung kann jetzt auch bewiesen werden, dass die Linien, welche in einer Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ liegen und durch den Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ gehen, keine Dreh-Axen vollständiger Drehmomente sein können. Der Beweis ist folgender.

Wird zur Vereinfachung der Rechnung der Anfangspunct der Coordinaten zum Drehpuncte angenommen, so sind die Gleichungen für eine dieser Linien

$$y = ax, \qquad z = a_1 x.$$

Da diese Linie in der Momenten-Ebene

$$xL + yM + zN = 0$$

liegt, so müssen die Vorzahlen a, a_1 der Gleichung

$$L + aM + a_1 N = 0$$

genügen. Zugleich müssen a, a_1 die Bedingungsgleichung (28.) befriedigen. Beide Gleichungen vereint führen zu

$$1 + a^2 + a_1^2 = 0;$$

was nicht möglich ist. Daher:

34. *Die Linien, welche in einer Momenten-Ebene liegen und durch*

den Drehpunct derselben gehen, können keine Dreh-Axen von vollständigen Drehmomenten sein. *)

15.

Wenn das vollständige Drehmoment einer Ebene auf eine andere Ebene projicirt wird, so kann im allgemeinen diese Projection dem vollständigen Drehmomente, welches dieser zweiten Ebene angehört, nicht gleich sein. Es ist nothwendig, diese wichtige und wohl zu beachtende Wahrheit zu beweisen.

Sind R_0, R' die vollständigen Drehmomente der Drehpuncte $(x_0\, y_0\, z_0)$, $(x'\, y'\, z')$ und

$$(x-x_0)\,\boldsymbol{L}_0 + (y-y_0)\,M_0 + (z-z_0)\,N_0 = 0,$$
$$(x-x')\,\boldsymbol{L}' + (y-y')\,M' + (z-z')\,N' = 0$$

die Gleichungen ihrer Momenten-Ebenen $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}'$, so ist der Cosinus des Winkels, den diese beiden Ebenen bilden,

$$\cos(\mathfrak{M}_0\,\mathfrak{M}') = \frac{L_0.L' + M_0.M' + N_0.N'}{R_0.R'},$$

mithin die Projection des Drehmoments R' auf die Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$:

$$35. \qquad R'.\cos(\mathfrak{M}_0\,\mathfrak{M}') = \frac{L_0.L' + M_0.M' + N_0.N'}{R_0}.$$

Dieser Bruch ist im allgemeinen nicht gleich dem Drehmomente R_0. Die Fälle, in welchen diese Gleichheit Statt findet, ergeben sich aus der Gleichung

$$\boldsymbol{L}_0.\boldsymbol{L}' + M_0.M' + N_0.N' = R_0^2.$$

Damit Das, was gesucht wird, sich bald offenbare, gebe ich den $\boldsymbol{L}'$, M', N' folgende Gestalt:

$$\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L}_0 - (y'-y_0)\,C + (z'-z_0)\,B,$$
$$M' = M_0 - (z'-z_0)\,A + (x'-x_0)\,C,$$
$$N' = N_0 - (x'-x_0)\,B + (y'-y_0)\,A,$$

und vervielfache (multiplicire) sie mit $\boldsymbol{L}_0$, M_0, N_0. Die Endgleichung ist

$$(x-x_0)\,(BN_0 - CM_0) + (y'-y_0)\,(C\boldsymbol{L}_0 - AN_0) + (z'-z_0)\,(AM_0 - B\boldsymbol{L}_0) = 0.$$

Diese Gleichung gibt, wenn x', y', z', für welche hier x, y, z gesetzt sind, als laufende Coordinaten betrachtet werden, eine Ebene an, die so beschaffen ist, dass, wenn ein Punct $(x'\,y'\,z')$ derselben als Drehpunct angenommen wird, die Projection seines vollständigen Drehmoments auf die Ebene $\mathfrak{M}_0$ dem vollstän-

---

*) Herr Prof. *Möbius* nennt Seite 143. die Ebene, welche ich *Momenten-Ebene* nenne, *Null-Ebene*, weil das Drehmoment der Linien, welche in der Ebene liegen und durch den Drehpunct gehen, $= 0$ ist; er nennt den Drehpunct *Nullpunct*. Allein der Name ist von dem Besitze und nicht von dem Nichtbesitze herzunehmen.

digen Drehmomente R_0 dieser Ebene gleich ist. Diese Ebene ist nach No. 15. die Ebene $\mathfrak{A}_0 E_0$. Daher:

36. *Die Projection eines vollständigen Drehmoments* R' *auf die Ebene* $\mathfrak{M}_0$ *ist im allgemeinen nicht dem vollständigen Drehmomente* R_0 *dieser Ebene gleich, sondern nur dann, wenn der Drehpunct* (x' y' z') *jenes Drehmoments* R' *in der Ebene liegt, welche den Mantel der Walze, deren Axe die Hauptdrehlinie ist, im Puncte* $(x_0\, y_0\, z_0)$, *oder in der Linie* E_0 *berührt.*

b. *Momenten-Ebenen in Verbindung.*

16.

Die Gleichung der Momenten-Ebene für den Drehpunct $(x_0 y_0 z_0)$ ist

$$(x-x_0)L_0 + (y-y_0)M_0 + (z-z_0)N_0 = 0.$$

Ist $(x_1 y_1 z_1)$ ein Punct in dieser Ebene, so ist

$$(x_1-x_0)L_0 + (y_1-y_0)M_0 + (z_1-z_0)N_0 = 0,$$

oder, wenn

$$\begin{aligned} L_0 &= L_1 - (y_0-y_1)C + (z_0-z_1)B, \\ M_0 &= M_1 - (z_0-z_1)A + (x_0-x_1)C, \\ N_0 &= N_1 - (x_0-x_1)B + (y_0-y_1)A \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$\alpha. \qquad (x_0-x_1)L_1 + (y_0-y_1)M_1 + (z_0-z_1)N_1 = 0.$$

Werden nun x_0, y_0, z_0 als laufende Coordinaten angenommen, so erhält man die Gleichung einer Ebene

$$37. \qquad (x-x_1)L_1 + (y-y_1)M_1 + (z-z_1)N_1 = 0,$$

in welcher der Punct $(x_1 y_1 z_1)$ liegt, und welche durch den Punct $(x_0 y_0 z_0)$ geht. Da nun diese Gleichung die Gleichung der Momenten-Ebene des Drehpuncts $(x_1 y_1 z_1)$ ist, so ist folgender Satz gefunden:

38. *Die Momenten-Ebene eines Puncts einer andern Momenten-Ebene geht durch den Drehpunct dieser Ebene; oder: Liegt im Durchschnitte zweier Ebenen der Drehpunct einer Ebene, so liegt in diesem Durchschnitte auch der Drehpunct der andern Ebene* *)

Diese Gleichung (37.) nimmt eine andere Gestalt an, wenn die Gleichung (α) von ihr abgezogen wird. Es entsteht die Gleichung

$$39. \qquad (x-x_0)L_1 + (y-y_0)M_1 + (z-z_0)N_1 = 0,$$

---

*) *Möbius*, Seite 151.

wodurch dieselbe Ebene ausgedrückt wird. Man kann also die Momenten-Ebene eines Drehpuncts $(x_1 y_1 z_1)$, der in der Momenten-Ebene des Drehpuncts $(x_0 y_0 z_0)$ liegt, entweder durch die Gleichung (37.), oder durch die Gleichung (39.) darstellen. Aus der Gleichung (38.) folgt unmittelbar folgender Satz:

40. *Die Momenten-Ebenen aller Drehpuncte einer Ebene durchschneiden sich in dem Drehpuncte dieser Ebene* *).

Umgekehrt kann behauptet werden, dass die Drehpuncte aller Momenten-Ebenen, welche sich in dem Drehpuncte $(x_0 y_0 z_0)$ durchschneiden, in der Momenten-Ebene dieses Drehpuncts liegen. Denn die Gleichung einer Momenten-Ebene, deren Drehpunct $(x_1 y_1 z_1)$ ist, ist

$$(x-x_1)L_1 + (y-y_1)M_1 + (z-z_1)N_1 = 0.$$

Soll nun diese durch den gemeinschaftlichen Punct $(x_0 y_0 z_0)$ gehen, so ist

$$(x_0-x_1)L + (y_0-y_1)M_1 + (z_0-z_1)N_1 = 0.$$

Werden beide Gleichungen von einander abgezogen, so entsteht die Gleichung

$$(x-x_0)L_1 + (y-y_0)M_1 + (z-z_1)N_1 = 0.$$

Dieses ist aber die Gleichung einer Ebene (39.), deren Drehpunct in der Momenten-Ebene des Drehpuncts $(x_0 y_0 z_0)$ liegt. Daher:

41. *Die Drehpuncte aller Ebenen, welche sich in einem Puncte durchschneiden, liegen in einer Ebene, und zwar in der Momenten-Ebene des gemeinschaftlichen Puncts* **).

Um mich kurz und bestimmt ausdrücken zu können, nenne ich alle Linien, welche in einer Ebene liegen und durch den Drehpunct dieser Ebene gehen, *Strahlen.* Für diese Strahlen ergibt sich aus (38.) folgende Eigenschaft, die noch später ihre besondere Würdigung finden wird:

42. *Die Momenten-Ebenen aller Puncte eines Strahls durchschneiden sich in diesem Strahle; und umgekehrt: die Drehpuncte aller Ebenen, welche sich in einem Strahle durchschneiden, liegen auch in diesem Strahle.*

Nur die Strahlen (wie ich sie oben bezeichnet habe) besitzen diese Eigenschaft, und keine andere Linien; denn nicht jede Linie kann zum Strahle angenommen werden, oder nicht jede Linie liegt in einer Ebene und geht zugleich durch den Drehpunct dieser Ebene. Soll nämlich die Linie

$$y - y_0 = a(x-x_0), \qquad z - z_0 = a_1(x-x_0)$$

ein Strahl sein, so müssen die fünf Grössen a, a_1, x_0, y_0, z_0 der Gleichung

$$L_0 + aM_0 + a_1 N_0 = 0$$

---

*) *Möbius*, S. 151.

Genüge leisten. Ich werde sogleich diesen Gegenstand in grösserer Allgemeinheit behandeln.

c_1. *Gegenlinien im Allgemeinen.*

17.

Nach (40.) ist der Ort der Durchschnitte der Momenten-Ebenen aller Puncte, welche in einer Ebene liegen, ein Punct: der Drehpunct dieser Ebene; und umgekehrt: der Ort der Drehpuncte aller Ebenen, welche sich in einem Puncte durchschneiden, ist eine Ebene: die Momenten-Ebene dieses Puncts. Es liegt jetzt die Frage sehr nahe: *Wo ist der Ort der Drehpuncte von Ebenen, welche sich in einer Linie durchschneiden?* Die Lösung dieser Aufgabe ist folgende:

Es seien

$$\beta. \qquad y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1$$

die Gleichungen des Durchschnitts der Momenten-Ebene, und

$$(x - x_1) L_1 + (y - y_1) M_1 + (z - z_1) N_1 = 0$$

die Gleichung einer dieser Momenten-Ebenen: man sucht den Ort ihres Drehpuncts $(x_1\ y_1\ z_1)$.

Da die Ebene durch die gegebene Linie gehen soll, so finden folgende Bedingungsgleichungen Statt:

$$L_1 + aM_1 + a_1 N_1 = 0,$$
$$x_1 L + y_1 M + z_1 N - bM_1 - b_1 N_1 = 0,$$

aus welchen sich, wenn entweder z_1 oder y_1 eliminirt wird, die Gleichungen einer geraden Linie ergeben, nämlich:

$$\textbf{43.} \quad \left\{ \begin{array}{c} x_1(n(aC - a_1 B) - l(B - aA)) \\ + y_1(n(a_1 A - C) - m(B - aA)) \\ + n(L + aM + a_1 N) + (bM + b_1 N)(B - aA) \end{array} \right\} = 0 \text{ und}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1(m(aC - a_1 B) - l(a_1 A - C)) \\ + z_1(m(B - aA) - n(a_1 A - C)) \\ + m(L + aM + a_1 N) + (bM + b_1 N)(a_1 A - C) \end{array} \right\} = 0;$$

wo l, m, n dieselbe Bedeutung haben, wie früher in (§. 13.).

Dieses sind die Gleichungen einer geraden Linie, in welcher sich der Drehpunct jeder Ebene befindet, welche durch die gegebene Linie p geht. Daher:

44. *Der Ort der Drehpuncte aller Ebenen, welche sich in einer Linie durchschneiden, ist eine gerade Linie.*

18.

Ich kehre die Aufgabe um, und suche den Ort der Durchschnitte von Momenten-Ebenen, deren Drehpuncte in einer geraden Linie liegen.

Die Gleichungen der Linie, in welcher die Drehpuncte liegen, seien

$$\gamma. \qquad y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1.$$

Sind $(x_0\, y_0 z_0)$, $(x_1 y_1 z_1)$ zwei Puncte der gegebenen Linie, so sind die beiden zugehörigen Momenten-Ebenen

$$(x-x_0)L_0 + (y-y_0)M_0 + (z-z_0)N_0 = 0,$$
$$(x-x_1)L_1 + (y-y_1)M_1 + (z-z_1)N_1 = 0.$$

Die Gleichungen des Durchschnitts dieser beiden Ebenen sind

$$45. \quad \begin{cases} x(-Bh+aK) + y(Ah-K) + Nh + bK = 0, \\ x(-Ch+a_1K) + z(Ah-K) - Mh + b_1K = 0, \\ y(-Ch+a_1K) + z(Bh-aK) + L + (ab_1-a_1b)K = 0; \end{cases}$$

wo h die Bedeutung in (30.) hat.

Da diese Gleichungen unabhängig sind von den Coordinaten der beiden Drehpuncte, so folgt, dass alle Momenten-Ebenen sich in dieser Linie durchschneiden. Daher:

46. *Alle Momenten-Ebenen, deren Drehpuncte in einer geraden Linie liegen, durchschneiden sich in einer und derselben geraden Linie.*

Diese beiden Linien bestimmen sich gegenseitig. Herr Prof. *Möbius* nennt sie *Gegenlinien.* Vergleicht man die Gleichungen (43. und 45.) mit einander, so findet man, dass sie identisch, dass aber ihre Elemente auf verschiedene Weise gruppirt sind. Daher:

47. *Die erste der beiden Gegenlinien enthält die Drehpuncte, deren Momenten-Ebenen sich in der zweiten Gegenlinie durchschneiden, und die zweite Gegenlinie enthält die Drehpuncte, deren Momenten-Ebenen sich in der ersten Gegenlinie durchschneiden* *).

19.

Diese Gegenlinien verdienen eine grössere Aufmerksamkeit, als ihnen bisher zu Theil wurde. Ich werde hier eine ihrer Haupt-Eigenschaften entwickeln, von welcher ich später wichtige Anwendungen machen werde. Ich suche nämlich die Gleichungen der Linie, welche zu beiden Gegenlinien senkrecht ist, oder welche durch die beiden nächsten Puncte zweier Gegenlinien geht.

---

*) *Möbius* Statik, Seite 152.

$(x_0\ y_0\ z_0)$ sei einer dieser nächsten Puncte, und

$$y - y_0 = \mu(x - x_0), \qquad z - z_0 = \mu_1(x - x_0)$$

seien die Gleichungen der ersten, also nach No. (45.),

$$x(-Bh + \mu K) + y(Ah - K) + Nh + (-\mu x_0 + y_0)K = 0,$$
$$x(-Ch + \mu_1 K) + z(Ah - K) - Mh - (-\mu_1 x_0 + z_0)K = 0$$

die Gleichungen der zweiten Gegenlinie; wo

$$h = L_0 + \mu M_0 + \mu_1 N_0$$

ist. Die Gleichungen der Linie, welche durch ihre beiden nächsten Puncte geht, seien

$$y - y_0 = \delta(x - x_0),$$
$$z - z_0 = \delta_1(x - x_0).$$

Es sind hier nun die Bedingungen zu suchen, welchen die Vorzahlen δ und δ_1 unterworfen sind. Die erste ist

$$\mathfrak{A}. \qquad L_0 + \delta \,.\, M_0 + \delta_1 \,.\, N_0 = 0;$$

denn die verlangte Linie muss in der Momenten - Ebene des Puncts $(x_0\ y_0\ z_0)$ liegen. Die zweite ist

$$\mathfrak{B}. \qquad 1 + \delta \,.\, \mu + \delta_1 \,.\, \mu_1 = 0;$$

denn die genannte Linie ist senkrecht zur ersten Gegenlinie. Und da sie auch zur zweiten Gegenlinie senkrecht ist, so ist die dritte Bedingung:

$$Ah - K + \delta(-Bh + \mu K) + \delta_1(-Ch + \mu_1 K) = 0$$

oder

$$\mathfrak{C}. \qquad A + \delta \,.\, B + \delta_1 \,.\, C = 0.$$

Aus $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{C})$ ergeben sich für δ und δ_1 die Werthe:

$$\mathfrak{D}. \qquad \delta = \frac{AN_0 - CL_0}{CM_0 - BN_0}, \qquad \delta_1 = \frac{BL_0 - AM_0}{CM_0 - BN_0},$$

und die Gleichungen der verlangten Linie sind

$$48. \qquad \frac{x - x_0}{CM_0 - BN_0} = \frac{y - y_0}{AN_0 - CL_0} = \frac{z - z_0}{BL_0 - AM_0};$$

also dieselben, welche früher No. 16. gefunden sind. Daher:

49. *Die Linie, welche zu zweien Gegenlinien senkrecht ist, oder welche durch ihre beiden nächsten Puncte geht, ist senkrecht zur Hauptdrehlinie und geht durch dieselbe; oder: Zwei Gegenlinien sind senkrecht zu einer Linie, welche senkrecht zu der Hauptdrehlinie ist und durch diese geht.*

Die erste Gegenlinie ist durch $x_0, y_0, z_0, \mu, \mu_1$ gegeben. Die Verbindung der Gleichungen ($\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$) giebt folgende:

$$50. \qquad CM_0 - BN_0 + \mu(AN_0 - CL_0) + \mu_1(BL_0 - AM_0) = 0,$$

welche den Zusammenhang der Richtung der ersten Gegenlinie und ihres nächsten Punctes $(x_0\ y_0\ z_0)$ angiebt.

20.

In dem Falle, wenn die beiden Gegenlinien zusammenfallen, muss

$$-Ah+K=\frac{-Bh+aK}{a}=\frac{Nh+bK}{b}=\frac{-Ch+a_1K}{a_1}=\frac{-Mh+b_1K}{b_1}=\frac{Lh+(ab_1-a_1b)K}{ab_1-a_1b},$$

folglich

$$(-A+\frac{B}{a})h=(-A-\frac{N}{b})h=(-A+\frac{C}{a_1})h=(-A+\frac{M}{b_1})h=(-A-\frac{L}{ab_1-a_1b})h=0$$

sein. Also muss entweder $h=0$, oder

$$-A+\frac{B}{a}=-A-\frac{N}{b}=-A+\frac{C}{a_1}=-A+\frac{M}{b_1}=-A-\frac{L}{ab_1-a_1b}=0$$

sein. Die letztere Annahme führt durch Vereinigung der Gleichungen zu der Endgleichung

$$A.L+B.M+C.N=0;$$

was gegen die Voraussetzung ist. Es ist also

$$h=0.$$

Nimmt man in dieser Doppellinie zwei Puncte $(x_0\ y_0\ z_0)$, $(x_1\ y_1\ z_1)$ an, so ist

$$a=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},\qquad a_1=\frac{z_1-z_0}{x_1-x_0},\qquad b=y_0-ax_0,\qquad b_1=z_0-a_1x_0.$$

Werden nun diese Werthe in die Gleichung $h=0$ gesetzt, so ergiebt sich

$$(x_1-x_0)L_0+(y_1-y_0)M_0+(z_1-z_0)N_0=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, dass der Punct $(x_1\ y_1\ z_1)$ in der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ liegt, und also die Doppellinie ein Strahl in der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ ist. Daher:

51. *Die Doppellinie ist ein Strahl einer Momenten-Ebene.*

Dieses stimmt ganz mit Demjenigen überein, was am Ende von (§. **16.**) gefunden wurde.

21.

Wenn aber eine der Gegenlinien die Richtung der gerade fortgehenden Kraft hat, so sind die Momenten-Ebenen aller Puncte dieser Linie parallel, und es findet entweder keine zweite Gegenlinie Statt, oder diese liegt im Unendlichen. Dieses bestätigt auch die obige Rechnung; denn ist in der Gleichung (γ in §. **18.**)

$$a=\frac{B}{A}\quad\text{und}\quad a_1=\frac{C}{A},$$

so verschwinden auch die Vorzahlen von x, y, z in den Gleichungen **(45.)** der Gegenlinie.

22.

c_2. *Gegenlinien, welche zu einander senkrecht sind.*

Die Momenten-Ebenen aller Puncte einer Ebene $\mathfrak{M}_0$ durchschneiden sich in dem Puncte $(x_0\, y_0\, z_0)$, und von diesen Ebenen durchschneiden sich jene in einer geraden Linie; nämlich in einem Strahle, dessen Drehpuncte in diesem Strahle selbst liegen. Allein welche von diesen Momenten-Ebenen durchschneiden sich in der geraden Linie, die durch diesen Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ geht und senkrecht zu der Ebene $\mathfrak{M}_0$ ist? oder: welche Momenten-Ebenen durchschneiden sich in $\mathfrak{A}_0$, der Dreh-Axe der Ebene $\mathfrak{M}_0$?

Zur Beantwortung dieser Frage kann man von der Eigenschaft zweier senkrechter Linien (hier Gegenlinien), oder von der Eigenschaft zweier senkrechten Ebenen ausgehen. Es soll der letzte Weg gewählt werden. Die Gleichung der Ebene $\mathfrak{M}_0$ ist

$$(x-x_0)L_0 + (y-y_0)M_0 + (z-z_0)N_0 = 0;$$

und ist $(x_1\, y_1\, z_1)$ ein Punct dieser Ebene, so ist

$$(x-x_0)L_1 + (y-y_0)M_1 + (z-z_0)N_1 = 0$$

die Gleichung seiner Momenten-Ebene. Die Bedingungsgleichung für den senkrechten Stand dieser Ebene ist

$$L_0 . L_1 + M_0 . M_1 + N_0 . N_1 = 0.$$

Die Grössen L_1, M_1, N_1 ersetze ich durch andere, nemlich durch

$$\left.\begin{aligned} &L_0(L_0-(y_1-y_0)C + (z_1-z_0)B) \\ +\, &M_0(M_0-(z_1-z_0)A + (x_1-x_0)C) \\ +\, &N_0(N_0-(x_1-x_0)B + (y_1-y_0)A) \end{aligned}\right\} = 0,$$

und vertausche x_1, y_1, z_1 gegen x, y, z. Die Gleichung, welche hierdurch entsteht, ist

$$\begin{aligned} 52. \qquad &(x-x_0)(CM_0-BN_0) + (y-y_0)(AN_0-CL_0) \\ &+ (z-z_0)(BL_0-AM_0) + R_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Sie drückt eine Ebene aus, welche so beschaffen ist, dass, wenn ein Punct derselben zum Drehpuncte genommen wird, seine Momenten-Ebene zu der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ senkrecht ist, und zwar durch $\mathfrak{A}_0$, durch die Axe dieser Momenten-Ebene geht.

Diese Ebene (**52.**) ist parallel zu der Ebene $\mathfrak{A}_0 E_0$ (**15.**), also auch parallel zu der Hauptdrehlinie.

Die Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ wird von der Ebene (**52.**) in einer Linie durchschnitten, welche durch folgende Gleichungen ausgedrückt wird:

$$53. \quad \begin{cases} (x-x_0)(BR_0^2-M_0K) - (y-y_0)(AR_0^2-L_0K) - N_0R_0^2 = 0, \\ (x-x_0)(CR_0^2-N_0K) - (z-z_0)(AR_0^2-L_0K) + M_0R_0^2 = 0, \\ (y-y_0)(CR_0^2-N_0K) - (z-z_0)(BR_0^2-M_0K) - L_0R_0^2 = 0. \end{cases}$$

Dies sind die Gleichungen einer Linie, welche in der Momenten-Ebene $\mathfrak{M}_0$ liegt, und so beschaffen ist, dass die Momenten-Ebenen ihrer Puncte senkrecht zu der Ebene $\mathfrak{M}_0$ sind und durch die Dreh-Axe $\mathfrak{A}_0$ derselben gehen, und dass mithin die Dreh-Axen dieser Momenten-Ebenen in der Ebene $\mathfrak{M}_0$ liegen.

Diese Linie (53.) und die Dreh-Axe $\mathfrak{A}_0$ sind zwei zu einander senkrechte Gegenlinien.

Die Gleichungen (53.) enthalten R_0, das Drehmoment der Ebene $\mathfrak{M}_0$. Ich suche den Zusammenhang dieses Drehmoments mit den Drehmomenten der eben erwähnten senkrechten Momenten-Ebenen, und gebe deshalb diesen Gleichungen folgende Gestalt:

$$R_0^2(N-Bx+Ay) = K(-(x-x_0)M_0 + (y-y_0)L_0),$$
$$R_0^2(M-Az+Cx) = K(+(x-x_0)N_0 - (z-z_0)L_0),$$
$$R_0^2(L-Cy+Bz) = K(-(y-y_0)N_0 + (z-z_0)M_0).$$

Ich wähle einen bestimmten Punct $(x_1\,y_1\,z_1)$ dieser Linie, und setze deshalb diese bestimmten Coordinaten statt der allgemeinen x, y, z. Die Factoren von R_0^2 werden hiedurch N_1, M_1, L_1. Ich vervielfache (multiplicire) die Gleichungen mit sich selbst, und zähle sie zusammen. Dies giebt

$$R_0^4(L_1^2+M_1^2+N_1^2) = R_0^2K^2((x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2)$$
$$- K^2((x_1-x_8)L_0 + (y_1-y_0)M_0 + (z_1-z_0)N_0)^2.$$

Wird nun die Entfernung der beiden Puncte $(x_0y_0z_0)$, $(x_1y_1z_1) = r_1$ gesetzt, so ist der Factor von $R_0^2K^2$, $= r_1^2$. Der letzte Theil verschwindet; denn $(x_1y_1z_1)$ liegt in der Ebene $\mathfrak{M}_0$. Ich erhalte hiedurch den merkwürdigen Satz:

$$54. \quad R_0 \,.\, R_1 = r_1 \,.\, K,$$

d. h.: *Das Product der beiden vollständigen Drehmomente zweier zu einander senkrechter Momenten-Ebenen, deren Drehpuncte in ihrem gemeinsamen Durchschnitte liegen, gleicht dem Producte aus dem Abstande der beiden Drehpuncte und aus der beständigen Grösse* K *oder* A.L+B.M+C.N.

23.

Jede Linie hat eine Gegenlinie (§§. 17. 18.), aber nicht jede Linie hat einen Drehpunct. Ist es aber möglich, dass eine der beiden Gegenlinien einen Drehpunct hat, ohne dass die andere Gegenlinie einen Drehpunct besässe? Ich

werde diese Frage untersuchen, und beweisen, dass nie eine allein diese Eigenschaft hat. Sind

$$y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1$$

die Gleichungen der ersten Gegenlinie, so muss, im Fall sie einen Drehpunct hat,

$$q.h - p.K = 0$$

sein. Die Gleichungen der zweiten Gegenlinie giebt (45.). Die Bedingungsgleichung, welche Statt finden muss, wenn auch diese Linie einen Drehpunct haben soll, erhält man, wenn man in den Gleichungen (26., 29. und 30.)

$$a = \frac{Bh-aK}{Ah-K}, \quad b = \frac{-Nh-bK}{Ah-K}, \quad a_1 = \frac{Ch-a_1K}{Ah-K}, \quad b_1 = \frac{Mh-b_1K}{Ah-K}$$

setzt. Hierdurch gehen p, q, l, m, n in $p_1, q_1, l_1, m_1, n_1, h_1$ über und die Bedingungsgleichung (29.) in

$$q_1 h_1 - p_1 K = 0.$$

Es findet sich

$$p_1 = \frac{h^2.E^2+p.K^2-2q.h.K}{(Ah-K)^2}, \quad q_1 = \frac{h.E^2-q.K}{Ah-K},$$

$$l_1 = \frac{(h-l)K}{Ah-K}, \quad m_1 = \frac{-mK}{Ah-K}, \quad n_1 = \frac{-nK}{Ah-K}, \quad h_1 = \frac{h.K}{Ah-K},$$

und zuletzt

$$q_1 h_1 - p_1 K = \frac{K^2(q.h-p.K)}{(Ah-K)^2}.$$

Ist also $qh - pK = 0$, so ist auch $q_1 h - p_1 K = 0$. Daher:

55. *Hat eine der beiden Gegenlinien einen Drehpunct, so hat auch die andere Gegenlinie einen Drehpunct.*

Die Gegenlinien zerfallen also in zwei Arten: in solche, welche keinen Drehpunct haben, und in solche, deren jede einen Drehpunct hat.

Bei den letztern, deren jede Gegenlinie einen Drehpunct hat, kann, wenn

$$y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1$$

die Gleichungen der ersten Gegenlinie sind, da

$$h = \frac{pK}{q}$$

ist, den Gleichungen der zweiten Gegenlinie folgende Gestalt gegeben werden:

56.
$$\begin{cases} x(Bp-aq) - y(Ap-q) - Np - bq = 0, \\ x(Cp-a_1q) - z(Ap-q) + Mp - b_1q = 0, \\ y(Cp-a_1q) - z(Bp-aq) - Lq - (ab_1 - a_1b)p = 0, \end{cases}$$

wo, wie früher festgesetzt,

$$1 + a^2 + a_1^2 = p, \qquad A + aB + a_1C = q \quad \text{ist.}$$

24.

Aus den Gleichungen für die beiden Gegenlinien in (§. 18.) ergiebt sich der Winkel, den sie bilden. Wird dieser durch (Gg) bezeichnet, so ist

$$57. \qquad \cos(Gg) = \frac{h.q - p.K}{p^{\frac{1}{2}}.(h^2E^2 + pK^2 - 2qhK)^{\frac{1}{2}}},$$

wo p, q, h die frühere Bedeutung haben.

Ist nun $hq - p\boldsymbol{K} = 0$, so ist dieser Winkel $= 90^0$. In diesem Falle haben aber die Gegenlinien die Eigenschaft der Dreh-Axen; daher:

58. *Haben die Gegenlinien die Eigenschaft der Dreh-Axen, so sind sie zu einander senkrecht; und umgekehrt: sind die Gegenlinien zu einander senkrecht, so haben sie die Eigenschaft der Dreh-Axen.*

Der Drehpunct $(x_0\, y_0\, z_0)$ bestimmt die Dreh-Axe (3.), und zugleich die Gegenlinie (58.), welche zu jener senkrecht ist. Daher:

59. *Ein Punct, als Drehpunct angenommen, bestimmt zwei zugehörige zu einander senkrechte Gegenlinien.*

Da die Gegenlinien, welche zu einander senkrecht sind, die Eigenschaft der Dreh-Axen haben, so ist, wenn $(x_0\, y_0\, z_0)$ der Drehpunct der ersten und $(x_1\, y_1\, z_1)$ der Drehpunct der zweiten Gegenlinie ist, nach (5.):

$$K = R_0 \,.\, \boldsymbol{E} \,.\, \cos(g\boldsymbol{E}) = R_1 \,.\, \boldsymbol{E} \,.\, \cos(G\boldsymbol{E}),$$

mithin

$$\frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_1^2} = \frac{E^2}{K^2}(\cos(g\boldsymbol{E})^2 + \cos(\boldsymbol{GE})^2).$$

Da nun die Gegenlinien sich in einer zur Hauptdrehlinie senkrechten Linie durchschneiden, so ergänzen sich die Winkel $(g\boldsymbol{E})$ und $(\boldsymbol{GE})$ zu 90^0, daher der letzte Factor $= 1$ ist. Es ist folglich

$$60. \qquad \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_1^2} = \left(\frac{E}{K}\right)^2.$$

Wird diese Gleichung mit dem früher gefundenen Satze in Betreff des kleinsten Drehmoments R_k (9.) in Verbindung gebracht, so erhält man die Gleichung

$$61. \qquad \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_1^2} = \frac{1}{R_k^2} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{R_k}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{R_k}{R_1}\right)^2 = 1,$$

und in Verbindung mit dem Satze (56.) folgende:

$$62. \qquad R_0^2 + R_1^2 = r^2 \,.\, \boldsymbol{E}^2;$$

wo r der kleinste Abstand der Gegenlinien ist.

B. *Unvollständiges Drehmoment.*

25.

Nur die Puncte einer zur Hauptdrehlinie parallelen Linie haben gleiche vollständige Drehmomente; die vollständigen Drehmomente der Puncte jeder andern Linie sind ungleich. Unter diesen ist bei einer Linie A, welche die Eigenschaft einer Dreh-Axe hat, dasjenige vollständige Drehmoment das kleinste, welches dem Drehpuncte der Linie A angehört, und dessen Momenten-Ebene zu der Linie A senkrecht ist. Wenn die vollständigen Drehmomente der übrigen Puncte dieser Linie A auf die Ebene dieses kleinsten vollständigen Drehmoments oder auf eine Ebene, die zu der Linie A senkrecht ist, projicirt werden, so sind alle diese Projectionen gleich; und zwar gleich dem genannten kleinsten vollständigen Drehmomente (36.).

Bei einer andern Linie z', welche die Eigenschaft einer Dreh-Axe nicht hat, haben die Puncte derselben, als Drehpuncte, auch verschiedene vollständige Drehmomente; diese sind bei den Puncten, welche der Hauptdrehlinie des Kräftensystems näher liegen, kleiner als bei den entfernteren Puncten. Aber keine Momenten-Ebene, welche einem Puncte dieser Linie angehört, kann senkrecht zu dieser Linie z' sein. Auch bei dieser Linie $\mathfrak{z}'$ werde ich die vollständigen Drehmomente ihrer Puncte auf eine Ebene projiciren, die senkrecht zu dieser Linie ist, und zeigen, dass alle diese Projectionen gleich sind.

In dieser Linie $\mathfrak{z}'$ werde ein Punct $(x_0\, y_0\, \mathfrak{z}_0)$ angenommen, und durch diesen Punct eine Ebene gesetzt, senkrecht zu der genannten Linie; $\mathfrak{A}_0$ sei seine Dreh-Axe, R_0 sein vollständiges Drehmoment und V die Projection dieses Drehmoments auf die erwähnte Ebene. Diese Projection kann angegeben werden durch

$$63. \qquad V = R_0 \,.\, \cos\,(\mathfrak{A}_0 \mathfrak{z}'),$$

oder wenn

$$\cos(\mathfrak{A}_0\mathfrak{z}') = \cos(\mathfrak{A}_0 x)\cos(\mathfrak{z}'x) + \cos(\mathfrak{A}_0 y)\cos(\mathfrak{z}'y) + \cos(\mathfrak{A}_0\mathfrak{z})\cos(\mathfrak{z}'\mathfrak{z})$$
$$= \frac{L_0}{R_0}\,.\,\cos(\mathfrak{z}'x) + \frac{M_0}{R_0}\,.\,\cos(\mathfrak{z}'y) + \frac{N_0}{R_0}\,.\,\cos(\mathfrak{z}'\mathfrak{z})$$

gesetzt wird, durch

$$64. \qquad V = L_0\,.\cos(z'x) + M_0\,.\cos(z'y) + N_0\,.\cos(\mathfrak{z}'\mathfrak{z}).$$

Ich werde nun nachweisen, dass V sich nicht ändert, wenn ein anderer Punct $(x_1\, y_1\, z_1)$ in derselben Linie z' angenommen wird. Zu diesem Zwecke ist es nöthig, zu zeigen, dass

$$(L_0 - L_1)\cos(\mathfrak{z}'x) + (M_0 - M_1)\cos(\mathfrak{z}'y) + (N_0 - N_1)\cos(\mathfrak{z}'\mathfrak{z}) = 0 \quad \text{ist.}$$

Ich nehme an, dass

$$y = ax + b, \qquad z = a_1 x + b_1$$

die Gleichungen der Linie z' seien, dass also auch

$$y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0), \qquad z_1 - z_0 = a_1(x_1 - x_0),$$

$$\cos(\mathfrak{z}'x) = \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}, \qquad \cos(\mathfrak{z}'y) = \frac{a}{p^{\frac{1}{2}}}, \qquad \cos(\mathfrak{z}'\mathfrak{z}) = \frac{a_1}{p^{\frac{1}{2}}},$$

mithin

$$\boldsymbol{L}_0 - \boldsymbol{L}_1 = (y_1 - y_0)\,C - (\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_0)\,B = (x_1 - x_0)\,(aC - a_1 B),$$
$$M_0 - M_1 = (\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_0)\,A - (x_1 - x_0)\,C = (x_1 - x_0)\,(a_1 A - C),$$
$$N_0 - N_1 = (x_1 - x_0)\,B - (y_1 - y_0)\,A = (x_1 - x_0)\,(B - aA) \quad \text{sei.}$$

Diese Werthe in die obige Gleichung gesetzt, geben

$$0 = 0.$$

Daher:

65. *Wenn die vollständigen Drehmomente der Puncte einer Linie auf eine Ebene, welche senkrecht zu dieser Linie ist, projicirt werden, so sind alle diese Projectionen gleich.*

Diese Projection V ist das unvollständige Drehmoment, oder kurz, das Drehmoment einer Linie, welches entweder durch das Product (63.), oder durch die drei Producte (64.) angegeben werden kann.

26.

Ich werde jetzt zeigen, wie das unvollständige Drehmoment einer Linie, welche in einer Ebene liegt, aus dem Drehmomente dieser Ebene hergeleitet werden kann.

Es sei C der Drehpunct der Ebene $\mathfrak{M}_0$, AB die Linie in dieser Ebene, welche die Drehpuncte enthält, deren Dreh-Axen in dieser Ebene liegen (53.); $\boldsymbol{EG}$ sei eine dieser Dreh-Axen. Der Abstand $\boldsymbol{EC}$ sei $= r$. Ich suche das Drehmoment der Linie $\boldsymbol{EF}$, welche in dieser Ebene liegt, mit der Dreh-Axe $\boldsymbol{EG}$ den Winkel μ bildet, und deren Abstand von C, $= u$ ist.

Ist V das unvollständige Drehmoment der Linie $\boldsymbol{EF}$, und R_1 das Drehmoment des Puncts $\boldsymbol{E}$, so ist

$$V = R_1 \,.\, \cos\mu = \frac{u.R_1}{r}.$$

Diese und die Gleichung (54.) vereint, geben

$$66. \qquad V = u \,.\, \frac{K}{R_0}.$$

Nach dieser Gleichung kann das unvollständige Drehmoment einer Linie aus

dem Drehmomente R_0 einer Ebene, in welcher die Linie liegend angenommen wird, und aus u, dem Abstande der Linie von dem Drehpuncte C der Ebene, gefunden werden.

27.

Von der Gleichung (66.) lassen sich schöne Anwendungen auf die Gegenlinien machen. Zuerst nehme ich zwei Puncte $(x_0\ y_0\ z_0)$ und $(x_1\ y_1\ z_1)$ in einer und derselben Linie an, und fälle von ihnen Senkrechte u_0, u_1 auf ihre Gegenlinie. Ist nun V_1 das unvollständige Drehmoment dieser Gegenlinie, so ist nach (66.)

$$V_1 = u_0 \cdot \frac{K}{R_0} \text{ und auch } = u_1 \cdot \frac{K}{R_1},$$

mithin

$$67. \quad \frac{u_0}{R_0} = \frac{u_1}{R_1} \quad \text{oder} \quad \frac{R_0}{R_1} = \frac{u_0}{u_1};$$

d. h.: *Die vollständigen Drehmomente zweier Drehpuncte einer Linie messen sich so oft [sind dieselben Vielfachen von einander] wie die senkrechten Linien, welche von diesen Drehpuncten auf ihre Gegenlinie gefället werden.*

28.

Es sei V_0 das unvollständige Drehmoment der ersten und V_1 das der zweiten Gegenlinie;

$(x_1\ y_3\ z_1)$ sei ein Punct in der ersten und $(x_0\ y_0\ z_0)$ ein Punct in der zweiten;

u_1 die Senkrechte, von $(x_1\ y_1\ z_1)$ auf die zweite, und

u_0 die Senkrechte, von $(x_0\ y_0\ z_0)$ auf die erste Gegenlinie gefället.

Es ist nach (70.)

$$68. \quad \frac{V_0 . R_0}{u_0} = \frac{V_1 . R_1}{u_1} = K;$$

d. h.: *Das Product aus dem vollständigen Drehmomente eines Puncts einer Linie und aus dem unvollständigen Drehmomente der Gegenlinie, gemessen [dividirt] durch den Abstand des Puncts von dieser Gegenlinie, ist eine beständige Grösse, und zwar* = K.

Sind nun $(x_0\ y_0\ z_0)$ und $(x_1\ y_1\ z_1)$ die beiden Puncte, in welchen die Linie, die zu beiden Gegenlinien senkrecht ist, diese Gegenlinien durchschneidet, so ist $u_0 = u_1$, mithin

$$69. \quad \frac{V_0}{V_1} = \frac{R_1}{R_0},$$

d. h.: *Die unvollständigen Drehmomente zweier Gegenlinien messen sich*

so oft [sind dieselben Vielfachen von einander] wie die Drehmomente der beiden Endpuncte des kürzesten Abstandes der beiden Gegenlinien.

Zuletzt bezeichne ich die erste Linie mit G_0, die zweite mit G_1, und verbinde mit der so eben gefundenen Gleichung den frühern Satz (63.), nemlich:

$$V_0 = R_1 \,.\, \cos(\mathfrak{A}_1 G_0), \qquad V_1 = R_0 \,.\, \cos(\mathfrak{A}_0 G_1).$$

Dies giebt folgende Gleichung:

$$70. \qquad (\mathfrak{A}_1 G_0) = (\mathfrak{A}_0 G_1),$$

d. h.: *Die Dreh-Axen der Endpuncte des kürzesten Abstandes der beiden Gegenlinien bilden mit den Gegenlinien gleiche Winkel.*

29.

Ausser dem Kräftensysteme $P_0, P_1, \ldots$ werde noch eine Kraft Q_0, in einer Linie q am Angriffspuncte $(x_0\, y_0\, z_0)$ wirkend, angenommen. Die Projectionen dieser Kraft auf die Coordinaten-Axen x, y, z seien durch

$$Q_x, \quad Q_y, \quad Q_z$$

und die unvollständigen Drehmomente dieser Kraft Q_0 um die Axen x, y, z durch

$$Q_{yz}, \quad Q_{xz}, \quad Q_{xy}$$

bezeichnet. Das unvollständige Drehmoment des ganzen Kräftensystems $P_0, P_1, \ldots$ um die Axe q ist

$$V_0 = L_0 \,.\, \cos(qx) + M_0 \,.\, \cos(qy) + N_0 \,.\, \cos(qz).$$

Wird diese Gleichung mit Q_0 vervielfacht [multiplicirt] und berücksichtigt, dass

$$Q_0 \,.\, \cos(qx) = Q_x, \qquad Q_0 \,.\, \cos(qy) = Q_y, \qquad Q \,.\, \cos(qz) = Q_z$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$V_0 . Q_0 = Q_x(L - y_0 C + z_0 B) + Q_y(M - z_0 A + x_0 C) + Q_z(N - x_0 B + y_0 A)$$
$$= Q_x L + Q_y M + Q_z N + A(y_0 Q_z - z_0 Q_y) + B(z_0 Q_x - x_0 Q_z) + C(x_0 Q_y - y_0 Q_x).$$

Die Unterschiede der vorstehenden Producte sind die mit Q_{yz}, Q_{xz}, Q_{xy} bezeichneten unvollständigen Drehmomente der Kraft Q_0. Es ist folglich

$$71. \qquad V_0 . Q_0 = A . Q_{yz} + B . Q_{xz} + C . Q_{xy} + Q_x . L + Q_y . M + Q_z . N.$$

Hier bedeuten

A, B, C die Projectionen aller Kräfte P .... auf x, y, z;
Q_x, Q_y, Q_z - - der Kraft Q_0 .... - - - -;
L, M, N - - aller Drehmomente von $P_0, P_1, \ldots$ um die Axe x, y, z;
Q_{yz}, Q_{xz}, Q_{xy} - - des Drehmoments der Kraft Q_0 - - - - - - -;

Die erstern mit den letztern und die zweiten mit den dritten vervielfacht [multiplicirt], geben Producte, deren Summe gleich ist dem Producte aus der

Kraft Q_0 und aus dem unvollständigen Drehmomente des ganzen Kräftensystems $P, P_1, \ldots$ um die Axe q, in welcher die Kraft Q_0 wirkt.

Dieser Satz ist die Grundlage eines viel allgemeineren, welcher entsteht, wenn mehrere Kräfte $Q_0, Q_1, \ldots$ in verschiedenen Richtungen $q_0, q_1, \ldots$ an verschiedenen Angriffspuncten wirkend angenommen werden, und wenn jede Kraft $Q_0, Q_1, \ldots$ mit dem unvollständigen Drehmomente der Kräfte $P_0, P_1, \ldots$ um die Axen $q_0, q_1, \ldots$, in welchen die Kräfte $Q_0, Q_1, \ldots$ wirken, vervielfacht [multiplicirt] wird. Es entstehen eben so viele Gleichungen, als oben gefunden; ihre Summe ist

$$\Sigma(V.Q) = A.\Sigma Q_{yz} + B.\Sigma Q_{xz} + C.\Sigma Q_{xy} + L.\Sigma Q_x + M.\Sigma Q_y + N.\Sigma Q_z,$$

oder, wenn

ΣQ_x, ΣQ_y, ΣQ_z durch A', B', C'

und ΣQ_{yz}. ΣQ_{xz}, ΣQ_{xy} durch L', M', N'

bezeichnet werden:

$$72. \quad V_0.Q_0 + V_1.Q_1 + V_2.Q_2 + \ldots. = A.L' + B.M' + C.N' + A'.L + B'.M + C'N.$$

Diese Gleichung ist merkwürdig; es sind nämlich zwei Kräftensysteme $P, \ldots.$ und $Q, \ldots.$ vorhanden; die ersteren werden auf Ebenen, welche senkrecht zu den letzteren oder senkrecht zu $q_0, q_1, \ldots.$ sind, projicirt, und dann werden die so entstandenen unvollständigen Drehmomente derselben mit der Kraft, worauf die Ebene senkrecht ist, vervielfacht [multiplicirt]. Die Summe dieser Producte gleicht den Producten, die entstehen, wenn

A, B, C mit L', M', N'

und A', B', C' mit L, M, N

multiplicirt werden.

Wenn die Kräfte $Q_0, Q_1, \ldots.$ im Gleichgewicht sind, so ist

$$A' = B' = C' = L' = M' = N' = 0,$$

und also

$$73. \quad V_0.Q + V_1.Q_1 + V_2.Q_2 + \ldots. = 0;$$

d. h.: *Wenn Kräfte* $Q_0, Q_1, \ldots.$ *im Gleichgewicht sind, und jede Kraft als Axe eines andern Kräftensystems* $P, P_1, \ldots.$ *betrachtet wird, wodurch eben so viele unvollständige Drehmomente als Axen oder als Kräfte* $Q_0, Q_1, \ldots.$ *entstehen, und wenn jedes dieser unvollständigen Drehmomente mit der Kraft, welche längst der zugehörigen Axe wirkt, multiplicirt wird, so ist die Summe dieser Producte* $= 0$.

Herr Prof. *Möbius* findet Seite **164**, **1**. Thl. seiner Statik diesen speciellen Fall.

Wenn $Q_0, Q_1, \ldots$ und $P_0, P_1, \ldots$ ihre Rollen wechseln, so entstehen dieselben Producte, wie in (72.); daher ist

74. $$V_0.Q_0 + V_1.Q_1 + V_2.Q_2 + \ldots = U_0.P_0 + U_1.P_1 + U_2.P_2 + \ldots$$
$$= A.L' + B.M' + C.N' + A'.L + B'.M + C'.N;$$

wo

$V_0, V_1, \ldots$ die unvollständigen Drehmomente der Kräfte $P_0, P_1, \ldots$ bedeuten, um die Axen $q_0, q_1, \ldots$, in welchen die Kräfte $Q_0, Q_1, \ldots$ wirken, und $U_0, U_1, \ldots$ die unvollständigen Drehmomente der Kräfte $Q_0, Q_1, \ldots$ um die Axen $p_1, p_1, \ldots$, in welchen die Kräfte $P_0, P_1, \ldots$ wirken.

Zu diesem allgemeinsten Satze bin ich gekommen, indem ich nicht vom Gleichgewichte ausging.

C. *Ein Kräftensystem durch zwei andere Kräfte ersetzt.*

30.

Von diesem Gegenstande habe ich in Heft **3.**, Band **32.** dieser Zeitschrift den Hauptsatz veröffentlicht, nämlich: *Die beiden Kräfte, wodurch ein Kräftensystem ersetzt werden kann, oder welche diesem das Gleichgewicht halten, gehen senkrecht durch einen Hebelsarm, der an der Hauptdrehlinie senkrecht befestigt ist.* Ich will diesen Satz auf den, welchen ich oben bei den Gegenlinien gefunden, zurückführen, und zugleich mehrere andere beifügen.

$Q_,$, $Q_{,,}$ sind auch hier die beiden in Rede stehenden Kräfte; $X_,$, $X_{,,}$, $Y_,$, $Y_{,,}$, $Z_,$, $Z_{,,}$ sind ihre Seitenkräfte, und

$$A = X_, + X_{,,}, \qquad B = Y_, + Y_{,,}, \qquad C = Z_, + Z_{,,},$$
$$L = y_,Z_, - z_,Y_, + y_{,,}Z_{,,} - z_{,,}Y_{,,},$$
$$M = z_,X_, - x_,Z_, + z_{,,}X_{,,} - x_{,,}Z_{,,},$$
$$N = x_,Y_, - y'X_, + x_{,,}Y_{,,} - y_{,,}X_{,,}$$

ihre Bedingungsgleichungen. Aus diesen erhält man durch Elimination die Gleichung

75. $$L(x_, - x_{,,}) + M(y_, - y_{,,}) + N(z_, - z_{,,})$$
$$= A(y_,z_{,,} - y_{,,}z_,) + B(z_,x_{,,} - z_{,,}x_,) + C(x_,y_{,,} - x_{,,}y_,),$$

welche auch folgende Gestalt annehmen kann:

76. $$(x_, - x_{,,})L_{,,} + (y_, - y_{,,})M_, + (z_, - z_{,,})N_{,,} = 0,$$

oder

$$77. \qquad (x_{,,}-x_{,})L' + (y_{,,}-y_{,})M' + (z_{,,}-z_{,})N' = 0.$$

Zwei Kräfte $Q'_{,}$, $Q'_{,,}$, die durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen, den Kräften $Q_{,}$, $Q_{,,}$ gleich und parallel sind, und der Mittelkraft E das Gleichgewicht halten, werden, wie auch am angeführten Orte geschehen, zu Hülfe genommen.

Ist der Punct $(x_{,,}\, y_{,,} z_{,,})$ fest, und sind $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ veränderlich, so giebt die Gleichung (76.) eine Ebene $\mathfrak{M}_{,,}$ an, deren Drehpunct dieser feste Punct ist, und in welcher zugleich der Punct $(x, y, z_{,})$ liegt.

Ist der Punct $(x, y, z_{,})$ fest, und sind $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ veränderlich, so giebt die Gleichung (77.) eine Ebene $\mathfrak{M}_{1}$ an, deren Drehpunct $(x, y, z_{,})$ ist, und welche durch den Punct $(x_{,,}\, y_{,,}\, z_{,,})$ geht.

Die Angriffspuncte der beiden Kräfte $Q_{,}$, $Q_{,,}$ liegen also in dem Durchschnitte der beiden Momenten-Ebenen $\mathfrak{M}_{,}$ und $\mathfrak{M}_{,,}$ oder der Ebenen (76., 77.).

Dass $Q_{,}$ in der Ebene (76.) und $Q_{,,}$ in der Ebene $Q_{,,}$ liegt, ergiebt sich auf folgende Weise: Ich lege die Gleichung

$$x \,.\, L_{,,} + y \,.\, M_{,,} + z \,.\, N_{,,} = 0$$

zum Grunde. Sie giebt eine Ebene an, welche zu der Ebene (76.) parallel ist und durch den Anfangspunct der Coordinaten geht. Ihr geschieht Genüge, wenn $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ statt x, y, z gesetzt werden; in ihr liegt also die Kraft $Q'_{,}$. Da nun $Q_{,}$ zu $Q'_{,}$ parallel und auch die Ebene (76.) zu dieser Ebene parallel ist, und da in der Ebene (76.) der Angriffspunct $(x, y, z_{,})$ von $Q_{,}$ liegt, so liegt auch die Kraft $Q_{,}$ in der Ebene (76.).

Eben so wird bewiesen, dass die Kraft $Q_{,,}$ in der Ebene (77.) liegt. Daher:

78. *Die Kräfte* $Q_{,}$, $Q_{,,}$ *liegen in dem Durchschnitte zweier Momenten-Ebenen* $\mathfrak{M}_{,}$, $\mathfrak{M}_{,,}$, *welche durch die Gleichungen* (76. *und* 77.) *angegeben werden*; *und zwar liegt* $Q_{,}$ *in der Ebene* $\mathfrak{M}_{,,}$ *und* $Q_{,,}$ *in der Ebene* $\mathfrak{M}_{,}$.

31.

Es ist noch übrig, zu beweisen, dass die beiden Linien, in welchen die Kräfte $Q_{,}$, $Q_{,,}$ wirken, Gegenlinien sind *). Von diesem Satze lässt sich, da jetzt die Gleichungen für Gegenlinien entwickelt sind, folgender Beweis geben:

Die Gleichungen der ersten Gegenlinie sind

*) *Möbius*, Journal der Math., Bd. X., Seite 338.

$$y = \frac{Y_{,,}}{X_{,,}} . x - \frac{N - x_{,} Y_{,} + y_{,} X_{,}}{X_{,,}}, \qquad z = \frac{Z_{,,}}{X_{,,}} . x + \frac{M - z_{,} X_{,} + x_{,} Z_{,}}{X_{,,}},$$

mithin ist nach (§. 18.):

$$a = \frac{Y_{,,}}{X_{,,}}, \quad a_{,} = \frac{Z_{,,}}{X_{,,}}, \quad b = \frac{-N + x_{,} Y_{,} - y_{,} X_{,}}{X_{,,}}, \quad b_{,} = \frac{M - z_{,} X_{,} + x_{,} Z_{,}}{X_{,,}};$$

Werden nun diese Werthe von $a, a_{,}, b, b'$ in die Gleichungen (43. oder 45.) eingeführt, so entstehen, nach gehörigen Reductionen, für die zweite Gegenlinie die Gleichungen

$$\frac{x - x_{,}}{X_{,}} = \frac{y - y_{,}}{Y_{,}} = \frac{z - z_{,}}{Z_{,}}.$$

Diese sind aber die Gleichungen der Linie, in welcher die Kraft $Q_{,}$ liegt. Daher:

79. *Die beiden Kräfte* $Q_{,}, Q_{,,}$, *durch welche das Kräftensystem ersetzt werden kann, wirken in zwei Gegenlinien.*

Mit dieser Eigenschaft ist nach (49.) nothwendig folgende verbunden:

80. *Die beiden Linien, in welchen die das Kräftensystem ersetzenden Kräfte* $Q_{,}, Q_{,,}$ *wirken, sind senkrecht zu einer Linie, welche rechtwinklicht die Hauptdrehlinie durchdringt.*

32.

Zu den Momenten der Kräfte $Q_{,}, Q_{,,}$ übergehend, bezeichne ich die Linien, in welchen sie wirken, mit $q_{,}, q_{,,}$, das unvollständige Drehmoment der Kraft $Q_{,,}$ um die Axe $q_{,}$ mit V', und das Drehmoment der Kraft $Q_{,}$ um die Axe $q_{,,}$ mit V''. Es ist

$$V' = L' . \cos(Q_{,} x) + M' . \cos(Q_{,} y) + N' . \cos(Q_{,} z),$$

wo

$$L_{,} = (y_{,,} - y_{,}) Z_{,,} - (z_{,,} - z_{,}) Y_{,,},$$
$$M_{,} = (z_{,,} - z_{,}) X_{,,} - (x_{,,} - x_{,}) Z_{,,},$$
$$N' = (x_{,,} - x_{,}) Y_{,,} - (y_{,,} - y_{,}) X_{,,}$$

und

$$\cos(Q_{,} x) = \frac{X_{,}}{Q_{,}}, \qquad \cos(Q_{,} y) = \frac{Y_{,}}{Q_{,}}, \qquad \cos(Q_{,} z) = \frac{Z_{,}}{Q_{,}}.$$

Wird die Multiplication wirklich vorgenommen, so entstehen dieselben Producte, als wenn die Gleichungen im Anfange des (§. 30.) mit $X_{,} + X_{,,}$, $Y_{,} + Y_{,,}$, $Z_{,} + Z_{,,}$ vervielfacht werden. Das Gleiche entsteht bei V'', daher:

81. $$Q_{,} . V' = Q_{,,} . V'' = A . L + B . M + C . N = K,$$

d. h.: *Sind* $q_{,}, q_{,,}$ *die Linien, in welchen die Kräfte* $Q_{,}, Q_{,,}$ *wirken, so ist das Product aus dem unvollständigen Drehmomente von* $Q_{,,}$ *um die Axe* $q_{,}$ *und aus der Kraft* $Q_{,}$ *gleich dem unvollständigen Drehmomente von* $Q_{,}$

um die Axe $q_{,,}$ *und aus der Kraft* $Q_{,,}$, *und gleich der Summe der Producte* $A.L + B.M + C.N$*).

Der Satz lässt sich noch auf eine andere Weise begründen. Vom Anfangspuncte der Coordinaten fälle man senkrechte Linien $S_,$, $S_{,,}$ auf die beiden parallelen Ebenen (in dem 3. Hefte des 32. Bandes dieser Zeitschrift, Seite 227. mit (3. und 9.) bezeichnet), in welchen die Kräfte $Q_{,,}$ und $Q_,$ liegen; dann ist

$$S_{,,}^2 = \frac{(L.X_, + M.Y_, + N.Z_,)^2}{(Y_,Z_{,,} - Y_{,,}Z_,)^2 + (Z_,X_{,,} - Z_{,,}X_,)^2 + (X_,Y_{,,} - X_{,,}Y_,)^2}.$$

Dem Nenner kann folgende Gestalt gegeben werden:

$$(X_,^2 + Y_,^2 + Z_,^2)(X_{,,}^2 + Y_{,,}^2 + Z_{,,}^2) - (X_,X_{,,} + Y_,Y_{,,} + Z_,Z_{,,})^2.$$

Das erste Product ist $= Q_,^2.Q_{,,}^2$; das zweite ist

$$= Q_,^2 Q_{,,}^2(\cos(Q_,x)\cos(Q_{,,}x) + \cos(Q_,y)\cos(Q_{,,}y) + \cos(Q_,z)\cos(Q_{,,}z))$$
$$= Q_,^2.Q_{,,}^2.\cos(Q_,Q_{,,})^2.$$

Der Nenner ist also $= Q_,^2 Q_{,,}^2(1 - \cos(Q_,Q_{,,})^2) = Q_,^2 Q_{,,}^2 \sin(Q_,Q_{,,})$, Es ist daher der Zähler

$$L.X_, + M.Y_, + N.Z_, = S_{,,}.Q_,.Q_{,,}.\sin(Q_,Q_{,,}).$$

Eben so ist

$$L.X_{,,} + M.Y_{,,} + N.Z_{,,} = S_,.Q_,.Q_{,,}.\sin(Q_,Q_{,,}).$$

Beide Gleichungen, durch Zusammenzählen vereint, geben folgende:

82. $$A.L + B.M + C.N = (S_, + S_{,,}).Q_,.Q_{,,}.\sin(Q_,Q_{,,}).$$

$S_, + S_{,,}$ ist der Abstand der beiden parallelen Ebenen, in welchen die Kräfte liegen, und gleich dem senkrechten Abstande der beiden Linien $q_,$, $q_{,,}$. Es ist daher

$$(S_, + S_{,,}) \,.\, Q_, \,.\, \sin\,(Q_,Q_{,,})$$

das Drehmoment der Kraft $Q_,$ um die Axe $q_{,,}$ und

$$(S_, + S_{,,}) \,.\, Q_{,,} \,.\, \sin\,(Q_,Q_{,,})$$

das Drehmoment der Kraft $Q_{,,}$ um die Axe $q_,$. Wird nun jenes mit $Q_{,,}$ und dieses mit $Q_,$ multiplicirt, so entsteht aus (82.) die Gleichung (81.); jene hat also mit dieser dieselbe Bedeutung.

33.

Vor allem ist der Fall zu würdigen, wenn die beiden Kräfte $Q_,$, $Q_{,,}$, durch welche das Kräftensystem ersetzt werden soll, zu einander senkrecht sind; denn in diesem Falle finden merkwürdige Relationen Statt. Zuerst

*) Diesen Satz gab zuerst *H. Chasles* im XVIII. Bd. No. 12. der Annalen von *Gergonne*.

bemerke ich, dass nach dem Früheren die Linien $q_{,}$, $q_{,,}$, in welchen die Kräfte $Q_{,}$, $Q_{,,}$ wirken, die Eigenschaft der Dreh-Axen haben und dass die vollständigen Drehmomente dieser beiden Dreh-Axen die Drehmomente der Endpuncte des kürzesten Abstandes dieser beiden Linien $q_{,}$, $q_{,,}$ oder die Drehmomente jener Endpuncte sind, in welchen $q_{,}$, $q_{,,}$ den zur Hauptdrehlinie senkrechten Hebelsarm durchdringen. Ist r dieser kürzeste Abstand, und sind $R_{,}$, $R_{,,}$ die vollständigen Drehmomente des Kräftensystems $P, P, \ldots$ um diese Dreh-Axen $q_{,}$, $q_{,,}$, so ist nach (**54.**, **61.** und **62.**)

$$R_{,}.R_{,,} = r.K, \qquad R_{,}^2 + R_{,,}^2 = r^2 E^2, \qquad \frac{1}{R_{,}^2} + \frac{1}{R_{,,}^2} = \frac{E^2}{K^2} = \frac{1}{R_i^2}.$$

Das Drehmoment der Kraft $Q_{,,}$ um die Axe $q_{,}$ ist $= rQ_{,,}$, und das der Kraft $Q_{,}$ um die Axe $q_{,,} = r.Q_{,}$; daher ist nach (**81.**)

$$r.Q_{,}.Q_{,,} = K.$$

Ferner: werden $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ auf die Hauptdrehlinie projicirt, so müssen diese beide Projectionen vereint der gerade fortgehenden Kraft E gleich sein; und da $Q_{,}$, $Q_{,,}$ zu einander senkrecht sind, so bilden $Q_{,}$, $Q_{,,}$ ein rechtwinklichtes Viereck, von welchem E die Diagonale ist; daher ist

$$Q_{,}^2 + Q_{,,}^2 = E^2.$$

Zuletzt, da $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ das ganze Kräftensystem $P, P_{,}, \ldots$ ersetzen, so ist ihr vollständiges Drehmoment um irgend eine Dreh-Axe auch gleich dem vollständigen Drehmomente des ganzen Kräftensystems um dieselbe Dreh-Axe. Daher ist bei der Dreh-Axe $q_{,}$, $R_{,} = r.Q_{,,}$ und bei der Dreh-Axe $q_{,,}$ ist $R_{,,} = r.Q_{,}$. Folglich:

83. *Sind die Kräfte* $Q_{,}, Q_{,,}$, *durch welche ein Kräftensystem ersetzt wird, zu einander senkrecht, sind* $R_{,}, R_{,,}$ *die vollständigen Drehmomente des Kräftensystems um die Dreh-Axen* $q_{,}, q_{,,}$, *und ist* r *der kürzeste Abstand dieser Dreh-Axen, worin* $Q_{,}, Q_{,,}$ *wirken, so finden folgende merkwürdige Relationen Statt:*

$$\alpha) \quad R_{,} = r.Q_{,,}, \qquad R_{,,} = r.Q_{,},$$

$$\beta) \quad R_{,}.R_{,,} = r^2.Q_{,}.Q_{,,} = r.K,$$

$$\gamma) \quad R_{,}^2 + R_{,,}^2 = r^2(Q_{,}^2 + Q_{,,}^2) = r^2.E^2,$$

$$\delta) \quad \frac{1}{R_{,}^2} + \frac{1}{R_{,,}^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{Q_{,}^2} + \frac{1}{Q_{,,}^2}\right) = \frac{E^2}{K}.$$

Heidelberg den **28.** November **1846.**

3.

Fliehmomente, oder die Summe $\Sigma(xX+yY)$ bei Kräften in der Ebene, und $\Sigma(xX+yY+zZ)$ bei Kräften im Raume.

(Von Herrn Geh. Hofr. und Professor Dr. *Schweins* in Heidelberg.)

1.

Die Summe der Producte aus den Seitenkräften und den gleichnamigen Coordinaten ihrer Angriffspuncte kommt bei mehreren Untersuchungen vor. Man hat von ihr behauptet und sogar bewiesen (?), *dass beim Gleichgewichte diese Summe ein Maximum oder ein Minimum sei, und zwar Ersteres beim sicheren und Letzteres beim unsicheren Gleichgewichte.* Aber wie, wenn diese Summe keines Maximums fähig wäre? — Die Summe ist eine jener Grössen, deren Natur bis jetzt nicht untersucht ist, obgleich zu ihrer Erforschung nur *höchst einfache* und *elementare* Mittel nöthig sind.

Fliehmomente bei Kräften in der Ebene.

2.

(Taf. I. Fig. 1.) Die Kräfte eines Kräftensystems werden gewöhnlich nach den Richtungen zweier Coordinaten-Axen zerlegt. Man kann sie auch nach den Richtungen der Strahlen zerlegen, welche aus einem Puncte C durch die Angriffspuncte der Kräfte gehen, und nach den Linien, welche zu diesen Strahlen senkrecht sind, nämlich P in U und V, und P_1 in U_1 und V_1, u. s. w.

(Fig. 2.) Diese Kräfte $U, V, \ldots$ stehen in Verbindung mit den Seitenkräften $X, Y, \ldots$; denn es ist, wenn $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ die Winkel sind, welche die Strahlen $R, R_1, \ldots$ mit den Abscissen-Axen bilden:

$$1. \quad \begin{cases} U = X.\cos:\delta + Y.\sin:\delta, \\ V = X.\sin:\delta - Y.\cos:\delta, \end{cases}$$

und umgekehrt:

$$2. \quad \begin{cases} X = U.\cos:\delta + V.\sin:\delta, \\ Y = U.\sin:\delta - V.\cos:\delta, \end{cases}$$

mithin

$$3. \quad \begin{cases} \Sigma X = \Sigma(U.\cos:\delta) + \Sigma(V.\sin:\delta), \\ \Sigma Y = \Sigma(U.\sin:\delta) - \Sigma(V.\cos:\delta). \end{cases}$$

Die Kräfte V, V_1, ... bewirken die Umdrehung um den Punct C; man findet auch wirklich

$$4. \quad y.X - x.Y = R(X.\sin:\delta - Y.\cos:\delta) = R.V.$$

Hingegen die Kräfte U, U_1, ... wirken nach verschiedenen Richtungen auf den Punct C. Das Product $R.V$ wird *Drehmoment* genannt. Das Product $R.U$ will ich das *Moment des Druckes* oder das *Moment der Fliehkraft* oder kurz *Fliehmoment* nennen.

So wie das Drehmoment der Kräfte $\Sigma R.V$ in die beiden Drehmomente der Seitenkräfte $\Sigma y.X$ und $\Sigma x.Y$ zerlegt werden kann, so kann auch das Fliehmoment der Kräfte $\Sigma R.U$ in die beiden Fliehmomente $\Sigma x.X$ und $\Sigma y.Y$ der Seitenkräfte zerlegt werden; denn es ist

$$R.U = R(X\cos:\delta + Y.\sin:\delta) = x.X + y.Y,$$

folglich

$$5. \quad \Sigma R.U = \Sigma xX + \Sigma yY,$$

d. h.: *Das Fliehmoment des ganzen Kräftensystems für einen bestimmten Drehpunct gleicht der Summe der beiden Fliehmomente der Seitenkräfte.*

(Fig. 3.) Dieses lässt sich auch unmittelbar in der Figur nachweisen; denn es ist

$$AK = AH + AG, \quad \text{also} \quad \Sigma R.AK = \Sigma R.AH + \Sigma R.AG.$$

In dieser Gleichung ist $R.AH$ das Fliehmoment von X und $R.AG$ das Fliehmoment von Y. Die Aussage hat sich also bewährt. Da ferner

$$CA.AH = CE.AD \quad \text{und} \quad CA.AG = AE.AF$$

ist, so nimmt auch vorstehende Gleichung die obige Gestalt No. 5. an.

3.

Das Fliehmoment hat mit dem Drehmomente auch die Eigenschaft gemein, dass seine Grösse nicht von der Richtung der Coordinaten-Axen abhangt; denn $\Sigma R.U = \Sigma CA.AK$ wird nicht geändert, wenn man auch ein anderes Coordinatensystem annimmt.

(Fig. 4.) Hingegen, wenn der Drehpunct C geändert wird, ändert sich im Allgemeinen auch das Fliehmoment. Sind nämlich a_1, b_1 die Coordinaten des Puncts C_1 und ist

$$x = a_1 + x_1, \qquad y = b_1 + y_1,$$

so ist

$$6. \qquad \Sigma(xX+yY) = \Sigma(x_1X + y_1Y) + a_1\Sigma X + b_1\Sigma Y.$$

Die beiden letzten Producte geben vereint ein Fliehmoment, welches am Drehpuncte C entstehen würde, wenn alle Kräfte mit einander parallel am Puncte C_1 angebracht wären. Durch vorstehende Gleichung ist also folgender Satz gewonnen:

6_1. *Das Fliehmoment am Puncte* C *gleicht dem Fliehmomente am Puncte* C_1, *wenn mit diesem noch das Fliehmoment vereinigt wird, welches am Drehpuncte* C *entstehen würde, wenn alle Kräfte, oder statt dieser die Mittelkraft derselben, parallel mit sich selbst am Puncte C angebracht würden.* (Das Gleiche wie beim Drehmomente.)

Wird das Fliehmoment am Drehpuncte C durch $\mathfrak{F}C$ und jenes am Drehpuncte C_1 durch $\mathfrak{F}C_1$ vorgestellt, so dass

$$\Sigma(xX+yY') = \mathfrak{F}C \quad \text{und} \quad \Sigma(x_1X+y_1Y') = \mathfrak{F}C_1$$

und zugleich $\Sigma X = A$ und $\Sigma Y' = B$ gesetzt wird, so lässt sich dieser Satz durch folgende Zeichen ausdrücken:

$$6_2. \qquad \mathfrak{F}C = \mathfrak{F}C_1 + a_1A + b_1B.$$

4.

Die Fliehmomente an verschiedenen Drehpuncten sind nicht immer an Grösse verschieden. Zuerst bemerke man eine Linie, deren Gleichung

$$7. \qquad u.B + v.A = \mathfrak{F}C,$$

und die so beschaffen ist, dass das Fliehmoment jedes Puncts dieser Linie verschwindet, oder $\mathfrak{F}C_1 = 0$ ist. Die Linie ist merkwürdig; ich will sie die *Hauptlinie der Fliehmomente* nennen.

Vergleicht man die Gleichung mit der Gleichung der Hauptlinie der Drehmomente oder mit der Gleichung der Mittelkraft

$$u.A - v.B = \Sigma(yX-xY'),$$

so findet man folgenden Satz:

8. *Die Hauptlinie der Fliehmomente ist senkrecht zur Hauptlinie der Drehmomente.*

Die Coordinaten des Durchschnittspuncts dieser beiden Hauptlinien sind

$$9. \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{A.\Sigma(yX-xY)+B.\Sigma(xX+yY)}{A^2+B^2}, \\ v' = \dfrac{A.\Sigma(xX+yY)-B.\Sigma(yX-xY)}{A^2+B^2}. \end{cases}$$

Dieser Durchschnittspunct zeichnet sich vor allen übrigen dadurch aus, dass, wenn er zum Drehpuncte genommen wird, sowohl das Drehmoment als das Fliehmoment des Kräftensystems verschwindet. Der Punct ist derjenige, welcher gewöhnlich *Mittelpunct* des Kräftensystems genannt wird.

5.

(Fig. 4.) Ich verfolge die Gleichung (6_2.) weiter, und nehme Puncte C_1, C_2, C_3 in einer geraden Linie und a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 zu ihren Coordinaten an. Zwischen den Fliehmomenten dieser Drehpuncte finden folgende Gleichungen Statt:

$$\mathfrak{F}C = \mathfrak{F}C_1 + a_1 A + b_1 B,$$
$$\mathfrak{F}C = \mathfrak{F}C_2 + a_2 A + b_2 B,$$
$$\mathfrak{F}C = \mathfrak{F}C_3 + a_3 A + b_3 B.$$

Werden diese mit $a_2 - a_3$, $a_3 - a_1$, $a_1 - a_2$ und dann auch mit $b_2 - b_3$, $b_3 - b_1$, $b_1 - b_2$ multiplicirt und zusammengezählt, so ergeben sich die Gleichungen

10. $(a_2 - a_3).\mathfrak{F}C_1 + (a_3 - a_1).\mathfrak{F}C_2 + (a_1 - a_2).\mathfrak{F}C_3 = 0$ und
$(b_2 - b_3).\mathfrak{F}C_1 + (b_3 - b_1).\mathfrak{F}C_2 + (b_1 - b_2).\mathfrak{F}C_3 = 0,$

in welchen die Seitenkräfte A und B nicht mehr vorkommen, sondern nur die Fliehmomente dreier Puncte, und die Abstände dieser Puncte.

Von dieser allgemeinen Wahrheit will ich jetzt Anwendung machen. Ich lege den Punct $(a_2 b_2)$ in die Hauptlinie der Fliehmomente, und die beiden andern Puncte C_1, C_3 auf die beiden Seiten dieser Linie, und zwar in gleichen Abständen von derselben. In diesem Falle geben die beiden Gleichungen folgenden Satz:

11. $$\mathfrak{F}C_1 = -\mathfrak{F}C_3,$$

d. h.: *Drehpuncte auf beiden Seiten der Hauptlinie der Fliehmomente, und in gleichen Abständen von derselben, haben gleiche, aber entgegengesetzte Fliehmomente.*

Wird aber der Punct $(a_1 b_1)$ in die Hauptlinie der Fliehmomente und werden die beiden andern Puncte $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_3)$ auf einer und derselben Seite dieser Linie angenommen, so gehen die beiden Gleichungen (10.) in folgende über:

$$\frac{\mathfrak{F}C_2}{\mathfrak{F}C_3} = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1},$$

d. h.: *Die Fliehmomente zweier Drehpuncte messen sich so oft [sind eben die Vielfachen von einander] wie die Abstände der Drehpuncte von der Hauptlinie der Fliehmomente.*

Werden zuletzt in der Grundgleichung (6_2.) die Coordinaten a_1, b_1

veränderlich angenommen, so giebt diese Gleichung eine gerade Linie an, welche zu der Hauptlinie der Fliehmomente (7.) parallel ist, und deren Puncte gleiche Fliehmomente $\mathfrak{F}C_1$ haben; daher der Satz:

13. *Die Puncte einer Linie, welche zu der Hauptlinie der Fliehmomente parallel ist, haben gleiche Fliehmomente.*

6.

Das Gefundene fasse ich jetzt in Eins zusammen:

14. a) *In jedem Kräftensysteme in der Ebene, welches eine Mittelkraft hat, giebt es eine Linie, so beschaffen, dass das Fliehmoment jedes Punctes dieser Linie* $= 0$ *ist.*

b) *Diese Hauptlinie der Fliehmomente ist senkrecht zu der Hauptlinie der Drehmomente.*

c) *Die Fliehmomente aller Puncte einer Linie, welche zu dieser Hauptlinie parallel ist, sind gleich.*

d) *Die Fliehmomente von Puncten, welche auf beiden Seiten dieser Hauptlinie liegen und von ihr gleich weit abstehen, sind gleich, haben aber entgegengesetzte Zeichen.*

e) *Die Fliehmomente messen sich so oft [sind eben die Vielfachen von einander] wie die Abstände ihrer Drehpuncte von der Hauptlinie der Fliehmomente; sie wachsen zu beiden Seiten von* 0 *an bis ins Unendliche, und haben kein Maximum.*

(Fig. 5.) Dieselben Eigenschaften, welche bei dem Fliehmomente gefunden wurden, finden auch bei dem Drehmomente Statt. Ist nämlich *mn* die Hauptdrehlinie oder die Richtung der Mittelkraft, und bedeutet $\mathfrak{D}C$ das Drehmoment um den Punct C, so ist $\dfrac{\mathfrak{D}C}{\mathfrak{D}C_2} = \dfrac{r}{r_2}$ und

$$\mathfrak{D}C = -\mathfrak{D}C_1, \quad \text{wenn} \quad r = -r,$$
$$\mathfrak{D}C = \mathfrak{D}C_2, \quad \text{wenn} \quad r = r_2.$$

Daher der Satz:

15. *Die Flieh- und die Drehmomente sind in Hinsicht ihrer Hauptdrehlinien gleichen Gesetzen unterworfen;* und

16. (Fig. 6.) *Die beiden Hauptlinien der Dreh- und der Fliehmomente theilen rechtwinklicht den Raum in vier Theile* 1, 2, 3, 4, *so dass in einem Theile beide Momente bejaht, in dem gegenüberliegenden Theile beide Momente verneint und in jedem der beiden andern Theile das eine Moment bejaht und das andere verneint sind.*

7.

(Fig. 7.) Die oben gefundenen Sätze lassen sich noch auf eine andere Weise begründen. Man projicire die Linie BD auf die drei Seiten des Dreiecks ABC; die Projectionen sind BE, BF, BG. Durch die Aehnlichkeit der Dreiecke, welche durch senkrechte und parallele Hülfslinien entstehen, lässt sich leicht beweisen, dass

$$AB \,.\, BE = BC \,.\, BF + AC \,.\, BG \quad \text{ist.}$$

In dieser Gleichung ist jede Seite mit der entsprechenden Projection der Linie BD multiplicirt. Ihre Anwendung auf den vorliegenden Gegenstand ist folgende. A und C werden als zwei Drehpuncte des Kräftensystems angenommen, B ist der Angriffspunct der Kraft BD; aus A und C gehen Strahlen durch die Angriffspuncte der Kräfte; jede Kraft wird auf die beiden zugehörigen Strahlen und auf die Verbindungslinien AC projicirt und jede Projection mit der zugehörigen Seite des Dreiecks multiplicirt. Werden nun diese Producte zusammengezählt, so erhält man die Gleichung

$$17. \qquad \Sigma AB \,.\, BE = \Sigma BC \,.\, BF + AC \,.\, \Sigma BG,$$

welche Dasselbe wie (6_2.) giebt.

Ist AC senkrecht zur Mittelkraft, so ist $\Sigma BG = 0$, und also

$$\Sigma AB \,.\, BE = \Sigma BC \,.\, BF,$$

oder: die Puncte einer Linie, welche senkrecht zur Mittelkraft ist, haben gleiche Fliehmomente; wie auch oben (14c.) gefunden.

AC sei parallel zur Mittelkraft. In diesem Falle ist ΣBG die Mittelkraft selbst. Wird diese Mittelkraft M genannt und zur Abkürzung $\Sigma AB \,.\, BE = p$ und $\Sigma BC \,.\, BF = q$ gesetzt, so ist die obige Gleichung (17.)

$$p = q + AC \,.\, M.$$

Ist der Punct C fest und der Punct A veränderlich, so sind in vorstehender Gleichung q und M unveränderlich; p hangt nur von AC ab. Geht A nach der Linken, so wächst p bis $+\infty$. Nähert sich A dem C, so wird p kleiner; fällt A in C, so wird $p = q$; geht A nach der Rechten über C hinaus, so wird AC verneint, p wird kleiner als q und es wird einen Punct geben, wo $q - AC \,.\, M = 0$, also auch $p = 0$ ist. Es giebt also einen Punct, dessen Fliehmoment $= 0$ ist. Dieselbe Eigenschaft haben nach dem Vorigen alle Puncte der Linie, welche durch diesen Punct geht und senkrecht zur Mittelkraft ist. Diese ist die Hauptlinie der Fliehmomente.

Geht A über diesen Punct hinaus, so wird $q - AC \,.\, M$, also auch p verneint, und wächst bis $-\infty$.

Wird zuletzt angenommen, dass C in dieser Hauptlinie der Fliehmomente liege, so ist $q = 0$ und $p = AC.M$. Aus dieser Gleichung geht hervor, dass p mit AC das Zeichen wechselt und dass die Puncte zu beiden Seiten dieser Hauptlinie und in gleichen Abständen von derselben gleiche aber entgegengesetzte Fliehmomente haben; wie auch (14d.) angiebt.

8.

Wenn keine Mittelkraft vorhanden, oder wenn $A = B = 0$ oder $M = 0$ ist, so geht aus beiden Darstellungs-Arten folgender Satz hervor:

18. *Hat das Kräftensystem keine Mittelkraft, so sind die Fliehmomente aller Drehpuncte gleich.*

In einem Kräftensysteme ohne Mittelkraft sind also nicht allein die Drehmomente, sondern auch die Fliehmomente aller Drehpuncte gleich, und es giebt weder bei dem einen noch bei dem andern ein *Maximum* oder *Minimum* von $\Sigma(xX+yY)$; wie man es bisher glaubte. In einem solchen Kräftensysteme giebt es weder eine Hauptlinie der Drehmomente, noch eine Hauptlinie der Fliehmomente. Dasselbe gilt von einem Kräftensysteme, welches im Gleichgewichte ist.

9.

Sind die Kräfte parallel, so stört dies nicht die Allgemeinheit der oben gefundenen Sätze. Nimmt man in diesem Falle die Abscissen-Axe in der Richtung der Kräfte an, so ist

$$b = \frac{\Sigma yX}{\Sigma X}$$

die Gleichung für die Hauptlinie der Drehmomente, und

$$a = \frac{\Sigma xX}{\Sigma X}$$

ist die Gleichung für die Hauptlinie der Fliehmomente.

(Fig. 8.) Es ist leicht, dies in der Figur nachzuweisen; denn wegen der Antiparallelen ist

$$CA.AB + CA_1.A_1B_1 + \ldots. = DA.AE + D_1A_1.A_1E_1 + \ldots.$$
$$= (x-a)X + (x_1-a)X_1 + \ldots.,$$

und zugleich ist

$$CD.X + CD_1.X_1 + \ldots. = (y-b)X + (y_1-b)X_1 + \ldots.$$

Ist nun die Summe der Drehmomente und auch die Summe der Fliehmomente $= 0$, so ist

$$\Sigma(x-a)X = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma(y-b)X = 0;$$

woraus sich die obigen Werthe von a und b ergeben. MN ist die Hauptlinie der Drehmomente und KL die Hauptlinie der Fliehmomente; ihr Durchschnitt ist der Mittelpunct der parallelen Kräfte.

Fliehmomente bei Kräften im Raume.

10.

Gehen aus dem Puncte C, dem Anfangspuncte der Coordinaten, durch die Angriffspuncte der Kräfte $P, P_1, P_{,,}, \ldots$. Strahlen $R, R_1, R_{,,}, \ldots$, so ist

$$\cos(RP) = \cos(Rx) \cdot \cos(Px) + \cos(Ry) \cdot \cos(Py) + \cos(Rz) \cdot \cos(Pz)$$
$$= \frac{x}{R} \cdot \frac{X}{P} + \frac{y}{R} \cdot \frac{Y}{P} + \frac{z}{R} \cdot \frac{Z}{P};$$

daher:

19. $$\Sigma(xX+yY+zZ) = \Sigma RP \cos(RP) = \Sigma R \cdot P_{(r)} = \Sigma P \cdot R_{(p)}.$$

$P_{(r)}$ ist die Projection der Kraft P auf die Richtung des zugehörigen Strahls R, also eine Kraft, welche in der Richtung des Strahls R auf den Punct C wirkt. Das Product aus dieser Kraft $P_{(r)}$ und aus dem Strahle R nenne ich das *Fliehmoment* der Kraft P für den Punct C, und die Summe dieser Producte das *Fliehmoment des ganzen Kräftensystems* für den Punct C. (Ich erinnere hier besonders, dass bei diesem Fliehmomente an kein Drehen und an keine Dreh-Axe gedacht wird.)

Die vorstehenden Gleichungen geben die verschiedenen Arten an, wie das Fliehmoment des Kräftensystems dargestellt werden kann.

Es ist $x = R \cdot \cos(RX)$, $y = R \cdot \cos(RY)$, $z = R \cdot \cos(RZ)$, mithin

$$\Sigma xX = \Sigma RX \cos(RX) = \Sigma R \cdot X_{(r)},$$
$$\Sigma yY = \Sigma RY \cos(RY) = \Sigma R \cdot Y_{(r)},$$
$$\Sigma zZ = \Sigma RZ \cos(RZ) = \Sigma R \cdot Z_{(r)}.$$

$X_{(r)}$ ist die Projection der Seitenkraft X auf die Richtung des Strahls R; das Product $R.X_{(r)}$ ist das Fliehmoment dieser Seitenkraft X, und $\Sigma RX_{(r)}$ ist das Fliehmoment aller Seitenkräfte $X, X_1, \ldots$. Vorstehende Gleichungen geben an, dass dies auch durch ΣxX ausgedrückt werden kann. Aehnliches gilt von den beiden andern Gruppen paralleler Seitenkräfte $Y, \ldots$, und $Z, \ldots$. Die Gleichung (19.), in Verbindung mit Diesem, giebt daher folgenden Satz:

20. $$\Sigma R \cdot P_{(r)} = \Sigma R \cdot X_{(r)} + \Sigma R \cdot Y_{(r)} + \Sigma R \cdot Z_{(r)} = \Sigma xX + \Sigma yY + \Sigma zZ,$$

d. h.: *Das Fliehmoment des ganzen Kräftensystems kann in drei gesonderte, von einander unabhängige Fliehmomente der drei Gruppen paralleler Seitenkräfte zerlegt werden.*

11.

Die Strahlen und die Projectionen der Kräfte auf die Richtungen der Strahlen hangen nicht von der Richtung des gewählten Coordinatensystems ab. Daraus folgt, dass der Werth der Summe

$$\Sigma(xX + yY + zZ)$$

sich nicht ändert, wenn auch ein anderes Coordinatensystem angenommen wird. Dieser Satz kann an veränderten Coordinaten selbst nachgewiesen werden. Sind nämlich α, β, γ die Cosinusse der Winkel, welche x' mit x, y, z bildet, α', β', γ' die welche y' und $\alpha'', \beta'', \gamma''$ die welche z' mit x, y, z bildet, und sind a, b, c die Coordinaten des Anfangspuncts des neuen Coordinatensystems, so ist

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c), & X' &= \alpha X+\beta Y+\gamma Z,\\ y' &= \alpha'(x-a)+\beta'(y-b)+\gamma'(z-c), & Y' &= \alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z,\\ z' &= \alpha''(x-a)+\beta''(y-b)+\gamma''(z-c), & Z' &= \alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' Z. \end{aligned}$$

Werden nun die Producte $x'X', y'Y', z'Z'$ gebildet, zusammengezählt und die bekannten Gleichungen zwischen $\alpha, \beta, \ldots . \gamma''$ angewendet, so erhält man die Gleichung

21. $$\Sigma(x'X' + y'Y' + z'Z') = \Sigma[(x-a)X + (y-b)Y + (z-c)Z],$$

d. h.: *Die Summe der Producte aus den Seitenkräften und den gleichnamigen Coordinaten wird nicht geändert, wenn man die Richtung der Coordinaten ändert.*

12.

Es sei $\Sigma X = A$, $\Sigma Y = B$, $\Sigma Z = C$, und a, b, c seien so angenommen, dass

22. $$a.A + b.B + c.C = \Sigma(xX+yY+zZ);$$

was immer möglich ist. In diesem Fall ist auch

$$\Sigma[(x-a)X+(y-b)Y+(z-c)Z] = \Sigma(x'X'+y'Y'+z'Z') = 0.$$

Werden nun auch a, b, c veränderlich angenommen, so giebt die Gleichung (22.) eine Ebene, so beschaffen, dass das Fliehmoment des ganzen Kräftensystems für jeden Punct dieser Ebene $= 0$ ist. Diese Ebene nenne ich die Ebene der *verschwundenen Fliehmomente*, oder kurz, *Haupt-Flieh-Ebene*. Sie ist nicht zu verwechseln mit der *Ebene der Mittelpuncte*, von welcher ein andermal gehandelt werden wird. Ihre Gleichung, verglichen mit den Gleichungen für die Hauptdrehlinie:

$$y = \frac{B}{A} \cdot x + \frac{C.K-N.E^2}{A.E^2}, \qquad z = \frac{C}{A} \cdot x + \frac{-B.K+M.E^2}{A.E^2},$$

wo $K = AL + BM + CN$*) und $E^2 = A^2 + B^2 + C^2$ ist, giebt ihre Lage im Kräftensysteme an; nämlich:

23. *Die Haupt-Flieh-Ebene ist senkrecht zur Hauptdrehlinie.*

Die Coordinaten des Durchschnittspuncts der Haupt-Flieh-Ebene und der Hauptdrehlinie sind

$$24. \qquad a_1 = \frac{BN - CM + A\mathfrak{E}}{E^2}, \qquad b_1 = \frac{CL - AN + B\mathfrak{E}}{E^2}, \qquad c_1 = \frac{AM - BL + C\mathfrak{E}}{E^2};$$

wo $$\mathfrak{E} = \Sigma(xX + yY + zZ) \text{ ist.}$$

13.

Für den Funct C oder den Anfangspunct der Coordinaten ist das Fliehmoment $= \mathfrak{E}$, für den Punct $(a'b'c')$ oder C' sei es $= \mathfrak{E}'$. Nach der Gleichung (21.) ist

$$\Sigma(x'X' + y'Y' + z'Z') = \Sigma(xX + yY + zZ) - a'A - b'B - c'C,$$

oder

$$25. \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + a' . A + b' . B + c' . C,$$

d. h.: *Das Fliehmoment für den Punct* C *gleicht dem Fliehmomente für den Punct* C', *wenn mit diesem noch das Fliehmoment vereinigt wird, welches beim ersten Puncte* C *entsteht, wenn beim letzten Puncte* C' *alle Kräfte nach parallelen Richtungen oder auch die Mittelkraft des Kräftensystems angebracht werden.*

Diese Gleichung ist noch einer andern Deutung fähig. Werden nämlich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ beständig, aber a', b', c' veränderlich angenommen, so giebt sie eine Ebene an, so beschaffen, dass für alle ihre Puncte dasselbe Fliehmoment $\mathfrak{E}'$ Statt findet. Diese Ebene ist parallel zu der Haupt-Flieh-Ebene (22.). Daher:

26. *Für Puncte einer Ebene, welche zu der Haupt-Flieh-Ebene parallel ist, sind die Fliehmomente gleich.*

14.

Sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}''$, $\mathfrak{E}'''$ die Fliehmomente für die Puncte C, C', C'', C''' oder für (000), $(a'b'c')$, $(a''b''c'')$, $(a'''b'''c''')$, welche in einer geraden Linie liegen, so stehen sie nach dem oben gefundenen Satze durch folgende Gleichungen in Verbindung:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E} &= \mathfrak{E}' + a'A + b'B + c'C, \\
\mathfrak{E} &= \mathfrak{E}'' + a''A + b''B + c''C, \\
\mathfrak{E} &= \mathfrak{E}''' + a'''A + b'''B + c'''C.
\end{aligned}$$

---

*) Es ist $L = \Sigma(yZ - zY)$, $M = \Sigma(zX - xZ)$, $N = \Sigma(xY - yX)$.

Werden diese Gleichungen nach ihrer Folge mit $a''-a'''$, $a'''-a'$, $a'-a''$, mit $b''-b'''$, $b'''-b'$, $b'-b''$ und mit $c''-c'''$, $c'''-c'$, $c'-c''$ multiplicirt, und berücksichtigt man zugleich, dass

$$\frac{a'-a''}{b'-b''}=\frac{a'-a'''}{b'-b'''}=\frac{a''-a'''}{b''-b'''} \quad \text{und} \quad \frac{a'-a''}{c'-c''}=\frac{a'-a'''}{c'-c'''}=\frac{a''-a'''}{c''-c'''}$$

ist, so entstehen folgende drei Gleichungen:

$$27. \quad \begin{cases} \mathfrak{E}'(a''-a''')+\mathfrak{E}''(a'''-a')+\mathfrak{E}'''(a'-a'')=0, \\ \mathfrak{E}'(b''-b''')+\mathfrak{E}''(b'''-b')+\mathfrak{E}'''(b'-b'')=0, \\ \mathfrak{E}'(c''-c''')+\mathfrak{E}'(c'''-c')+\mathfrak{E}'(c'-c'')=0; \end{cases}$$

welche den Zusammenhang der Fliehmomente für drei in einer geraden Linie liegende Puncte mit den Entfernungen dieser Puncte von einander angeben.

Diese Gleichungen sind die Grundlage der wichtigsten Sätze. Wird nämlich der Punct C'' in die Haupt-Flieh-Ebene gelegt, und werden die beiden andern Puncte C' und C''' an beiden Seiten, und zwar in gleichen Abständen von dieser Ebene angenommen, so ist

$$\mathfrak{E}''=0, \quad a''-a'''=a'-a'', \quad b''-b'''=b'-b'', \quad c''-c'''=c'-c'',$$

folglich

$$28. \qquad \mathfrak{E}'=-\mathfrak{E}''',$$

d. h.: *Die Fliehmomente für Puncte zu beiden Seiten und in gleichen Abständen von der Haupt-Flieh-Ebene sind gleich, und haben entgegengesetzte Zeichen.*

Wird aber der Punct C' in die Haupt-Flieh-Ebene verlegt, so ist $\mathfrak{E}'=0$ und

$$29. \qquad \frac{\mathfrak{E}''}{\mathfrak{E}'''}=\frac{a''-a'}{a'''-a'}=\frac{b''-b'}{b'''-b'}=\frac{c''-c'}{c'''-c'},$$

d. h.: *Die Fliehmomente messen sich so oft [sind eben die Vielfachen von einander], wie die Abstände ihrer zugehörigen Scheitelpuncte von der Haupt-Flieh-Ebene.*

15.

Die Sätze, welche ich hier entwickelt habe, sind im Zusammenhange folgende:

a) *In jedem Kräftensysteme kann das Fliehmoment für jeden Punct in drei gesonderte, von einander unabhängige Fliehmomente der drei Gruppen paralleler Seitenkräfte zerlegt werden.*

b) *Hat das Kräftensystem eine Mittelkraft, so giebt es in ihm eine feste Ebene, von der Art, dass für jeden Punct dieser Ebene das Fliehmoment des Kräftensystems verschwindet. Diese Ebene ist die Haupt-Flieh-Ebene.*

c) *Diese Haupt-Flieh-Ebene ist senkrecht zur Hauptdrehlinie.*

d) *Für alle Puncte einer Ebene, welche zu der Haupt-Flieh-Ebene parallel ist, sind die Fliehmomente gleich.*

e) *Für die Puncte zu beiden Seiten und in gleichen Abständen von der Haupt-Flieh-Ebene sind die Fliehmomente gleich, haben aber entgegengesetzte Zeichen.*

f) *Die Fliehmomente messen sich so oft [sind von einander dieselben Vielfachen], wie die Abstände ihrer Scheitelpuncte von der Haupt-Flieh-Ebene; sie wachsen an einer Seite von* **0** *bis* $+\infty$, *an der andern bis* $-\infty$. *In einem bestimmten Kräftensysteme giebt es keinen grössten Werth von*

$$\Sigma(xX+yY+zZ).$$

g) *In einem Kräftensysteme ohne Mittelkraft, also auch in einem Kräftensysteme, welches im Gleichgewichte ist, sind für alle Puncte die Fliehmomente gleich.*

16.

Ich hoffe, durch diese Sätze über einen wichtigen Gegenstand, der noch im Dunkel lag, hinreichendes Licht verbreitet, einige Irrthümer beseitigt und zu gründlicheren Forschungen Veranlassung gegeben zu haben. Ich bemerke nur noch schliesslich, dass die Sätze in (§. **15.**) auf dieselbe Weise, wie n (§. 7.) geschehen, bewiesen werden können. Es seien nämlich AB_1C, AB_2C, AB_3C, ... Dreiecke im Raume, welche eine gemeinschaftliche Seite AC haben; die Linien $l_1, l_2, l_3, \ldots$ im Raume seien auf die Seiten dieser Dreiecke projicirt, und zwar l_1 auf die Seiten des ersten, l_2 auf die des zweiten Dreiecks; und es seien $m_1, m_2, \ldots$ die Projectionen auf AB_1, AB_2, ..., $n_1, n_2, \ldots$ die auf CB_1, CB_2, ... und $p_1, p_2, \ldots$ die Projectionen auf die gemeinschaftliche Seite AC. Dann kann bewiesen werden, dass

$$AB_1.m_1 + AB_2.m_2 + \ldots = CB_1.n_1 + CB_2.n_2 + \ldots + AC(p_1+p_2+\ldots),$$

oder

$$\Sigma AB.m = \Sigma CB.n + AC.\Sigma p \quad \text{ist.}$$

Diese Gleichung giebt denselben Satz wie No. (**25.**).

4.

Ableitung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte aus ihrer Polargleichung.

(Von Herrn Dr. *W. Hittorf* in Bonn.)

In dem Cambridge and Dublin Mathematical Journal (No. I. und II. Seite 68.) hat Herr *Perc. Frost* aus der Polargleichung

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

mehrere Eigenschaften der Kegelschnitte entwickelt. Ohne von dieser Arbeit Kenntniss zu haben, behandelte ich den Gegenstand in meiner Inaugural-Dissertation. Hier will ich diejenigen Resultate hersetzen, welche Herr *Frost* gar nicht, oder nur unvollständig mitgetheilt hat.

Man bringe, um die analytischen Entwicklungen machen zu können, die Polargleichung auf die Form

$$1. \qquad \varrho = a + b \cos v \quad \text{oder} \quad \varrho - b \cos v = a,$$

indem man statt $\frac{1}{r}$ den reciproken Radius-vector ϱ, statt $\frac{1}{p}$ den reciproken Parameter a, statt $\frac{e}{p}$ die reciproke Entfernung des Focus von der Directrix b einführt. Die Gleichung drückt die bekannte Eigenschaft der Kegelschnitte aus, dass das Verhältniss der Abstände eines jeden Curvenpuncts vom Focus und der Directrix constant und gleich $\frac{b}{a}$ ist; sie drückt daher entweder eine Ellipse, eine Parabel, oder eine Hyperbel aus, je nachdem $a > b$, $a = b$, $a < b$ ist. Für die Hyperbel werden die Rad. vect. negativ, wenn sie dem zweiten Zweige entsprechen. Der reciproke Focal-Abstand des Mittelpuncts findet sich gleich $\frac{b^2 - a^2}{b}$, während die Länge der Haupt-Axe $\frac{2a}{a^2 - b^2}$ ist.

Für die Gleichung der geraden Linie ergiebt sich in Polarcoordinaten:

$$2. \qquad \varrho = \alpha \sin v + \beta \cos v,$$

wenn α und β die reciproken Stücke bedeuten, die sie von den rechtwinkligen Coordinaten-Axen abschneidet.

Hiedurch nimmt nun die Gleichung der Sehne eines Kegelschnitts eine sehr einfache und elegante Form an. Substituirt man nämlich die Coordinaten zweier Curvenpuncte, welche durch ihre Winkel v', v'' vollkommen bestimmt sind, in die Gleichung (2.), so erhält man nach einer leichten Reduction:

$$\alpha = \frac{a.\sin\frac{1}{2}(v'+v'')}{\cos\frac{1}{2}(v'-v'')}, \qquad \beta = \frac{a.\cos\frac{1}{2}(v'+v'')}{\cos\frac{1}{2}(v'-v'')} + b;$$

folglich ergiebt sich daraus für die Gleichung der Sehne:

$$3. \qquad \varrho - b\cos v = \frac{a.\cos\left(v-\frac{1}{2}(v'+v'')\right)}{\cos\frac{1}{2}(v'-v'')}.$$

Die Discussion dieses an Resultaten fruchtbaren Ausdrucks soll hier folgen.

Setzt man $v' = v''$. so geht die Sehne in die Tangente

$$4. \qquad \varrho - b\cos v = a\cos(v-v')$$

über. Daher erhält man für die Coordinaten des Durchschnittspuncts ϱ_1, v_1, in welchem sich die Tangenten in den Endpuncten der Sehne (3.) kreuzen, die Werthe

$$v_1 = \tfrac{1}{2}(v'+v''), \qquad \varrho_1 - b\cos v_1 = a\cos\tfrac{1}{2}(v'-v'').$$

Dreht sich also ein beliebiger Winkel um den Focus, so ist der geometrische Ort für die Durchschnittspuncte der Tangenten, welche man in den Endpuncten seiner Schenkel zieht, ein confocaler Kegelschnitt, mit derselben Directrix. Der Radius-vector des Durchschnittspuncts halbirt den Winkel, der von den Rad. vect. der Berührungspuncte gebildet wird; oder den Nebenwinkel, wenn der ursprüngliche Kegelschnitt eine Hyperbel ist und die Schenkel beide Zweige schneiden. Ist der sich drehende Winkel gleich π, so ist der geometrische Ort die Directrix selbst, und der Rad. vect. des Durchschnittspuncts steht senkrecht auf den Schenkeln.

Substituirt man die obigen Werthe von $\frac{1}{2}(v'+v'')$ und $\cos\frac{1}{2}(v'-v'')$ in die Gleichung der Sehne, so geht dieselbe in

$$5. \qquad (\varrho - b\cos v)(\varrho_1 - b\cos v_1) = a^2\cos(v-v_1)$$

über. Es ist darin sogleich die Polare des Pols ϱ, v_1 zu erkennen. Aus der Symmetrie der Gleichung in Bezug auf ϱv und $\varrho_1 v_1$ folgt:

„Dass die Polaren aller Puncte, welche auf einer gegebenen Geraden liegen, durch den Pol derselben gehen."

Die Pole aller Geraden, welche durch einen Punct gehen, liegen auf den Polaren desselben.

Unter den Puncten der Polare zeichnet sich der Durchschnittspunct mit

dem Radius-vector des Poles aus. Nennt man diese beiden Puncte zugeordnete Pole in Bezug auf den Kegelschnitt, so spricht der Ausdruck

$$(\varrho - b\cos v)(\varrho_1 - b\cos v_1) = a^2$$

folgenden Satz aus:

„Das Product aus den Verhältnissen der Abstände zweier zugeordneter Pole vom Focus und von der Directrix ist constant."

Da die zugeordneten Pole für die Tangente in den Berührungspunct zusammenfallen, so ist die zuerst genannte Eigenschaft der Kegelschnitte hierin mitbegriffen.

Die beiden zugeordneten Polaren, welche sich stets auf der Directrix schneiden, haben folgende Gleichungen:

$$\varrho - b\cos v = \frac{a}{\cos\frac{1}{2}(v'-v'')}\cdot\cos(v-\tfrac{1}{2}(v'+v'')),$$

$$\varrho - b\cos v = a\cos\tfrac{1}{2}(v'-v'')\cdot\cos(v-\tfrac{1}{2}(v'+v'')).$$

„Dreht sich also ein Winkel um den Focus, so liegen die zugeordneten Pole auf zwei confocalen Kegelschnitten mit derselben Directrix; ihre zugeordneten Polaren sind die Tangenten an diese Curven."

Für den Kreis werden, da $b = 0$ ist, also die Directrix in unendlicher Entfernung liegt, die beiden zugeordneten Polaren parallel, und für die Pole ist

$$\varrho\varrho_1 = a^2.$$

„Die Entfernung der Tangenten vom Mittelpuncte ist die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen zweier zugeordneter Polaren."

Für jeden Kegelschnitt gilt dieser Satz für die Stücke, welche zwei zugeordnete Polaren und die entsprechende Tangente vom Parameter abschneiden. Es ist nämlich

$$a\,.\,a_1 = a^2\sin^2 v_1.$$

Behandelt man die Gleichung der Polare (5.) wie die der Tangente, so kommt man zu folgendem Satze, der die allgemeinste Winkelbeziehung ausdrückt und den obigen Satz für die Tangenten einschliesst:

„Dreht sich in einem Kegelschnitt ein beliebiger Winkel um den Focus, und zieht man die Polaren der Endpuncte seiner Schenkel in Bezug auf einen confocalen Kegelschnitt mit derselben Directrix, so ist der geometrische Ort für die Durchschnittspuncte ein neuer confocaler Kegelschnitt mit derselben Directrix. Der Rad. vect. des Durchschnittspuncts halbirt den Winkel zwischen den Rad. vect. der Pole; oder den Nebenwinkel, wenn die Pole auf den beiden Zweigen einer Hyperbel liegen."

Da man parallele Gerade als solche betrachten kann, die sich in unendlicher Entfernung schneiden, so müssen ihre Pole auf derselben Linie, auf der Polare des unendlich entfernten Durchschnittspuncts, sich befinden. Die Gleichung der Polare wird aber in diesem Falle, da $\varrho' = 0$ ist:

$$\varrho = -\frac{a^2}{b} \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \varphi + \frac{b^2-a^2}{b} \cos \varphi.$$

Also gehen die Polaren aller unendlich entfernten Pole, oder die Geraden, welche die Berührungspuncte zweier parallelen Tangenten verbinden, in der Ellipse und Hyperbel durch den Mittelpunct. In der Parabel ist die Polare

$$\varrho = -a \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \varphi,$$

also der Haupt-Axe parallel.

„Die Pole paralleler Geraden liegen auf demselben Durchmesser." Nennt man den Winkel, welchen der Durchmesser mit der Haupt-Axe einschliesst, z, so erhält man

$$\operatorname{tg} z = \frac{b^2-a^2}{a^2 \operatorname{tg} \varphi_1}, \qquad \text{folglich} \qquad \operatorname{tg} z \,.\, \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b^2-a^2}{a^2}.$$

„Das Product aus den trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche zwei conjugirte Sehnen mit der Haupt-Axe machen, ist daher constant."

Zum Schlusse wollen wir die Coordinaten des Poles suchen, wenn die Polare

$$\varrho = a \sin \varphi + \beta \cos \varphi$$

gegeben ist. Man vergleiche dieselbe zu dem Ende mit der Gleichung der Polare (5.), nämlich mit

$$\varrho = \frac{a^2 \,.\, \sin v'}{\varrho' - b \cos v'} \sin \varphi + \left(\frac{a^2 \cos v'}{\varrho' - b \cos v'} + b\right) \cos \varphi,$$

so findet sich

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\alpha}{\beta - b}, \text{ also } \sin \varphi' = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + (\beta-b)^2)}}, \cos \varphi' = \frac{\beta - b}{\sqrt{(\alpha^2 + (\beta-b)^2)}}, \varrho' = \frac{a^2 + b(\beta-b)}{\sqrt{(\alpha^2 + (\beta-b)^2)}}.$$

Sollen daher zwei gegebene Gerade

$$\varrho = \alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi \quad \text{und}$$
$$\varrho = \alpha' \sin \varphi + \beta' \cos \varphi$$

so beschaffen sein, dass der Pol der einen auf der andern liegt, so muss die Bedingung

$$6. \qquad \alpha \,.\, \alpha' + (\beta - b)(\beta' - b) = a^2$$

erfüllt werden. Soll eine Gerade durch ihren eigenen Pol gehen, so findet sich

$$\alpha^2 + (\beta - b)^2 = a^2,$$

d. h. die Bedingung, dass dieselbe eine Tangente sei.

Bonn im April 1847.

5.

Sur les déterminants gauches.

(*Suite du Mémoire T. XXXII. p.* 119.)

(Par Mr. *A. Cayley* à Londres.)

J'ai nommé „*Déterminant gauche*" un déterminant formé par un système de quantités $\lambda_{r.s}$, qui satisfont aux conditions

$$\mathbf{1.} \qquad \lambda_{s.r} = -\lambda_{r.s} \; (r \gtrless s)$$

(où les valeurs de r, s s'étendent depuis l'unité jusqu'à n).

Or ces déterminants peuvent facilement être exprimés par un système de déterminants pareils, dont les termes satisfont à ces conditions mêmes dans le cas où les valeurs de r et s deviennent égales, ou pour lesquels on a

$$\mathbf{2.} \qquad \lambda_{r.s} = -\lambda_{s.r} (r \gtrless s); \qquad \lambda_{r.r} = \mathbf{0}.$$

Ces déterminants peuvent être nommés „*gauches* et *symétriques*".

En effet, soit Ω le déterminant gauche dont il s'agit, cette fonction peut être presentée sous la forme

$$\mathbf{3.} \qquad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \lambda_{1.1} + \Omega_2 . \lambda_{22} \ldots . + \Omega_{12} \lambda_{11} \lambda_{22} \ldots .,$$

où Ω_0 est ce que devient Ω si $\lambda_{1.1}, \lambda_{2.2}$ etc. sont réduits à zéro. Ω_1 est ce que devient le coëfficient de λ_{11} sous la même condition, et ainsi de suite; c'est à dire: Ω_0 est le déterminant formé par les quantités $\lambda_{r.s}$ en supposant que ces quantités satisfassent aux conditions (**2.**), et en donnant à r les valeurs $\mathbf{1, 2, 3}, \ldots . n$. Ω_1 est le determinant formé pareillement en donnant à r, s les valeurs $\mathbf{2, 3}, \ldots . n$; Ω_2 s'obtient en donnant à r, s les valeurs $\mathbf{1, 3}, \ldots . n$, et ainsi de suite; cela est aisé de voir si l'on range les quantités $\lambda_{r.s}$ en forme de carré.

Or les déterminants gauches et symétriques (savoir les déterminants dont les termes satisfont aux conditions (**2.**)) se réduisent à zéro pour un n *impair*, et pour un n *pair* aux carrès des fonctions que M. *Jacobi* a traitées dans son mémoire „Ueber die *Pfaff*'sche Integrations-Methode" (**T. II.** p. **354.** de ce journal) et dans sa „Theoria novi multiplicatoris equat. diff. t. XXIX. p. **236.** etc.".

En effèt, on voit d'abord par ce que dit M. *Jacobi*, que le déterminant s'evanouit pour un *n impair*, et que pour un n pair il aura pour *facteur* la fonction dont il s'agit; mais je ne sais pas si l'on a déjà remarqué que l'autre facteur se réduit à la même fonction.

On obtient ces fonctions (dont je reprends ici la théorie), par les propriétés générales d'un déterminant défini. Car en exprimant par $(12\ldots.n)$ une fonction quelconque dans laquelle entrent les nombres symboliques $1, 2, \ldots. n$, et par $\pm$, le signe correspondant à une permutation quelconque de ces nombres, la fonction

$$\Sigma \pm (12\ldots.n)$$

(où Σ désigne la somme de tous les termes qu'on obtient en permutant ces nombres d'une manière quelconque) est ce qu'on nomme *Déterminant*. On pourrait encore généraliser cette définition en admettant plusieurs systèmes de nombres $1, 2, \ldots.n$; $1', 2', \ldots.n'$; .... qui alors devroient être permutés independamment les uns des autres; on obtiendrait de cette manière une infinité d'autres fonctions, mentionnées (T. XXX. p. 7.). Dans le cas des déterminants ordinaires, auquel je ne m'arrêterai pas ici, on aura $(12\ldots.n) = \lambda_{\alpha.1}\lambda_{\beta.2}\ldots.\lambda_{k.n}$). Pour les cas des fonctions dont il s'agit (les fonctions de M. *Jacobi*), on supposera *n pair*, et l'on ecrira

$$(12\ldots.n) = \lambda_{1.2}\lambda_{34}\ldots.\lambda_{n-1,n},$$

où $\lambda_{r.s}$ sont des quantités quelconques qui satisfont aux équations (1.). La fonction sera composée d'un nombre $1.2\ldots.n$ de termes; mais parmi eux il n'y aura que $1.3\ldots.(n-1)$ termes différents qui se trouveront repetés $2^{\frac{1}{2}n}(1.2\ldots.\frac{1}{2}n)$ fois, et qu'on obtiendra en permutant cycliquement d'abord les $n-1$ derniers nombres, puis les $n-3$ derniers nombres de chaque permutation, et ainsi de suite; le signe étant toujours $+$. Il pourra ètre démontré, comme pour les déterminants, que ces fonctions changent de signe en permutant deux quelconques des nombres symboliques, et qu'elles s'evanouissent si deux de ces nombres deviennent identiques. De plus, en exprimant par $[12\ldots.n]$ la fonction dont il s'agit, la règle qui vient d'être enoncé, donnera pour la formation de ces fonctions:

$$[12\ldots n] = \lambda_{12}[34\ldots n] + \lambda_{13}[4\ldots n-2] \ldots. + \lambda_{1.n}[23\ldots.(n-1)].$$

Cela posé, revenons aux déterminants gauches et symétriques; et soit d'abord n un nombre impair. Alors le déterminant sera composé de plusieurs termes, chacun multiplié par le produit de l'une des quantités $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \ldots. \lambda_{1.n}$ par une des

quantités $\lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_{n.1}$. Il est facile de voir que pour chaque terme, multiplié par $\lambda_{1.\alpha}\lambda_{\beta.1}$ $(\alpha \neq \beta)$, il existera un terme *égal* et de signe contraire, multiplié par $\lambda_{1.\beta}\lambda_{\alpha.1}$. Or $\lambda_{1.\alpha}\lambda_{\beta.1} = \lambda_{1.}\ \lambda_{\alpha.1}$: donc ces deux termes se *détruiront*. Restent les termes multipliés par $\lambda_{1.\alpha}\lambda_{\alpha.1}$. Le coefficient d'un terme de cette forme sera un déterminant gauche de l'ordre $n-2$, mais precisément de la forme du déterminant même de l'ordre n dont il s'agit. Or n étant impair, $n-2$ le sera également: donc tout déterminant gauche et symétrique s'évanouira, si cela a lieu pour les déterminants pareils d'un ordre inférieur de deux unités. Or pour $n = 3$ on a évidemment $\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{31} + \lambda_{21}\lambda_{32}\lambda_{13} = 0$, donc:

„Tout déterminant gauche et symétrique d'un ordre *impair* est zéro."

Soit maintenant n un nombre *pair*. Considérons le déterminant gauche et symétrique plus général qu'on obtient en donnant à r les valeurs $\alpha, 2.3 \ldots . n$ et à s les valeurs $\beta, 2, 3 \ldots . n$. En développant cette fonction comme on vient de le faire dans le cas d'un *n impair*, il se présentera d'abord un terme multiplié par $\lambda_{\alpha.\beta}$. Mais ce terme sera un déterminant gauche et symétrique de l'ordre $n-1$ (savoir celui que l'on obtiendroit en donnant à r, s les valeurs $2, 3 \ldots . n$), et comme $n-1$ est impair, ce terme s'évanouira. Puis le coëfficient de $-\lambda_{\alpha.\alpha'}\lambda_{\beta'.\beta}$ (ou de $\lambda_{\alpha.\alpha'}\lambda_{\beta.\beta'}$) sera le déterminant gauche et symétrique qu'on obtient en donnant à r les valeurs $2, 3 \ldots . n$ (α_1 excepté), et à s les valeurs $2, 3, \ldots . n$ (β' excepté). En admettant que ce déterminant gauche se réduit à $[(\alpha'+1)..n2..(\alpha'-1)]\,[(\beta'+1)..n2..(\beta'-1)]$, on aura

$$\lambda_{\alpha.\alpha'}\,[(\alpha'+1)\,..\,(\alpha'-1)]\,.\,\lambda_{\beta.\beta'}\,[(\beta'+1)\,..\,(\beta'-1)]$$

pour le terme général, et la somme de tous ces termes se réduira à

$$\{\lambda_{\alpha.2}\,[34\,..\,n] + \lambda_{\alpha.3}\,[4\,..\,n2] + ..\}\,.\,\{\lambda_{\beta.2}\,[34\,..\,n] + \lambda_{\beta.3}\,[4\,..\,n2] + ..\},$$

ou enfin à $[\alpha 23 \ldots n]\,[\beta.23 \ldots n]$. Or si le théorème en question a lieu pour $n-2$, il aura lieu aussi pour n. Pour $n = 2$ le déterminant est $\lambda_{\alpha\beta}\lambda_{22} - \lambda_{2\beta}\lambda_{\alpha.2}$, c'est à dire $\lambda_{\alpha.2}\lambda_{\beta.2}$ ou $[\alpha 2].[\beta 2]$: donc la même chose a toujours lieu et on obtient le théorème que voici:

„Le déterminant gauche et symétrique qu'on obtient en donnant à r les valeurs $\alpha, 2 \ldots n$, et à s les valeurs $\beta, 2.3 \ldots n$ (où n est *pair*), se réduit à

$$[\alpha 23 \ldots n]\,.\,[\beta 23 \ldots n];$$

et en particulier, en donnant à r, s les valeurs $1, 2, \ldots n$, ce déterminant se réduit à $[12 \ldots n]^2$."

Appliquons ces théorèmes à la réduction de l'équation (3.). En supposant pour plus de simplicité $\lambda_{r.r} = 1$, on aura pour un *n pair:*

$$\Omega = [123\ldots n]^2 + [34\ldots n]^2 + [56\ldots n]^2 + \ldots + 1;$$
$$+ [24\ldots n]^2 \quad \vdots$$
$$\vdots$$

et pour un *n impair:*

$$\Omega = [23\ldots n]^2 + [45\ldots n]^2 + \ldots + 1.$$
$$+ [13\ldots n]^2$$
$$\vdots$$

Particulièrement pour $n = 4$ on obtient:

$$\Omega = [1234]^2 + [12]^2 + [13]^2 + [14]^2 + [34]^2 + [42]^2 + [23]^2 + 1$$
$$= (\lambda_{12}.\lambda_{34} + \lambda_{13}\lambda_{24} + \lambda_{14}\lambda_{23})^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{14}^2$$
$$+ \lambda_{34}^2 + \lambda_{42}^2 + \lambda_{23}^2 + 1,$$

et pour $n = 3$:

$$\Omega = [23]^2 + [31]^2 + [12]^2 + 1$$
$$= \lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2 + 1:$$

résultats qui s'accordent parfaitement avec ceux que j'ai donnés dans mon premier mémoire sur ce sujet.

Il serait possible de trouver pour les quantités $A_{r,s}$ (mémoire cité) des expressions analogues à celles que nous venons de donner pour Ω: mais elles seraient beaucoup plus compliquées.

Londres. 1. Avril 1847.

6.

Sur quelques théorèmes de la Géométrie de position.

(*Suite de No.* 13. *Tome* 34.)

(Par M. *A. Cayley* à Londres.)

§. V.

Le théorème de *Pascal* appliqué au cas où une conique se réduit à deux droites, donne lieu à un système de neuf points situés trois à trois dans neuf droites qui passent réciproquement trois à trois par les neuf points. Je représenterai ces points par

1, 4, 7; 2, 5, 8; 3, 6, 9,

et les droites par

135, 426, 789; 129, 483, 756; 186, 459, 723.

On peut prendre pour la conique dont il s'agit, deux quelconques de ces droites qui ne se rencontrent pas dans un des neuf points, ou ce qui revient au même, deux quelconques des droites qui appartiennent à un des trois systèmes, dans lesquels les droites viennent d'être divisées; alors la troisième droite sera celle qui contient les points de rencontre des côtés opposés de l'hexagone. Par exemple, en prenant pour conique les deux droites **135, 246,** l'hexagone sera **123456,** et les points de rencontre des côtés opposés, savoir de **12** et **45,** de **23** et **56,** de **34** et **61,** seront respectivement **9, 7, 8**; c'est à dire des points situés dans la droite **789**; de manière que:

Théorème XV. „La figure formée par neuf points situés **3** à **3** dans **9** droites peut être considerée de neuf manières différentes, comme résultante du théorème de *Pascal* appliqué au cas où la conique se réduit à deux droites."

Il y a, comme l'a remarqué M. *Graves* dans le mémoire cité du „Philosophical magazine" une autre manière assez singulière d'envisager la figure. Considérons pour cela les trois triangles **126, 489, 735,** qui peuvent être derivés assez simplement de l'arrangement **135, 426, 789.** Le premier de ces triangles est circonscrit au second; car les côtés **26, 61, 12** contiennent re-

spectivement les points **4, 8, 9**; également le second est circonscrit au troisième, et le troisième au premier. On tire encore du même arrangement **135, 426, 789** un autre système pareil de triangles; savoir **189, 435, 726**. Pareillement les arrangements **129, 483, 756** et **186, 459, 723** donnent lieu chacun à deux systèmes analogues. Donc:

Théorème XVI. La figure formée par neuf points, situés trois à trois dans neuf droites, peut être considerée de six manières différentes, comme composée de trois triangles circonscrits cycliquement l'un à l'autre.

Représentons maintenant par **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** les neuf points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre (six de ces points seront nécessairement imaginaires). Ces points sont, comme on sait, situés **3** à **3** dans douze droites qui passent reciproquement quatre à quatre par les neuf points, et qui peuvent être représentées par

135, 426, 789; 129, 483, 756; 186, 459, 723; 147, 258, 369;

de sorte que ce système est un cas particulier de celui que nous venons de considérer. En considérant deux quelconques des droites qui ont un point en commun, par exemple **147, 186**, et les deux autres droites qui passent par ce même point **135, 129**, on obtient par là deux quadrilatères **4876** et **3952** qui ont pour centre commun le point **7** et dont chacun est circonscrit à l'autre. On aurait pû obtenir par ces mêmes droites **147, 186, 135, 129** des autres systèmes pareils; donc

Théorème XVII. Huit points quelconques, parmi neuf points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, peuvent être considérés de trois manières différentes comme formant deux quadrilatères circonscrits l'un à l'autre. Les diagonales de ces six quadrilatères se réduisent à quatre droites qui passent par le neuvième point d'inflexion.

§. VI. *Sur les figures réciproques.*

Soient $\xi:\omega$, $\eta:\omega$, $\varrho:\omega$ les coordonnées d'un point. Les deux plans définis par les équations

$$\left.\begin{aligned}&(a\xi + b\eta + c\varrho + d\omega)x\\ +\,&(a'\xi + b'\eta + c'\varrho + d'\omega)y\\ +\,&(a''\xi + b'\eta + c''\varrho + d''\omega)z\\ +\,&(a'''\xi + b'''\eta + c'''\varrho + d'''\omega)w\end{aligned}\right\} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\begin{aligned}&(a\xi + a'\eta + a''\varrho + a'''\omega)x\\ +\,&(b\xi + b'\eta + b''\varrho + b'''\omega)y\\ +\,&(c\xi + c'\eta + c''\varrho + c'''\omega)z\\ +\,&(d\xi + d'\eta + d''\varrho + d'''\omega)w\end{aligned}\right\} = 0$$

seront les *plans réciproques* du point donné.

Il peut arriver que le plan récipoque d'un point quelconque passe par ce point même; ce qui implique aussi l'identité des deux plans réciproques.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Ce cas particulier a été l'objèt des recherches de M. *Möbius.* Je parlerai dans la suite des réciproques de cette espèce en les appelant *Réciproques gauches.*

Mais généralement, pour que les plans réciproques d'un point passent par ce point même, il faut que le point soit situé sur une certaine surface du second ordre; et alors tous les réciproques des points situés sur cette surface, seront des plans tangents d'une autre surface du second ordre. Ces deux surfaces pourront être identiques; ce qui implique aussi l'identité des deux plans réciproques. Ce cas particulier constitue en effèt la théorie connue des *Polaires réciproques.*

Je me propose ici d'examiner la théorie du cas général, où les deux surfaces ne sont point identiques. On pourra démontrer que dans ce cas les deux surfaces ont nécessairement en commun quatre droites: ces droites se rencontrent de manière à former un quadrilatère gauche que je représenterai par $ABCD$. Il est évident que les deux surfaces se touchent aux points A, B, C, D. En effèt, le plan DAB est le plan tangent de l'une et de l'autre de ces surfaces au point A; et de même ABC, BCD et CDA sont respectivement les plans tangents aux points B, C et D. Les deux réciproques du point A se réduisent à ce même plan DAB, et il en est également pour les points B, C, D: il suit de là que les droites AC et BD sont réciproques l'une à l'autre, tandis que les droites AB, BC, CD, DA sont respectivement réciproques chacune à elle-même.

Les réciproques d'un point quelconque passent par la droite qui est l'intersection du plan polaire du point par rapport à la première surface, et de la réciproque gauche du point determiné d'une manière qui sera expliquée tout à l'heure. Donc les réciproqnes d'un point quelconque de la première surface passent par la droite qui est l'intersection du plan tangent de la première surface au point dont il s'agit, et de la réciproque gauche du même point; de manière que si cette droite d'intersection était connue, les réciproques d'un point de la première surface seraient les plans tangents de la seconde surface menès par cette droite d'intersection; où pour trouver les réciproques d'un point de la première surface, on n'a qu'à chercher la réciproque gauche dont je viens de parler.

Dans ce système de réciproques gauches, les réciproques gauches des points A, B, C, D sont (comme dans le système des réciproques que nous considérons) les plans DAB, ABC, BCD et CAD, et de là les droites AC et DB sont réciproques gauches l'une à l'autre, tandis que les droites AB, BC,

CD, DA sont réciproques gauches chacune à elle-même. Mais cela ne suffit pas pour déterminer le système des réciproques gauches. En effèt, le système des réciproques que nous considérons, n'est pas complètement determiné au moyen des deux surfaces; il contient encore une quantité arbitraire (dont on peut facilement satisfaire). Or remarquons que la réciproque gauche d'un plan quelconque, passant par la droite *AB* (ou par l'une quelconque des droites *AB, BC, CD, DA*), est située dans cette même droite. Considérons un plan donné quelconque *pAB* passant par cette droite *AB*; la réciproque gauche de ce plan sera un point *P* de la droite *AB*, dont la position pourra être prise à volonté. Au moyen de ce plan *pAB* et de sa réciproque gauche *P*, sur la droite *AB*, ou pourra facilement construire le système complète des réciproques gauches. Car soit *q* un point quelconque, et représentons par *Q* la réciproque gauche du plan *qAB* (*Q* sera aussi un point de la droite *AB*); considérons les quatre plans *DAB, CAB, pAB, qAB* qui se rencontrent selon la droite *AB*, et qui ont respectivement pour réciproques gauches les points *A, B, P, Q* (situés sur cette même droite *AB*): le rapport enharmonique des quatre plans sera égal au rapport enharmonique des quatre points; ce qui suffit pour déterminer le point *Q*, puisque les quatres plans et les trois autres points sont donnés, et la construction graphique pour déterminer ce point *Q* est parfaitement connue. Il est d'ailleurs évident que la droite menée par un point donné, de sorte qu'elle rencontre des droites réciproques gauches l'une à l'autre, est située dans la réciproque gauche de ce point. Donc, en menant par le point *q* la droite qui rencontre les deux droites *AC* et *BD*, le plan passant par cette droite et par le point *Q*, est la réciproque gauche du point *q* qu'il s'agissait de trouver*). Egalement, on pourrait construire la reciproque gauche d'un plan donné.

Donc enfin, pour trouver les réciproques d'un point de la première surface:

(A). „Construisez le plan tangent à ce point de la première surface, et construisez de la manière expliquée ci-dessus, la réciproque gauche du point. Par la droite d'intersection de ces deux plans menez deux plans tangents à la seconde surface: ces deux plans seront les réciproques qu'il s'agissait de trouver."

---

*) Il y a un cas très simple qui mérite d'être consideré; savoir celui où le point *P* coïncide avec *A*. Dans ce cas *Q* coïncide aussi avec *A*, et la réciproque gauche de *q* se réduit au plan *qAC*. De même, si les points *P, B* coïncident, la réciproque gauche de *q* se réduit au plan *qBD*.

On pourra construire d'une manière analogue les réciproques d'un plan tangent de la première surface. En effèt:

(B) „En construisant les réciproques du point de contact avec la première surface du plan dont il s'agit, les points de contact avec la seconde surface, de ces deux plans, seront les réciproucs dont il s'agissait."

Egalement, pour trouver les réciproques d'un plan tangent donné de la seconde surface:

(C) „Construisez le point de contact de ce plan avec la seconde surface, et construisez la réciproque gauche de ce même plan: la droite menée par ces deux points rencontrera la première surface dans deux points qui seront les réciproques que l'on desirait."

Et pour trouver les réciproques d'un point de la seconde surface:

(D) „Construisez les reciproques du plan tangent passant par le point donné de la seconde surface: les plans tangents à la première surface passant par ces deux points, seront les réciproques qu'il s'agissait de trouver."

En effèt les théorèmes (C, D) ne sont que des transformations des théorèmes (A, B) au moyen de la théorie des polaires réciproques.

Enfin, pour trouver les réciproques d'un point quelconque, menez par ce point trois plans tangents ou à la première ou à la seconde surface, et construisez les réciproques de ces plan au moyen du théorème (B ou C): les deux plans menés par ces points réciproques, pris trois et trois ensemble, et combinés de manière que l'intersection des deux plans coïncide avec l'intersection de la polaire par rapport à la première surface et de la réciproque gauche du point donné, selon la remarque ci-dessus, seront les réciproques cherchées; et de la même manière pour les réciproques d'un plan quelconque.

Je n'essaierai pas d'énumérer ici le grand nombre de relations descriptives qui pourraient être tirées des constructions qu'on vient d'expliquer. L'on remarquera sans peine l'analogie parfaite qui existe pour toute cette théorie et la théorie correspondante de la géométrie à deux dimensions, telle que M. *Plücker* l'a exposée „Systèm der analytischen Geometrie" p. 78 — 83. On pourra aussi consulter sur ce point un mémoire que je viens de composer pour le „Cambridge et Dublin mathematical Journal" et qui paraitra prochainement.

La verification analytique de ces théorèmes donne lieu à des développements assez intéressants. Pour obtenir l'équation de la première des surfaces du second ordre, il suffit d'écrire $\xi, \eta, \varrho, \omega$ au lieu de x, y, z, w, dans l'équation de l'un ou de l'autre des plans réciproques. En supposant que $x = 0$,

$y = 0$, $z = 0$, $w = 0$ soient des plans conjugués par rapport à la surface, et en remarquant que chacune de ces coordonnées peut être censée contenir un facteur constant, l'équation de la première surface peut être ecrite sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0.$$

On aura alors pour a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d''; a''', b''', c''', d''' un système de la forme $l, -h, g, -a$; $h, l, -f, -b$; $-g, f, l, -c$; a, b, c, l, et les équations des plans réciproques deviendront

$$(\xi x + \eta y + \varrho z + \omega w) \pm \left\{ \begin{array}{l} x(\ .\ - h\eta + g\varrho - a\omega) \\ + y(h\xi\ \ .\ \ + f\varrho - b\omega) \\ + z(-g\xi + f\eta\ \ .\ \ - c\omega) \\ + w(a\xi\ + b\eta + c\varrho\ \ .\ ) \end{array} \right\} = 0;$$

ce qui prouve le théorème énoncé ci-dessus; savoir que les deux réciproques passent par la droite d'intersection de la polaire et de la réciproque gauche du point. On obtient sans difficulté, pour l'équation de la seconde surface:

$$(x - hy + gz - aw)^2 + (hx + y - fz - bw)^2 + (-gx + fy + z - cw)^2 + (ax + by + cz + w)^2 = 0,$$

où sous une autre forme plus commode:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) + (\ .\ - hy + gz - aw)^2 + (hx\ .\ - fz - bw)^2 + (-gx + fy\ .\ - cw)^2 + (ax + by + cz\ .\ )^2 = 0.$$

Les coordonnées des points A, B, C, D seront déterminées au moyen des expressions

$$\frac{\cdot - hy + gz - aw}{x} = \frac{hx \cdot - fz - bw}{y} = \frac{-gx + fy \cdot - cw}{z} = \frac{ax + by + cz \cdot}{w},$$

ou, en introduisant la quantité indéterminée s:

$$\begin{aligned} sx - hy + gz - aw &= 0, \\ hx + sy - fz - bw &= 0, \\ -gx + fy + sz - cw &= 0, \\ ax + by + cz + sw &= 0. \end{aligned}$$

En effèt, on démontrera aisément, non seulement que les points définis par ces équations sont situés dans l'intersection des deux surfaces, mais aussi que les deux surfaces se touchent dans ces points-ci; ce qui fait voir qu'en combinant convenablement les quatre points, les deux surfaces doivent se couper (comme nous l'avons déjà avancé), suivant les droites AB, BC, CD, DA.

Je vais examiner encore de plus près le système d'équations qui déterminent ces points. On en tire tout de suite, pour déterminer s, l'équation

$$s^4 + \mu s^2 + \Theta^2 = 0,$$

où l'on a fait pour abréger:

$$\mu = a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2,$$
$$\Theta = af + bg + ch.$$

Supposons encore

$$s^2 f + a\Theta = A, \quad s^2 g + b\Theta = B, \quad s^2 h + c\Theta = C \quad \text{et}$$
$$s^2 a + f\Theta = F, \quad s^2 b + g\Theta = G, \quad s^2 c + h\Theta = H:$$

l'équation qui détermine s, pourra être écrite sous cette autre forme:

$$AF + BG + CH = 0.$$

J'ai trouvé que les équations des droites AC et BD peuvent être présentées sous les formes assez élégantes

$$\left.\begin{array}{rrrr} & -Hy + Gz - Aw = 0, \\ Hx & . & -Fz - Bw = 0, \\ -Gx + Fy & . & -Cw = 0, \\ Ax + By + Cz & . & = 0, \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{rrrr} & -Cy + Bz - Fw = 0, \\ Cx & . & -Az - Gw = 0, \\ -Bx + Ay & . & -Hw = 0, \\ Fx + Gy + Hz & . & = 0, \end{array}\right\}$$

où chacun de ces systèmes d'équations n'est équivalent qu'à un système de de deux équations. En entrechangeant les racines de l'équation en s^2, c'est à dire en écrivant $\frac{\Theta^2}{s^2}$ au lieu de s^2, les deux systèmes ne font que s'entrechanger; comme en effèt cela doit être.

Enfin, les équations des plans ACD, BAC, ou des plans ABD, BDC peuvent être exprimées sous les formes

$$PQ = (.-Hy+Gz-Aw)^2 + (Hx.-Fz-Bw)^2 + (-Gx+Fy.-Cw)^2 + (Ax+By+Cz.)^2 = 0,$$
$$RS = (.-Cy+Bz-Fw)^2 + (Cx.-Az-Gw)^2 + (-Bx+Ay.-Hw)^2 + (Fx+Gy+Hz.)^2 = 0:$$

équations desquelles on tire les relations identiques

$$PQ + RS = -s^2.(\mu^2 - 4\Theta^2)(x^2+y^2+z^2+w^2),$$
$$\Theta^2 PQ + s^4 RS = s^4.(\mu^2-4\Theta^2)$$
$$\times[(.-hy+gz-aw)^2 + (hx....fz-bw)^2 + (-gx-fy.-cw)^2 + (ax+by+cz.)^2],$$

qui mettent en évidence ce que l'on savait déjà, savoir, que les deux surfaces contiennent les droites AB, BC, CD, DA.

Mettons pour un moment, pour abréger:

$$.-h\eta+g\varrho-a\omega=l, \qquad h\xi.-f\varrho-b\omega=m,$$
$$-g\xi-f\eta.-c\omega=n, \qquad a\xi+b\eta+c\varrho.=p,$$

de sorte de l'équation de la réciproque gauche du point $(\xi, \eta, \varrho, \omega)$ devient

$$lx + my + nz + pw = 0;$$

supposons de plus que en combinant cette équation avec les équations des droites AC et BD respectivement, on obtiendra $x:y:z:w = X:Y:Z:W$ et $x:y:z:w = X_,:Y_,:Z_,:W_,$ respectivement. De là on tire

$$\left.\begin{aligned} X &= \quad . \quad - Cm + Bn - Fp, \\ Y &= Cl \quad . \quad - An - Gp, \\ Z &= - Bl + Am \quad . \quad - Hp, \\ W &= Fl + Gm + Hn \quad . \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} X_, &= \quad . \quad - Hm + Gn - Ap, \\ Y_, &= Hl \quad . \quad + Fn - Bp, \\ Z_, &= - Gl + Fm \quad . \quad - Cp, \\ W_, &= Al + Bm + Cn \quad . \end{aligned}\right\}$$

et delà, identiquement:

$$\begin{aligned} \Theta.(\Theta^2 - s^4)\xi &= \Theta X - s^2.X_, \\ \Theta.(\Theta^2 - s^4)\eta &= \Theta Y - s^2 Y_, \\ \Theta.(\Theta^2 - s^4)\varrho &= \Theta Z - s^2 Z_, \\ \Theta.(\Theta^2 - s^4)\omega &= \Theta W - s^2 W; \end{aligned}$$

ce qui correspond en effèt au théorème énoncé ci-dessus, savoir que la réciproque gauche d'un point rencontre les droites AC, BD en deux points tels, que la droite passant par ces deux points, passe par le point même. Les démonstrations des différents théorèmes d'analyse dont je me sers, n'ont point des difficultés.

En Juillet 1847.

7.

Note sur les fonctions du second ordre.

(Par M. *A. Cayley* à Londres.)

Soient $x, y, \ldots$ des variables dont le nombre est $2n$ ou $(2n+1)$; représentons par $\xi, \eta, \ldots$ un nombre égal de fonctions linéaires des variables $x, y, \ldots$ et soit

$$U = \xi x + \eta y + \ldots.$$
$$= Ax^2 + By + \ldots. + 2Hxy + \ldots. \quad \text{et}$$
$$V = \begin{vmatrix} . & \xi, & \eta .. \\ \xi & A & H \\ \eta & H & B \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

J'ai trouvé que les deux fonctions U et V peuvent être réduites à la forme

$$U = \lambda\Omega + \mu\Theta,$$
$$V = \lambda'\Omega + \mu'\Theta,$$

où $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ sont des coëfficients constants, Ω est une fonction du second ordre des n variables (fonctions linéaires de $x, y, \ldots.$), et Θ est une fonction de n ou de $n+1$ variables (fonctions linèaires de $x, y, \ldots.$); selon que le nombre des variables $x, y, \ldots.$ est $2n$ ou $2n+1$.

Par exemple pour trois variables $x, y, z,$ on a

$$U = \lambda x^2 + \mu zy,$$
$$V = \lambda' x^2 + \mu' zy;$$

et les coniques représentées par les équations $U = 0$, $V = 0$ ont entre elles un contact double. Cela se rapporte à la théorie des réciproques dans la géométrie plane, telle que M. *Plücker* l'a présentée dans son „Système de géométrie analytique".

De même pour quatre variables x, y, z, w on a

$$U = \lambda xy + \mu zw,$$
$$V = \lambda' xy + \mu' zw$$

et les surfaces représentées par les équations $U = 0$, $V = 0$ se coupent dans quatre droites, ou bien se touchent au quatre sommets d'un quadrilatère gauche. Cela se rapporte également à la théorie des réciproques dans l'espace: théorie dont j'ai parlé dans mon Mémoire „Sur quelques théorèmes de la géométrie de position" §. VI.

Il y a à remarquer que dans le cas où les coëfficients de $x, y, \ldots$ dans les fonctions $\xi, \eta, \ldots$ forment un système symétrique, c'est à dire, où

$$\xi = Ax + Hy + \ldots.$$
$$\eta = Hx + By + \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on a $\lambda : \mu = \lambda' : \mu'$, et delà $V = KU$, K étant donné par l'équation

$$K = \begin{vmatrix} A & H & \ldots \\ H & B & \\ \ldots & \ldots & ; \end{vmatrix}$$

ce qui est connu.

Remarquons enfin que dans le cas général où

$$\xi = ax + by \ldots$$
$$\eta = a'x + b'y \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

la fonction V ne change pas de valeur en écrivant au lieu de ces expressions:

$$\xi = ax + a'y + \ldots$$
$$\eta = bx + b'y + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

propriété qui se rapporte aussi à la théorie des réciproques.

En Juillet 1847.

8.

Einige Aufgaben aus der Combinationslehre.

(Von Herrn *Weiss*, Lehrer der Mathematik zu Fürth bei Nürnberg.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 12. im 34ten Bande.)

III.

1. Im vorigen Abschnitt waren gegeben n_1 Elemente, welche 1 mal, n_2 Elemente, welche 2 mal, n_3 Elemente, welche 3 mal und so bis zu n_m Elementen, welche m mal vorkommen dürfen, und es wurden daraus alle möglichen Combinationen und Variationen hergestellt und ihre Anzahl a priori gesucht, für eine beliebige $m$te Classe.

Die *Combinationen*, d. h. ihre Summe, bezeichne man durch

$$C^m(n_1, n_2, n_3 \ldots . n_m);$$

die *Variationen*, d. h. ihre Summe, durch

$$V^m(n_1, n_2, n_3 \ldots . n_m).$$

Z. B. $V^3(n_1=4, n_2=3, n_3=0)$ heisst: die Summe aller Variationen 3ter Classe mit Wiederholung, für den Fall, dass 4 Elemente 1 mal, 3 Elemente 2 mal, kein Element 3 mal gesetzt werden darf.

2. Die Anzahl der für diese Fälle möglichen *Complexionen* bezeichne man dadurch, dass man noch ein N vor obige Ausdrücke setzt; also durch

$$NC^m(n_1, n_2, n_3 \ldots . n_m) \quad \text{und} \quad NV^m(n_1, n_2, n_3 \ldots . n_m).$$

3. Aus dem vorigen Abschnitt erhält man dann folgende Formeln:

$$\text{A.} \qquad NC^m(n_1, n_2, n_3 \ldots . n_m) = \sum_{k=1}^{k=m} \mathfrak{C}^k_{S(m)}.$$

Hier bedeutet $\mathfrak{C}^k_{S(m)}$ die $k$te Combinationsclasse mit Wiederholungen zur Summe m von den Elementen $n_1, n_2, n_3 \ldots . n_m$; der deutsche Buchstab $\mathfrak{C}$ soll anzeigen:

α) Dass aus jeder Combination nach der in (II.) angegebenen Art ein Differenzen-Product herzustellen und

β) Dass jedes der so hergestellten Producte noch durch Facultäten, wie es ebenfalls oben gesagt wurde, zu dividiren sei.

$$\text{B.} \qquad NV^m(n_1, n_2, n_3 \ldots n_m) = \frac{m!}{d_1 . d_2 \ldots d'_2} \times NC^m(n_1, n_2, n_3 \ldots n_m)$$

$$= \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_q!} \times \sum_{k=1}^{k=m} \mathfrak{C}^k_{Sm}.$$

Hier sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_q$ die Indices der n für jede einzelne Combination der n zur Summe m; also ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_q = m$.

IV.

1. In (I.) wurden aus Elementenreihen Combinationen hergestellt, unter der Bedingung, dass *keine ähnlichen* Glieder in einer Combination vorkommen. Nun sollen Combinationen aufgestellt werden, unter übrigens gleichen Umständen wie dort, in welchen *auch ähnliche* Glieder in einer Combination vorkommen dürfen.

2. Gegeben seien wieder 1) eine Reihe mit p_1 Gliedern, 2) eine Reihe mit p_2 Gliedern, 3) eine Reihe mit p_3 Gliedern, ... m) eine Reihe mit p_m Gliedern. Jede Reihe habe eine andere Hauptgrösse, und jede, z. B. die $k$te, die Zahlen 1, 2, 3 .... p_k zu Indices.

3. Sind nur zwei Reihen gegeben, so findet man die *Combinationen* dadurch, dass man zu jedem Gliede der einen Reihe jedes Glied der andern hinzusetzt. Dies giebt, wenn die eine p_α, die andere p_β Glieder hat, $p_\alpha . p_\beta$ Combinationen. Aus drei Reihen findet man die Combinationen, wenn man zu jeder der aus zwei von ihnen entstandenen Combinationen jedes Glied der dritten Reihe hinzusetzt. Hat die erste Reihe p_α, die zweite p_β, die dritte p_γ Glieder, so ist die Anzahl der möglichen Combinationen $= p_\alpha . p_\beta . p_\gamma$.

4. Durch den Beweis von m zu $m + 1$ findet sich leicht, dass die Anzahl der möglichen Combinationen aus den oben gegebenen Reihen $= p_1 . p_2 . p_3 \ldots . p_m$ ist.

5. Es ist zu bemerken, dass es sowohl für die Aufstellung der Combinationen, als für die Entwicklung der Formel für ihre Anzahl, gleich ist, in welcher Aufeinanderfolge die Reihen genommen werden. Ja man kann die Reihen in Parthieen theilen, so dass die erste Parthie q_1 Reihen enthält, deren erste p_1, die zweite p_2 .... die $q_1$te p_{q_1} Glieder hat; die zweite Parthie q_2 Reihen, deren erste p_{q_1+1}, die zweite p_{q_1+2} .... die $q_2$te Reihe $p_{q_1+q_2}$ Glieder hat, und so weiter; zuletzt die $r$te Parthie, q_r Reihen, deren erste $p_{q_1+q_2-q_r+1}$, die zweite $p_{q_1+q_2+q_3 \ldots q_r+2}$ .... die $q_r$te Reihe $p_{q_1+q_2+q_3 \ldots + q_r}$ Glieder hat; wo also, weil es im Ganzen m Reihen sind, $q_1 + q_2 + q_3 \ldots . q_r = m$ ist. So

gruppirt kann man von jeder Parthie für sich die Combinationen aufstellen, dann zu jeder Combination der ersten Parthie alle Combinationen der zweiten setzen, zu jeder der dadurch entstehenden Combinationen jede Combination der dritten Parthie u. s. w. Die erste Parthie hat $p_1 \cdot p_2 \ldots p_{q_1}$, die zweite $p_{q_1+1} \cdot p_{q_1+2} \ldots p_{q_1+q_2}$, die dritte $p_{q_1+q_2} \cdot p_{q_1+q_2+2} \ldots$, die $r$te Gruppe hat $p_{q_1+q_2+\ldots q_{r-1}+1} \cdot p_{q_1+q_2+\ldots q_{r-1}+2} \ldots p_{q_1+q_2+q_3 \ldots +q_r}$ Combinationen: folglich erhält man durch die beschriebene Zusammensetzung für die Anzahl *aller* Combinationen, $p_1 \cdot p_2 \ldots p_{q_1} \cdot p_{q_1+1} \ldots p_{q_1+q_2} \cdot p_{q_1+q_2+1} \ldots p_{q_1+q_2+q_3 \ldots q_r}$, und da $q_1 + q_2 + q_3 \ldots q_r = m$ ist, $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots p_m$; wie es sein soll.

6. In einer Gruppe von m *identischen* Reihen unterscheiden sich die einzelnen Glieder bloss durch die Indices, weil alle dieselbe Hauptgrösse haben. Wollte man hier nach der Weise (4.) die Combinationen aufstellen, so würde man, wie bekannt, die $m$te *Variationsclasse* mit unbeschränkter Wiederholung finden (wo die Indices die Elemente wären). Um jedoch, wie verlangt wird, *Combinationen* zu finden, muss man bei der Aufstellung das Verfahren der gewöhnlichen Combinationen beobachten, d. h. kein niedrigeres Element auf ein höheres folgen lassen. Man wird dann für die Anzahl der möglichen Combinationen auch die Formel der Combinationen mit *beschränkter* Wiederholung erhalten. Ist demnach die Anzahl der Glieder der Reihe $= p_\alpha$ und die Anzahl der Reihen selbst $= m$, so ist, weil p_α die Anzahl der Elemente, aber Classenzahl ist, die Anzahl der möglichen Combinationen

$$= \frac{p_\alpha(p_\alpha+1)(p_\alpha+2)\ldots(p_\alpha+m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

7. Für mehrere Gruppen *identischer* Reihen stelle man von jeder Gruppe die Combinationen auf, setze sodann zu jeder Combination der ersten Gruppe jede Combination der zweiten, zu jeder der so entstandenen Combinationen jede Combination der dritten Gruppe u. s. w. (auf (5.) sich stützend). Hat dann die Reihe der ersten Gruppe p_{α_1} Glieder und sind m_1 Reihen in der Gruppe, die Reihe der zweiten Gruppe p_{α_2} Glieder mit m_2 Reihen, die Reihe der dritten Gruppe p_{α_3} Glieder mit m_3 Reihen u. s. w.; zuletzt die $r$te Gruppe p_{α_r} Glieder mit m_r Reihen: so ist die Anzahl aller hieraus hervorgehenden Combinationen

$$= \frac{p_{\alpha_1}(p_{\alpha_1}+1)\ldots(p_{\alpha_1}+m_1-1)\times p_{\alpha_2}(p_{\alpha_2}+1)\ldots(p_{\alpha_2}+m_2-1)\ldots\times p_{\alpha_r}(p_{\alpha_r}+1)\ldots(p_{\alpha_r}+m_r-1)}{1.2\ldots m_1 \times 1.2\ldots m_2 \ldots \times 1.2\ldots m_r}.$$

8. Es ist leicht zu sehen, dass wenn Combinationen aus Reihen gebildet werden, in welchen kein Index derselbe ist, auch keine ähnlichen Indices

darin vorkommen, dass indessen für ihre Bildung und ihre Anzahl Alles, was in diesem Abschnitt gesagt wurde, Gültigkeit hat.

9. Wir übergehen hier die Anwendung, welche man von dieser Art Combinationen in der Analysis, besonders in der Arithmetik der Polynomen machen kann, indem es ausser dem Zweck dieses Aufsatzes liegt, den Nutzen der Combinationslehre in der Analysis gegen das Verdammungs-Urtheil einiger Mathematiker der jüngsten Zeit zu verwahren. Der Verfasser strebt, eingedenk einer Aeusserung des bekannten Combinatorikers Dr. *Oettinger* (in der Vorrede zu seiner Combinationslehre), dieser Lehre, als einer erst noch aufkeimenden Pflanze, Nahrung zuführen zu helfen, damit sie erstarke, Aeste und Zweige treibe, und überlässt Andern die Benutzung oder Zerstörung der neuen Schösslinge.

In diesem Sinne wollen wir die Darstellungs-Art unserer Combinationen in diesem und dem Abschnitt I. näher betrachten und werden dadurch zu einer noch nicht beachteten Art von Complexionen gelangen.

10. Aus der in (3.) angegebenen Aufstellungsweise folgt, ganz ähnlich, wie es für die Combinationen in Abschnitt I. in (I. 7.) an einem Beispiele gezeigt wurde, dass an der ersten Stelle nur die Hauptgrösse der zur ersten gewählten, an der zweiten Stelle nur die Hauptgrösse der zur zweiten gewählten u. s. w. an der $m$ten Stelle nur die Hauptgrösse der zur $m$ten gewählten Reihe steht. Der Kürze wegen braucht man nur an jede Stelle ein für allemal oben die Hauptgrösse hinzusetzen und darunter nach (3.) die Indices aufzustellen.

Hätten nun alle Reihen eine gleiche Zahl von Gliedern, und so dieselben Zahlen zu Indices, so würde man nach (3.) die $m$te Combinationsclasse mit unbeschränkter Wiederholung erhalten; wie leicht zu sehen, wenn man diesen Fall mit der für Variationen gewöhnlichen Aufstellungs-Art vergleicht. Für Variationen wird jedoch noch eine zweite, kürzere Aufstellungs-Art gelehrt: die sogenannte *Erhöhungsmethode*. Dieselbe kann auch in dem Falle angewendet werden, wenn alle Reihen gleich viele Glieder haben. Aber auch dann ist sie anwendbar, wenn die Reihen eine verschiedene Zahl von Gliedern haben. In diesem letzten Falle darf jedoch, wenn die Zahl der Glieder der Reihe, von welcher die Hauptgrösse die αte Stelle einnimmt, $= p_\alpha$ ist, keine Zahl (Index) höher als p_α an der αten Stelle stehen; diese Stelle lässt nur eine Erhöhung bis zu p_α zu.

11. Hat man m Reihen von $p_1, p_2, p_3 \ldots . p_m$ Gliedern, und ist

$p_1 < p_2 < p_3 \ldots < p_m$, so hat die erste Reihe alle $p_1 = s_1$ Zahlen von 1 bis p_1; die zweite hat alle diese Zahlen und noch die $p_2 - p_1 = s_2$ Zahlen bis zu p_2; die dritte Reihe hat alle diese und noch dazu die $p_3 - p_2$ Zahlen u. s. w.; die $m$te Reihe hat alle vorhergehenden und noch die $s_m = p_m - p_{m-1}$ Zahlen von p_{m-1} bis p_m. Dann dürfen an allen Stellen nur die Zahlen bis p_1 stehen; an allen, mit Ausnahme der ersten Stelle, die Zahlen von p_1 bis p_2; an allen, mit Ausnahme der zweiten Stelle, die Zahlen von p_2 bis p_3; an allen, mit Ausnahme der dritten Stelle, die Zahlen von p_3 bis p_4, u. s. w.; an allen mit Ausnahme der $m - 1$ ersten Stellen, die Zahlen von p_{m-1} bis p_m. Man erhöhe deshalb an der ersten Stelle die Zeiger nur bis p_1, an der zweiten bis $p_2 \ldots$, an der $m$ten bis p_m. Die Gruppen, welche die Indices bilden, kann man *Variationen mit beschränkter Stellenbesetzung* nennen, da man nicht mit allen Elementen alle Stellen besetzen darf; und zwar sind die hieher gehörigen Complexionen der Indices in (I. 7.) Variationen mit beschränkter Stellenbesetzung *ohne* Wiederholung, und die *dieses* Abschnitts, *mit* Wiederholung. Eben so giebt es Combinationen und Permutationen mit *beschränkter* Wiederholung.

12. Hier sollen immer s_1 Elemente an der ersten Stelle, s_2 Elemente an der 2ten, s_3 Elemente an der 3ten und s_k Elemente an der $k$ten und in allen folgenden Stellen stehen dürfen; so also, dass $p_1 = s_1$ Elemente an allen Stellen stehen dürfen, $p_2 = s_1 + s_2$ von der zweiten an, $p_3 = s_1 + s_2 + s_3$ von der dritten an u. s. w. $p_k = s_1 + s_2 + s_3 \ldots + s_k$ von der $k$ten an, an allen Stellen. Dies giebt

$$s_1 = p_1, \quad s_1 = p_2 - p_1, \quad s_3 = p_3 - p_2, \quad s_4 = p_4 - p_3 \ldots \quad s_k = p_k - p_{k-1}.$$

V.

Von der Anzahl der Permutationen mit beschränkter Stellenbesetzung.

A. *Es sind nur ungleiche Elemente gegeben.*

1. Man ordne die zuerst gegebenen Elemente so, dass zuerst die s_1, dann die s_2 u. s. w. die s_k Elemente stehen. Die s_1 ersten Elemente geben $1.2.3 \ldots, s_1 = s_1!$ Permutationen. Kommt hiezu 1 Element von s_2, so darf dieses alle Stellen einnehmen, nur nicht die erste; folglich darf es s_1 Stellen einnehmen, und man erhält durch den Zutritt dieses neuen Elements aus jeder der $s_1!$ Permutationen s_1 neue, folglich im ganzen $s_1! \times s_1$ Permutationen. Kommt ein zweites Element aus den s_2 hinzu, so kann dasselbe $s_1 + 1$ Stellen besetzen und man erhält $s_i!\, s_1(s_1 + 1)$ Permutationen. Auf gleiche Weise fahre man fort und es findet sich, dass die s_1 und s_2 Elemente $s_1! \times (s_1, 1)^{s_2} = n_2$ Permutationen geben. Tritt zu diesen eines der s_3 Elemente, so darf es an allen

Stellen stehen, nur nicht an den zwei ersten; es darf also $s_i+s_2+1-2=s_1+s_2-1$ Stellen einnehmen. Daraus folgt, dass man aus jeder der n_2 schon gefundenen Permutationen durch den Hinzutritt eines Elements derer von s_3, $n_2(s_1+s_2-1)$ neue Permutationen erhalten werde. Ein zweites Element derer von s_2 kann $s_1 \times s_2$ Stellen einnehmen; es ergeben sich also aus den s_1 und s_2 Elementen, dann aus 2 derer von s_3, $n_2\,(s_1+s_2-1)\,(s_1+s_2)$ Permutationen. Fährt man so fort, so erhält man aus $s_i + s_2 + s_3$ Elementen
$n_2 \times (s_1+s_2-1)\,(s_i+s_2)\,(s_1+s_2+1)\,\ldots.(s_i+s_2+(s_3-2))$ Permutationen, also in Allem

$$(1,\,1)^{s_1}\,(s_1,1)^{s_2}\,(s_1+s_2-1,1)^{s_3}.$$

2. Hieraus lässt sich nach der Analogie schliessen, dass die Anzahl der Permutationen der Elemente $s_1, s_2, s_3, \ldots. s_k$ gleich ist

$$(1,1)^{s_1}\,(s_1,1)^{s_2}\,(s_1+s_2-1,1)^{s_3}\,\ldots.\,(s_1+s_2+\ldots.\,(s_{k-1}-(k-2),1)^{s_k}=n_k.$$

Ist der Ausdruck für k Reihen gültig, so kann, wenn noch ein Element derer von s_{k+i} hinzutritt, dieses an $s_1+s_2+s_3\,\ldots.\,s_k+1-k$ Stellen stehen.

Man erhält dadurch $s_1+s_2+\ldots.\,s_k(k-1)$ neue Permutationen aus jeder der n_k schon gefunden, folglich durch Hinzutritt von 1 Element der s_{k+1} Elemente, $n_k(s_1+s_2\,\ldots.\,s_k-(k-1))$ Permutationen. Durch Hinzutritt eines zweiten Elements erhält man

$$n_k\,((s_1+s_2\,\ldots.\,s_k)-(k-1))\,(s_1+s_2+s_3\,\ldots.+s_k)-(k-2)).$$

Nimmt man an, dass das hieraus sich ergebende Gesetz für den Zutritt von h neuen Elementen derer von s_{k+1} richtig sei, dass also die Anzahl der Permutationen von den Elementen $s_1, s_2, s_3, \ldots. s_k$ und h derer von s_k,

$$=n_k((s_1+s_2\,\ldots.\,s_k)-(k-1))\,((s_1+s_2+s_3\,\ldots.+s_k)-(k-2))\,\ldots.$$
$$\ldots.+((s_1+s_2+s_3\,\ldots.\,s_k)-(k-h))=h_{n_k}$$

sei, so erhält man für den Zutritt eines neuen, des $h+1$ ten Elements derer von s_{k+1}, weil dieses $s_1+s_2\,\ldots.\,s_k+h+1-k$ Stellen einnehmen kann, offenbar $h_{n_k}[(s_1+s_2\,\ldots.\,s_k)-(k-(h+1))]$ Permutationen; wodurch zunächst die Richtigkeit dargethan wird für den Hinzutritt von h Elementen eines s, also auch die Richtigkeit von n_2 und n_3. Man erhält also für die Anzahl der Permutationen aus den Elementen derer von $s_1, s_2, s_3, \ldots. s_k$ und für den Hinzutritt von h Elementen derer von s_{k+1}, wenn n_k richtig ist,
$n_k((s_1+s_2\ldots.s_k)-(k-1))((s_1+s_2+s_3\ldots.+s_k)-(k-2))\ldots.((s_1+s_2+s_3\ldots.s_k)-(k-h))$;
also für den Hinzutritt aller s_{k+1} Elemente derer von s_k (wenn man $h=s_{k+i}$ setzt), $=n_k((s_1+s_2\,\ldots.\,s_k)-(k-1))\,((s_1+s_2\,\ldots.\,s_k)-(k-2))\,\ldots.$

$+ (s_1 + s_2 + s_3 \ldots + s_k) + s_{k+1} - k = n_k(s_1 + s_2 + s_3 \ldots s_k - (k-1))^{s_{k+1}}$.
Aus diesem Resultat geht die allgemeine Gültigkeit für n_k hervor.

Demnach ist für s_1 Elemente, die von der ersten Stelle an, für s_2 Elemente die von der zweiten Stelle an, für s_3 Elemente, die von der dritten Stelle an u. s. w. zuletzt für s_k Elemente, die von der $k$ten Stelle an, an allen Stellen stehen dürfen, die Anzahl der möglichen Permutationen, wenn unter dem s *keine gleichen* Elemente sind:

$$= (1, 1)^{s_1} \times ((s_1), 1)^{s_2} \times ((s_1 + s_2 - 1), 1)^{s_3} \times ((s_1 + s_2 + s_3 - 1), 1)^{s_4} \ldots$$
$$\times ((s_1 + s_2 \ldots s_{k-1} - (k-2)), 1)^{s_k} \ldots$$

3. *Erstes Beispiel.* Es sei $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 \ldots = s_k = 1$, so ist die Anzahl $= (1, 1) = 1$, $(s_1, 1)^1 = (1,1)^1 = 1$, $(s_1 + s_2 - 1, 1)^1 = (1,1)^1 = 1 \ldots$ also die Anzahl $= 1.1.1.1.1.1 \ldots 1 = 1$; d. h. Es giebt keine weitern Stellungen, welche die Elemente in der gegebenen Complexion einnehmen können; was schon daraus folgt, dass nicht alle Elemente an die von ihnen rechts stehenden Stellen gesetzt werden können; wenn eines seine Stelle gegen eine Stelle weiter rechts vertauschen wollte, wäre kein Element mehr da, um seine verlassene Stelle zu besetzen.

Zweites Beispiel. In (I.) kommt die Complexion **1234** vor, und dort darf man bis zu **2** an der ersten Stelle, bis zu **3** an der zweiten, bis zu **4** an der dritten und bis zu **4** auch an der **4**ten Stelle erhöhen. Hier ist also $s_1 = 2$; $s_2 = 1$; $s_3 = 1$; $s_4 = 0$, folglich erhält man

$$(1, 1)^2 \times (2, 1)^1 \times (2, 1)^1 \times (2, 1)^0 = 1.2 \times 2 \times 2 \times 1;$$

wie auch in (IV. **15.**) zu sehen ist.

Drittes Beispiel. Es sollen die Stellungen (ihrer Zahl nach) angegeben werden, welche folgende **8** Figuren auf einem Schachbrett einnehmen können, wenn auf jeder der **8** Querreihen nur eine Figur stehen soll, und zwar nach folgender Regel: der schwarze und der weisse König dürfen auf allen Querreihen stehen, die Königin nur auf den **7** letzen. Ein Springer darf nur auf den **6** letzten, ein Thurm nur auf den **5** letzten, ein Läufer nur auf den **4** letzten und ein weisser und ein schwarzer Bauer nur auf den zwei letzten Stellen stehen. Hier ist

$$s_1 = 2, \quad s_2 = 1, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 1, \quad s_5 = 1, \quad s_6 = 0, \quad s_7 = 2, \quad s_8 = 0;$$

also erhält man $(1,1)^2 \times (2,1)^1 \times (2,1)^1 \times (2,1)^1 \times (2,1)^1 \times (2,1)^0 \times (1,1)^2 \times (2,1)^0$
$$= 1.2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1.2 \times 1 = 64.$$

Die Stellungen selbst sind, wenn der weisse König durch **1**, der schwarze

durch 2, die Königin durch 3, der Springer durch 4, der Thurm durch 5, der Läufer durch 6, der weisse Bauer durch 7 und der schwarze Bauer durch 8 bezeichnet wird, folgende:

I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII.	I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII.	I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII.	I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII.
1 2 3 4 5 6 7 8	1 3 2 4 5 6 7 8	2 1 3 4 5 6 7 8	2 3 1 4 5 6 7 8
1 2 3 4 5 6 8 7	1 3 2 4 5 6 8 7	2 1 3 4 5 6 8 7	2 3 1 4 5 6 8 7
1 2 3 4 6 5 7 8	1 3 2 4 6 5 7 8	2 1 3 4 6 5 7 8	2 3 1 4 6 5 7 8
1 2 3 4 6 5 8 7	1 3 2 4 6 5 8 7	2 1 3 4 6 5 8 7	2 3 1 4 6 5 8 7
1 2 3 5 4 6 7 8	1 3 2 5 4 6 7 8	2 1 3 5 4 6 7 8	2 3 1 5 4 6 7 8
1 2 3 5 4 6 8 7	1 3 2 5 4 6 8 7	2 1 3 5 4 6 8 7	2 3 1 5 4 6 8 7
1 2 3 5 6 4 7 8	1 3 2 5 6 4 7 8	2 1 3 5 6 4 7 8	2 3 1 5 6 4 7 8
1 2 3 5 6 4 8 7	1 3 2 5 6 4 8 7	2 1 3 5 6 4 8 7	2 3 1 5 6 4 8 7
1 2 4 3 5 6 7 8	1 3 4 2 5 6 7 8	2 1 4 3 5 6 7 8	2 3 4 1 5 6 7 8
1 2 4 3 5 6 8 7	1 3 4 2 5 6 8 7	2 1 4 3 5 6 8 7	2 3 4 1 5 6 8 7
1 2 4 3 6 5 7 8	1 3 4 2 6 5 7 8	2 1 4 3 6 5 7 8	2 3 4 1 6 5 7 8
1 2 4 3 6 5 8 7	1 3 4 2 6 5 8 7	2 1 4 3 6 5 8 7	2 3 4 1 6 5 8 7
1 2 4 5 3 6 7 8	1 3 4 5 2 6 7 8	2 1 4 5 3 6 7 8	2 3 4 5 1 6 7 8
1 2 4 5 3 6 8 7	1 3 4 5 2 6 8 7	2 1 4 5 3 6 8 7	2 3 4 5 1 6 8 7
1 2 4 5 6 3 7 8	1 3 4 5 6 2 7 8	2 1 4 5 6 3 7 8	2 3 4 5 6 1 7 8
1 2 4 5 6 3 8 7	1 3 4 5 6 2 8 7	2 1 4 5 6 3 8 7	2 3 4 5 6 1 8 7

B. *Es sind auch gleiche Elemente dabei.*

4. Gleiche Elemente können sich nur unter einem und demselben s finden, oder gleiche Elemente dürfen an denselben Stellen stehen. Befindet sich nun unter einem s, z. B. in s_k, eine Gruppe von α_k gleichen Elementen, dann wieder eine Gruppe von β_k, dann eine Gruppe von γ_k u. s. w., so giebt es, wenn man alle Elemente als ungleich voraussetzt, n_k Permutationen. Alle diese Permutationen kann man in Parthieen theilen, so, dass sich die von einer Parthie nur durch die Stellung der als ungleich angenommenen α_k Elemente unterscheiden. Diese α_k Elemente können aber, als unter einem s befindlich, alle möglichen $\alpha_k!$ Stellungen unter sich einnehmen; es besteht folglich jede Parthie aus $\alpha_k!$ Permutationen, und es giebt $\frac{n_k}{\alpha_k!}$ Parthieen. Sobald man aber die α_k Elemente gleich annimmt, wie es sein soll, gelten alle Permutationen einer Parthie für eine, und es wird also nur so viele Permutationen geben, als Parthieen, d. h. $\frac{n_k}{\alpha_k!}$. Auf ganz ähnliche Weise findet man, dass, wenn die gleichen Elemente folgende sind:

Eine Gruppe α_1, eine Gruppe β_1, eine Gruppe γ_1 .... unter s_1;
Eine Gruppe α_2, eine Gruppe β_2, eine Gruppe γ_2 .... unter s_2;
Eine Gruppe α_3, eine Gruppe β_3, eine Gruppe γ_3 .... unter s_3;
. . . . . .
Eine Gruppe α_k, eine Gruppe β_k, eine Gruppe γ_k .... unter s_k:
dass dann die Anzahl der Permutationen

$$= \frac{1,+1)^{s_1} \times (s_1,+1)^{s_2} \times ((s_1+s_2-1),+1)^{s_3} \times ((s_1+s_2+s_3-2),+1)^{s_4} \ldots}{\alpha_1!\beta_1!\gamma_1! \ldots \times \alpha_2!\beta_2!\gamma_2! \ldots \times \alpha_3!\beta_3\gamma_3!! \cdot \ldots \alpha_4!\beta_4!\gamma_4! \ldots}$$

$$+ \frac{((s_1+s_2 \ldots . s_{k-1}-(k-2),+1)^{s_k}}{\alpha_k!\beta_k!\gamma_k!} \text{ ist.}$$

Sind in dem obigen Beispiel die zwei Könige gleich und die zwei Bauern ebenfalls, so erhält man nur $\frac{n_k}{1.2.1.2} = \frac{64}{1.2.1.2} = \frac{64}{4} = 16$ Permutationen, nemlich die folgenden:

1 1 2 3 4 5 6 6	1 2 1 3 4 5 6 6
1 1 2 3 5 4 6 6	1 2 1 3 5 4 6 6
1 1 2 4 3 5 6 6	1 2 1 4 3 5 6 6
1 1 2 4 5 3 6 6	1 2 1 4 5 3 6 6
1 1 3 2 4 5 6 6	1 2 3 1 4 5 6 5
1 1 3 2 5 4 6 6	1 2 3 1 5 4 6 6
1 1 3 4 2 5 6 6	1 2 3 4 1 5 6 6
1 1 3 4 5 2 6 6	1 2 3 4 5 1 6 6

8, 8.

5. Für s die p gesetzt, giebt (IV. 2.) für die Anzahl der Permutationen

$$\frac{(1,+1)^{p_1}(p_1,+1)^{p_2-p_1} \times ((p_2-p_1),+1)^{p_3-p_2} \times ((p_3-p_2),+1)^{p_4-p_3} \ldots}{\alpha_1!\beta_1!\gamma_1!\alpha_2!\beta_2!\gamma_2! \times \ldots . \alpha_3!\beta_3!\gamma_3! \ldots . \times \alpha_4!\beta_4!\gamma_4! \ldots .}$$

$$\frac{\ldots . \times [(p_{k-1}-(k-2)),+1]^{p_k-p_{k-1}}}{\times \alpha_k!\beta_k!\gamma_k! \ldots .}.$$

In dem Beispiel der Schachfiguren ist

$p_1 = 2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 4$; $p_4 = 5$; $p_5 = 6$; $p_6 = 6$; $p_7 = 7$; $p_8 = 7$;
also die Anzahl $= 1.2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 64$; wie oben.

6. Letztere Formel ist die bequemste und soll in der Folge unter dem Namen: *Formel für Permutationen bei beschränkter Stellenbesetzung* immer gemeint werden.

7. Ist $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \ldots . p_k$, so ist die Anzahl der Permutationen $= \frac{(1,1)^{p_1}}{\alpha_1!\beta_1!\gamma_1! \ldots .} = \frac{1.2.3 \ldots . p_1}{\alpha_1!\beta_1!\gamma_1! \ldots .}$; wie es sein muss.

VI. Combinationen mit beschränkter Stellenbesetzung.

Bei den Combinationen kann man die ersten Stellen mit jedem der s_1 Glieder, die an allen Stellen stehen dürfen, besetzen; die zweiten mit jedem der s_1 oder s_2; die dritten mit jedem der s_1 der s_2, und der s_3 Glieder u. s. w. die $m$te Stelle mit jedem Gliede der $s_1, s_2, s_3, \ldots . s_m$. Es lassen sich hier so viele Arten bilden, als es Combinationen der s unter einander zur m ten Classe mit Wiederholung und beschränkter Besetzung giebt. Die Combination der s ist mittels der Erhöhungsmethode leicht.

Von jeder einzelnen Art erhält man,

A. Für Combinationen *ohne* Wiederholung nach (I. 2.), die Anzahl dadurch, dass man die s hintereinander als Factor setzt und, wenn mehrere, z. B. hier k, mit demselben Index aufeinander folgen, vom zweiten s mit gleichem Index 1, vom 3ten 2, vom 4ten 3 u. s. w. vom $k$ten s mit gleichem Index $k-1$ abzieht und den ganzen Ausdruck noch mit der Factorielle $k!$ dividirt.

B. Für Combinationen *mit* Wiederholung (wo ähnliche Glieder vorkommen) findet man nach (IV. 8.) die Anzahl der Combinationen jeder einzelnen Art, wenn man die s hinter einander als Factoren setzt und, falls mehrere s, z. B, k, mit gleichem Index vorkommen, zum zweiten 1, zum dritten 2, zum vierten 3 u. s. f. zum $k$ten $k-1$ addirt und ebenfalls den ganzen Ausdru mit der Factorielle $k!$ dividirt.

Beispiel. Die obern Zeichen gelten für Combinationen *ohne* Wiederholung, die untern für Combinationen *mit* Wiederholung.

I. Classe $= s_1$.

II. Classe $= \frac{s_1(s_1 \mp 1)}{1.2} + s_1 s_2$.

III. Classe $= \frac{s_1(s_1 \mp 1)}{1.2}\left[\frac{1}{3}(s_1 \mp 2) + s_2 + s_3\right] + s_1 s_2\left[\frac{(s_2 \mp 1)}{1.2} + s_3\right]$.

IV. Classe $= \frac{s_1(s_1 \mp 1)(s_1 \mp 2)}{1.2.3}\left[\frac{(s_1 \mp 3)}{4} + s_2 + s_3 + s_4\right]$

$+ \frac{s_1(s \mp 1)s_2}{1.2}\left[\frac{(s_2 \mp 1)}{1.2} + s_3 + s_4\right] + \frac{s_1(s_1 \mp 1)s_3}{1.2}\left[\frac{(s_3 \mp 1)}{1.2} + s_4\right]$

$+ \frac{s_1 s_2(s_2 \mp 1)}{1.2}\left[\frac{1}{3}(s_2 \mp 2) + s_3 + s_4\right] + s_1 s_2 s_3\left[\frac{(s_3 \mp 1)}{1.2} + s_4\right]$.

$$\text{V. Classe} = \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)(s_1\mp3)}{1.2.3.4}\left[\frac{(s_1\mp4)}{5} + s_2 + s_3 + s_4 + s_5\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)s_2}{1.2.3}\left[\tfrac{1}{2}(s_2\mp1)+s_3+s_4+s_4\right] + \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)s_3}{1.2.3}\left[\frac{(s_3\mp1)}{1.2}+s_4+s_5\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)s_4}{1.2.3}\left[\tfrac{1}{2}(s_4\mp1)+s_5\right] + \frac{s_1(s_1\mp1)s_2(s_2\mp1)}{1.2....1.2}\left[\tfrac{1}{3}(s_2\mp2)+s_3+s_4+s_5\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)s_3s_4}{1.2}\left[\tfrac{1}{2}(s_4\mp1)+s_5\right] + \frac{s_1s_2(s_2\mp1)(s_2\mp2)}{1.2.3}\left[\tfrac{1}{4}(s_2\mp3)+s_3+s_4+s_5\right]$$
$$+ \frac{s_1s_2(s_2\mp1)s_3}{1.2}\left[\frac{(s_3\mp1)}{1.2}+s_4+s_5\right] + \frac{s_1s_2(s_2\mp1)s_4}{1.2}\left[\frac{(s_4\mp1)}{1.2}+s_5\right]$$
$$+ \frac{s_1s_2s_3(s_3\mp1)}{1.2}\left[\tfrac{1}{3}(s_3\mp2)+s_4+s_5\right] + s_1s_2s_3s_4\left[\frac{(s_4\mp1)}{1.2}+s_5\right].$$

$$\text{VI. Classe} = \frac{s_1(s\mp1)(s_1\mp2)(s_1\mp3)(s_1\mp4)}{1.2.3.4.5}\left[\frac{(s_1\mp5)}{6}+s_2+s_3+s_4+s_5+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)(s_1\mp3)s_2}{1.2.3.4}\left[\tfrac{1}{2}(s_2\mp1)+s_3+s_4+s_5+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)(s_1\mp3)s_3}{1.2.3.4}\left[\frac{(s_3-1)}{1.2}+s_4+s_5+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)(s_1\mp3)s_4}{1.2.3.4}\left[\frac{(s_4\mp1)}{1.2}+s_5+s_6\right] + \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)(s_1\mp3)s_5}{1.2.3.4}\left[\frac{(s_5-1)}{1.2}+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)s_2(s_2\mp1)}{1.2.3\quad 1.2}\left[\tfrac{1}{3}(s_2\mp2)+s_3+s_4+s_5+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)s_3\times s_4}{1.2.3}\left[\tfrac{1}{2}(s_4\mp1)+s_5+s_6\right] + \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)s_3}{1.2.3}s_5\left[\frac{(s_1\mp1)}{1.2}+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)(s_1\mp2)s_4(s_4\mp1)}{1.2.3\quad 1.2}\,\frac{(s_4\mp1)}{1.2}\left[\tfrac{1}{3}(s_4\mp2)+s_5+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)s_2s_3s_5}{1.2}\left[\frac{(s_5\mp1)}{1.2}+s_6\right] + \frac{s_1(s_1\mp1)s_3s_4(s_4\mp1)}{1.2.1.2}\left[\tfrac{1}{3}(s_4\mp2)+s_5+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)s_2s_4s_5}{1.2}\left[\frac{(s_5\mp1)}{1.2}+s_6\right] + \frac{s_1(s_1\mp1)s_3(s_3\mp1)(s_9\mp2)}{1.2\;\;1.2.3}\left[\frac{(s_3\mp3)}{4}+s_4+s_5+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)s_3(s_3\mp1)s_4}{1.2.1.2}\left[\frac{(s_4\mp1)}{1.2}+s_5+s_6\right] + \frac{s_1(s_1\mp1)s_3(s_3\mp1)s_5}{1.2.1.2}\left[\tfrac{1}{2}(s_5\mp1)+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1(s_1\mp1)s_3s_4(s_4\mp1)}{1.2....1.2}\left[\tfrac{1}{3}(s_4\mp2)+s_5+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1s_2(s_2\mp1)(s_2\mp2)(s_2\mp3)}{1.2.3.4}\left[\tfrac{1}{5}(s_2\mp4)+s_3+s_4+s_4+s_6\right]$$
$$+ s_1s_2\times\frac{(s_2\mp1)(s_2\mp2)s_3}{1.2.3}\left[\frac{(s_3\mp1)}{1.2}+s_4+s_5+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1s_2(s_2\mp1)(s_2\mp2)s_4}{1.2.3}\left[\frac{(s_4\mp2)}{1.2}+s_5+s_6\right] + \frac{s_1s_2(s_2\mp1)(s_2\mp2)s_5}{1.2.3}\left[\frac{(s_5\mp1)}{1.2}+s_6\right]$$
$$+ \frac{s_1s_2(s_2\mp1)s_3(s_3\mp1)}{1.2\;\;1.2}\left[\tfrac{1}{3}(s_3\mp2)+s_4+s_5+s_6\right] + \frac{s_1s_2(s_2\mp1)s_3s_4}{1.2}\left[\frac{(s_4-1)}{1.2}+s_5+s_6\right]$$

$$+\frac{s_1 s_2(s_2\mp1)s_3 s_5}{1.2}\left[\frac{(s_5\mp1)}{1.2}+s_6\right]+\frac{s_1 s_2(s_2\mp1)s_4(s_4\mp1)}{1.2\ 1.2}\left[\tfrac{1}{3}(s_4\mp2)+s_5+s_6\right]$$
$$+\frac{s_1 s_2(s_2\mp1)}{1.2}s_4 s_5\left[\frac{(s_5\mp1)}{1.2}+s_6\right]+\frac{s_1 s_2 s_3(s_3\mp1)(s_3\mp2)}{1.2.3}\left[\frac{(s_3\mp3)}{4}+s_4+s_5+s_6\right]$$
$$+\frac{s_1 s_2 s_3(s_3\mp1)}{1.2}\times s_4\left[\frac{(s_4\mp1)}{1.2}+s_5+s_6\right]+\frac{s_1 s_2 s_3(s_3\mp1)}{1.2}s_5\left[\tfrac{1}{2}(s_5\mp1)+s_6\right]$$
$$+s_1 s_2 s_3\frac{s_4(s_4\mp1)}{1.2}\left[\tfrac{1}{3}(s_4\mp2)+s_5+s_6\right]+s_1 s_2 s_3 s_4 s_5\left[\frac{(s_5\mp1)}{1.2}+s_6\right].$$

Zur Probe, ob alle Combinationen mit dem s wirklich gemacht wurden, kann man die Zahl der einzelnen Posten dadurch berechnen, dass man aus der Formel der nächst vorstehenden Classe die Anzahl der Combinationen der s sucht, indem man darin (bis zum geltenden untern Zeichen) $s_1 = 2$; $s_2 = 3 = s_4 \ldots = 1$ setzt.

VII. Variationen mit beschränkter Stellenbesetzung.

A. *Ohne Wiederholung.*

Die Formel der Anzahl für die $m$te Classe ist, wie leicht zu sehen:

$$= p_1(p_2-1)\,(p_3-2)\,\ldots\,(p_m-(m-1)).$$

B. *Mit Wiederholung.*

Die Formel, wie ebenfalls leicht zu sehen, ist für die Anzahl $m$ter Classe

$$= p_1 p_2 p_3 \ldots p_m.$$

VIII.

Folgende Aufgabe, welche man gewöhnlich nicht beachtet und mit der wir eine Anwendung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung verbinden werden, wollen wir noch schliesslich untersuchen. Sie ist: die Anzahl der Combinationen und Variationen zu finden, *mit* und *ohne* Stellenbesetzung, in welchen r Elemente 1mal, r_2 Elemente 2mal, r_3 Elemente 3mal u. s. w., zuletzt r_p Elemente $p$mal vorkommen.

1. *Wenn die Stellenbesetzung nicht beschränkt ist*, findet sich die Aufgabe schon in Abschnitt (II.) gelöset. Jeder Posten zeigt, wie aus (II. 6.) folgt, für welche Art von Zusammensetzung er die Anzahl giebt. Z. B. in der 10ten Classe ist

$$\frac{n_3(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)(n_1-5)}{1.2\qquad 1.2.3}$$ für Combinationen und

$12600\,n_3(n-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)(n_1-5)$ für Variationen

die Anzahl, in welcher 1 Element 3mal, 2 Elemente 2mal und 3 Elemente

1 mal gesetzt vorkommen, und n_3 Elemente 3 mal, n_2 Elemente 2 mal und 1 Element 1 mal gesetzt werden dürfen.

2. Für *Combinationen und Variationen mit unbeschränkter Wiederholung*, bei n gegebenen Elementen, ist die Anzahl aus Obigem dadurch leicht zu finden, dass man $n_3 = n_2 = n_1 = n$ setzt. Sie ist also

$$\text{Für Combinationen} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2....1.2.3} \quad \text{und}$$

$$\text{Für Variationen} = 12600\, n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Aus (II. 5. und 10.) folgt, dass es für den Fall, wo r_1 Elemente p_1 mal, r_2 Elemente p_2 mal, r_3 Elemente r_3 mal, p_α Elemente p_α mal vorkommen sollen,

$$\frac{n(n-1)(n-2)....(n-(r_1+r_2+r_\alpha))}{r_1!\,r_2!....r_\alpha!} \text{ Combinationen und}$$

$$\frac{(r_1p_1+r_2p_2....r_\alpha p_\alpha)\times n(n-1)(n-2)....n(r_1+r_2-+r_\alpha-1)}{(p_1!)^{r_1}(p_2!)^{r_2}....(p_\alpha!)^{r_\alpha}....r_1!\,r_2!\,r_3!....r_\alpha!} \text{ Variationen giebt.}$$

3. *Wenn die Stellenbesetzung beschränkt ist.*

A. Combinationen.

Hiefür lassen sich die Formeln ohne besondere Schwierigkeit finden, werden jedoch sehr weitläufig. Da sich die Art ihrer Darstellung schneller aus Beispielen ersehen, als durch Beschreibung verdeutlichen lässt, so mögen hier mehrere Beispiele folgen. Es ist immer diejenige Anzahl von Combinationen, bei welchen alle Elemente 1 mal gesetzt vorkommen, weggelassen worden, weil diese Anzahl schon in (VI.) bestimmt wurde.

Classe II.

1 Element zweimal gesetzt, $= s_1$.

Classe III.

(a^3) 1 Element dreimal gesetzt, $= s_1$.

(a^2b) 1 Element zweimal, 1 Element einmal, $= s_1[(s_1-1)+2s_2s_3]$.

Classe IV.

(a^4) 1 Element viermal gesetzt, $= s$.

(a^3b) 1 Element dreimal und 1 Element einmal gesetzt,

$$= s_1[(s_1-1) + 2s_2 + 1s_2 + 1s_4].$$

(a^2b^2) 2 Elemente zweimal gesetzt, $= s_1[\frac{1}{2}(s_1-1) + s_2 + s_3]$.

(a^2bc) 1 Element zweimal und 2 Elemente einmal gesetzt,

$$= s_1(s_1-1)\,[\tfrac{1}{2}(s_1-1) + \tfrac{3}{2}s_2 + \tfrac{3}{2}s_3 + s_4]$$
$$+ s_1\,s_2\,[\tfrac{3}{2}(s_2-1) + 3s_3 + 2s_4] + s_1\,s_3\,[\tfrac{1}{2}(s_3-1) + s_4].$$

Classe V.

(a^5) 1 Element fünfmal gesetzt giebt $= s$.

(a^4b) 1 Element viermal gesetzt und 1 Element einmal,

$$= s_1[(s_1-1) + s_2 + s_3 + s_4 + s_5].$$

(a^3b^2) 1 Element dreimal und 1 Element zweimal gesetzt,

$$= s_1[(s_1-1) + 2s_2 + 2s_3 + s_1 + s_4 + s_5].$$

(a^3bc) 1 Element zweimal und 2 Elemente einmal,

$$= s_1(s_1-1)[\tfrac{1}{2}(s-2)+\tfrac{3}{2}s_2+\tfrac{3}{2}s_3+s_4+s_4] + s_1s_2[s_2-1+3s_3+2s_4+s_5]$$
$$+ s_1s_3[\tfrac{1}{2}(s_3-1)+s_4+s_5] + s_1s_4[\tfrac{1}{2}(s_4-1)+s_5].$$

(a^2b^2c) 2 Elemente zweimal und ein Element einmal,

$$= s_1(s_1-1)[\tfrac{1}{2}(s_1-2)+\tfrac{3}{2}s_2+\tfrac{3}{2}s_2+\tfrac{3}{2}s_4+s_5] + s_1s_2[\tfrac{3}{2}(s_2-1)+3s_3+3s_4+s_5]$$
$$+ s_1s_3[(s_3-1)+2s_4+s_5].$$

(a^2bcd) 1 Element zweimal und 3 Elemente einmal,

$$= s_1(s_1-1)(s_1-2)[\frac{(s_1-1)}{1.2.3} + \tfrac{2}{3}s_2 + \tfrac{2}{3}s_3 + \tfrac{2}{3}s_4 + \tfrac{1}{2}s_5]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_2[(s_2-1)+2s_3+2s_4+\tfrac{3}{2}s_5] + s_1(s_2-1)s_3[(s_3-1)+2s_4+\tfrac{3}{2}s_5]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_4[\tfrac{1}{2}(s_4-1)+s_5] + s_1s_2(s_2-1)[2(s_2-2)+2s_3+2s_4+\tfrac{3}{2}s_5]$$
$$+ s_1s_2s_3[2(s_3-1)+4s_4+3s_5] + s_1s_2s_4[(s_4-1)+2s_5]$$
$$+ s_1s_3(s_3-1)[\tfrac{1}{6}(s_3-2)+s_4+s_5] + s_1s_3s_4[\tfrac{1}{2}(s_4-1)+s_5].$$

Classe VI.

(a^6) 1 Element sechsmal gesetzt, $= s$.

(a^5b) 1 Element fünfmal und 1 Element einmal,

$$= s_1[(s_1-1) + 2s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6].$$

(a^4b^2) 1 Element viermal und 1 Element zweimal,

$$= s_1[(s_1-1) + 2s_2 + 2s_3 + s_4 + s_5].$$

(a^3b^3) 2 Elemente dreimal $= s_1[\tfrac{1}{2}(s_1-1) + s_2 + s_3 + s_4]$.

(a^4bc) 1 Element viermal und 2 Elemente einmal,

$$= s_1(s_1-1)[\tfrac{1}{2}(s_1-2)+\tfrac{3}{2}s_2+\tfrac{3}{2}s_3+s_4+s_5+s_6] + s_1s_2[\tfrac{3}{2}(s_2-1)+\tfrac{3}{2}s_3+s_4+s_5+s_6]$$
$$+ s_1s_3[\tfrac{1}{2}(s_3-1)+s_4+s_5+s_6] + s_1s_4[\tfrac{1}{2}(s_4-1)+2s_5+s_6] + s_1s_5[\tfrac{1}{2}(s_5-1)+s_6].$$

(a^3b^2c) 1 Element dreimal, 1 Element zweimal und 1 Element einmal,

$$= s_1(s_1-1)[(s_1-2)+3s_2+3s_3+3s_4+2s_5+s_6]$$
$$+ s_1s_2[3(s_2-1)+6s_3+6s_4+4s_5+2s_6] + s_1s_3[2(s_3-1)+4s_4+3s_3+2s_6]$$
$$+ s_1s_4[(s_4-1)+2s_5+s_6].$$

$(a^2b^2c^2)$ 3 Elemente zweimal, $= s_1(s_1-1)[\tfrac{1}{2}(s_1-2)+\tfrac{1}{2}s_2+\tfrac{1}{2}s_3+\tfrac{1}{2}s_4+\tfrac{1}{2}s_5]$
$$+ s_1s_2[\tfrac{1}{2}(s_2-1)+s_3+s_4+s_5] + s_1s_3[\tfrac{1}{2}(s_3-1)+s_4+s_5].$$

(a^3bcd) 1 Element dreimal und 3 Elemente einmal,

$$= s_1(s_1-1)(s_1-2)\left[\tfrac{1}{6}(s_1-3)+\tfrac{2}{3}s_2+\tfrac{3}{2}s_3+\tfrac{3}{2}s_4+\tfrac{1}{2}s_5+\tfrac{1}{2}s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_2\left[(s_2-1)+2s_3+2s_4+\tfrac{3}{2}s_5+\tfrac{3}{2}s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_3\left[(s_3-1)+2s_4+\tfrac{3}{2}s_5+\tfrac{3}{2}s_6\right] + s_1(s_1-1)s_4\left[\tfrac{1}{2}(s_4-1)+s_5+s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_5\left[\tfrac{1}{2}(s_5-1)+s_6\right] + s_1s_2(s_2-1)\left[\tfrac{2}{3}(s_2-2)+2s_3+2s_4+\tfrac{3}{2}s_5+\tfrac{3}{2}s_6\right]$$
$$+ s_1s_2s_3\left[\tfrac{5}{2}(s_3-1)+4s_4+3s_5+3s_6\right] + s_1s_2s_4\left[(s_4-1)+2s_5+2s_6\right]$$
$$+ s_1s_2s_5\left[(s_5-1)+2s_6\right] + s_1s_3(s_3-1)\left[\tfrac{1}{6}(s_3-2)+\tfrac{1}{2}s_4+\tfrac{1}{2}s_5+\tfrac{1}{2}s_6\right]$$
$$+ s_1s_3s_4\left[\tfrac{1}{2}(s_4-1)+s_5+s_6\right] + s_1s_3s_5\left[\tfrac{1}{2}(s_5-1)+s_6\right]$$
$$+ s_1s_4(s_4-1)\left[\tfrac{1}{6}(s_4-2)+\tfrac{1}{2}s_5+\tfrac{1}{2}s_6\right] + s_1s_4s_5\left[(s_5-1)+s_6\right].$$

(a^2b^2cd) 2 Elemente zweimal und 2 Elemente einmal,

$$= s_1(s_1-1)(s_1-2)\left[\tfrac{1}{2}(s_1-3)+s_2+s_3+s_4+s_5+\tfrac{1}{2}s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_2\left[\tfrac{3}{2}(s_2-1)+\tfrac{7}{2}s_3+\tfrac{7}{2}s_4+\tfrac{7}{2}s_5+2s_5\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_3\left[\tfrac{3}{2}(s_3-1)+\tfrac{7}{2}s_4+\tfrac{7}{2}s_5+2s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_4\left[\tfrac{5}{4}(s_4-1)+3s_5+2s_6\right] + s_1(s_1-1)s_5\left[\tfrac{1}{4}(s_5-1)+s_6\right]$$
$$+ s_1s_2(s_2-1)\left[(s_2-2)+3s_3+3s_4+\tfrac{3}{2}s_5\right] + s_1s_2s_3\left[3(s_3-1)+6s_4+6s_5+3s_6\right]$$
$$+ s_1s_2s_4\left[\tfrac{5}{2}(s_4-1)+5s_5+3s_6\right] + s_1s_2s_5\left[\tfrac{1}{2}(s_5-1)+s_6\right]$$
$$+ s_1s_3(s_3-1)\left[\tfrac{1}{2}(s_3-2)+\tfrac{3}{2}s_4+\tfrac{3}{2}s_5+s_6\right] + s_1s_3s_4\left[\tfrac{3}{2}(s_4-1)+3s_5+2s_6\right]$$
$$+ s_1s_3s_5\left[(s_5-1)+s_6\right].$$

(a^2bcde) 1 Element zweimal und 4 Elemente einmal,

$$= s_1(s_1-1)(s_1-2)(s_1-3)\left[\tfrac{1}{24}(s_1-4)+\tfrac{5}{24}s_2+\tfrac{5}{24}s_3+\tfrac{5}{24}s_4+\tfrac{5}{24}s_5+\tfrac{1}{24}s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)(s_1-2)s_2\left[\tfrac{5}{12}(s_2-1)+\tfrac{5}{6}s_3+\tfrac{5}{6}s_4+\tfrac{5}{6}s_5+\tfrac{2}{3}s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)(s_1-2)s_3\left[\tfrac{5}{12}(s_3-1)+\tfrac{5}{6}s_4+\tfrac{5}{6}s_5+\tfrac{2}{3}s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)(s_1-2)s_4\left[\tfrac{5}{12}(s_2-1)+\tfrac{5}{6}s_5+\tfrac{2}{3}s_6\right] + s_1(s_1-1)(s_1-2)s_5\left[\tfrac{1}{4}(s_5-1)+\tfrac{2}{3}s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_2(s_1-1)\left[\tfrac{5}{12}(s_2-2)+\tfrac{5}{4}s_3+\tfrac{5}{4}s_1+\tfrac{5}{4}s_5+1s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_2s_3\left[\tfrac{5}{4}(s_3-1)+\tfrac{5}{2}s_4+\tfrac{5}{2}s_5+2s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_2s_4\left[\tfrac{5}{4}(s_4-1)+\tfrac{5}{2}s_5+2s_6\right] + s_1(s_1-1)s_2s_5\left[\tfrac{3}{4}(s_5-1)+\tfrac{3}{2}s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_3(s_3-1)\left[\tfrac{5}{12}(s_3-2)+\tfrac{5}{4}s_4+\tfrac{5}{4}s_5+s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_3s_4\left[\tfrac{5}{4}(s_4-1)+\tfrac{4}{2}s_5+2s_6\right] + s_1(s_1-1)s_3s_5\left[\tfrac{3}{4}(s_5-1)+\tfrac{3}{2}s_6\right]$$
$$+ s_1(s_1-1)s_4(s_4-1)\left[\tfrac{1}{6}(s_4-2)+\tfrac{1}{2}s_5+\tfrac{1}{2}s_6\right] + s_1(s_1-1)s_4s_5\left[\tfrac{1}{2}(s_5-1)+s_6\right]$$
$$+ s_1s_2(s_2-1)(s_2-2)\left[\tfrac{5}{24}(s_2-3)+\tfrac{5}{6}s_3+\tfrac{5}{6}s_4+\tfrac{5}{6}s_5+\tfrac{2}{3}s_6\right]$$
$$+ s_1s_2(s_2-1)s_3\left[\tfrac{5}{4}(s_3-1)+\tfrac{5}{2}s_4+\tfrac{5}{2}s_5+2s_6\right] + s_1s_2(s_2-1)s_4\left[(s_4-1)+s_5+s_6\right]$$
$$+ s_1s_2(s_2-1)s_5\left[\tfrac{3}{2}(s_5-1)+\tfrac{3}{2}s_6\right] + s_1s_2s_3(s_3-1)\left[\tfrac{5}{6}(s_3-2)+\tfrac{5}{2}s_4+\tfrac{5}{2}s_5+2s_6\right]$$
$$+ s_1s_2s_3s_4\left[\tfrac{5}{2}(s_4-1)+5s_5+4s_6\right] + s_1s_2s_3s_5\left[\tfrac{3}{2}(s_5-1)+3s_6\right]$$
$$+ s_1s_2s_4(s_4-1)\left[\tfrac{1}{3}(s_4-2)+1s_5+1s_6\right] + s_1s_2s_4s_5\left[(s_5-1)+2s_6\right]$$
$$+ s_1s_3(s_3-1)(s_3-2)\left[\tfrac{1}{24}(s_3-3)+\tfrac{1}{6}s_4+\tfrac{1}{6}s_5+\tfrac{1}{6}s_6\right] + s_1s_3(s_3-1)s_4\left[\tfrac{1}{4}(s_4-1)+\tfrac{1}{2}s_5+\tfrac{1}{2}s_6\right]$$
$$+ s_1s_3(s_3-1)s_5\left[\tfrac{1}{4}(s_5-1)+\tfrac{1}{2}s_6\right] + s_1s_3s_4(s_4-1)\left[\tfrac{1}{6}(s_4-2)+\tfrac{1}{2}s_5+\tfrac{1}{2}s_6\right] + s_1s_3s_4s_5\left[\tfrac{1}{2}(s_5-1)+1s_6\right].$$

4. Zum Beweise, dass sich die Formeln auch weiter ganz unabhängig darstellen lassen, jedoch sehr weitläufig sind, habe ich noch die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung bei beschränkter Stellenbesetzung für den Fall berechnet, wo ein Element dreimal, zwei Elemente zweimal und drei Elemente einmal gesetzt vorkommen, also das Beispiel aus der 10ten Classe ist*).

B. Variationen.

Classe I.

1. (a'_1), d. h. ein Element einmal. Anzahl $= p_1$.

Classe II.

2. (a_1^2), d. h. ein Element zweimal. Anzahl $= p_1$.
3. $(a_1 a_2)$, d. h. zwei Elemente einmal. Anzahl $= p_1(p_2-1)$ nach (VII. a.)

Classe III.

4. (a_1^3), d. h. ein Element dreimal. Anzahl $= p_1$.
5. $(a_1^2 a_2)$, d. h. ein Element zweimal und ein Element einmal. Die Anzahl wird hier dadurch gefunden, dass man zu allen Complexionen von (2.) alle p_3 Elemente zusetzt, nur das schon dastehende nicht; dies giebt $p_1(p_3-1)$. Dann setzt man zu allen Complexionen von (3.) die zwei schon dastehenden nochmals nach einander hinzu. Dies giebt $2p_1(p_2-1)$, folglich giebt es für (5.)

$$p_1[2(p_2-1)+(p_3-1)] \text{ Variationen.}$$

6. $(a_1 a_2 a_3)$, d. h. drei Elemente einmal. Anzahl $= p_1(p_2-1)(p_3-2)$; nach (VII. a.).

7. Auf ganz ähnliche Weise wie in (5.) könnte man für jede Art einer Classe mit Hülfe der schon entwickelten Formeln der niedrigeren Classen die Formel für die Anzahl finden. Diese Berechnung wäre jedoch für höhere Classen beschwerlich und würde sehr weitläufige Formeln geben. Wir wollen daher einen andern Weg einschlagen. Die Richtigkeit des Raisonnements wird bei aufmerksamer Betrachtung leicht in die Augen fallen und durch Beispiele belegt werden.

8. Zur Fixirung des Begriffs nehme man an, es solle von den Variationen mit beschränkter Wiederholung, welche die Form $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_\alpha^{n_\alpha}$ haben, die Anzahl gefunden werden. Es kommen im ganzen $n_1+n_2\ldots+n_\alpha=m$ Elemente vor, unter welchen jedoch nur α Elemente verschieden sind.

---

*) Diese Formel füllt im Manuscript $8\frac{1}{2}$ Seiten, sehr eng beschrieben, und bleibt hier (mit Zustimmung des Herrn Verfassers) wegen der zu grossen Schwierigkeit des Drucks weg.
Anm. des Herausgebers.

a) Man hat m Stellen zu besetzen. Zuerst werden so viele Stellen, als es ungleiche Elemente giebt, folglich α Stellen, mit α verschiedenen Elementen besetzt. Da im ganzen m Stellen vorhanden sind, aber nur α besetzt werden sollen, so giebt es verschiedenartige Gruppirungen. Bei jeder Gruppirung lassen wir immer die erste Stelle vorkommen: mithin sind von den $m-1$ Stellen nur noch $\alpha-1$ zu besetzen und es giebt folglich im Ganzen $\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-(\alpha-1))}{1.2\ldots(\alpha-1)}$ Gruppirungen.

b) Bei dieser Besetzung ist zu bemerken, dass man an jede Stelle nach und nach alle Elemente treten lässt, die darin stehen dürfen; z. B. an die $k$te Stelle lässt man p_k Elemente treten. Daraus folgt, in Betracht, dass durch die Besetzung Variationen ohne Wiederholungen entstehen und demnach die Formel (VII. a.) gültig ist: dass es für die Gruppirung, wo an der ersten Stelle hier p_1 Elemente, an der $b_1$ten Stelle hier p_{b_1}, an der $b_2$ten Stelle hier p_{b_2} u. s. w., zuletzt an der $b_{\alpha-1}$ten Stelle hier $p_{b(\alpha-1)}$ Elemente stehen dürfen, $p_1(p_{b_1}-1)(p_{b_2}-2)\ldots(p_{b(\alpha-1)}-(\alpha-1))$ Variationen giebt.

c) Bezüglich der aufgegebenen Variationen sind aber nun noch $m-\alpha$ Stellen leer, und die meisten sollen in der Art besetzt werden, dass die daraus entspringenden Variationen von der Form $a_1^{n_1}a_1^{n_2}\ldots a_\alpha^{n_\alpha}$ sind. Also muss 1 Element noch n_1-1 mal, ein zweites Element noch n_2-1 mal, ein drittes Element noch n_3-1 mal u. s. w. und das αte Element noch $n_\alpha-1$ mal an leere Stellen gesetzt werden; d. h. man hat nur noch von der $m-\alpha$ten Classe die Variationen von der Art $a_1^{n_1-1}a_2^{n_1-1}\ldots a_\alpha^{n_\alpha-1}$ aufzustellen, und zwar aus α schon dastehenden Elementen.

d) Nun ist es aber nicht einerlei, welche dieser Elemente man zur Besetzung einer bestimmten Stelle nimmt. Man darf nämlich, um nicht mehrere Variationen mehr als einmal zu bekommen, an eine leere Stelle nur diejenigen der schon nach (a.) dastehenden Elemente setzen, die vor der leeren Stelle stehen. Ist also die zu besetzende leere Stelle z. B. die $h$te und $h = b_l + 1$, und es steht an der $b_l$ten Stelle nach (a.) das $l$te Element, so dürfen an die leere Stelle die $l+1$ schon dastehenden, und nur diese Elemente treten. Die Zahlen, welche anzeigen, wie viele Elemente nach dieser Bemerkung an der $x$ten leeren Stelle stehen dürfen, sollen durch p'_x bezeichnet werden. Dann dürfen an der ersten leeren Stelle p'_1, an der zweiten p_2 u. s. w. an der $x$ten leeren Stelle p'_x Elemente stehen. Die Werthe dieser p' sind leicht aus der Gruppirung von (6.) zu erkennen. Für unser Beispiel ist

$p'_1 = 1$, d. h. an der 1ten leeren Stelle darf 1 Element stehen;
$p'_2 = 1$, d. h. an der 2ten leeren Stelle darf 1 Element stehen;
. . . . . .
$p'_{(b_1-2)} = 1$, d. h. an der (b_1-2)ten leeren Stelle darf 1 Element stehen;
$p'_{(b_2-1)} = 2$, d. h. an der (b_1-1)ten leeren Stelle dürfen 2 Elemente stehen;
. . . . . .
$p'_{(b_2-3)} = 2$, d. h. an der (b_2-3)ten leeren Stelle dürfen 2 Elemente stehen;
$p'_{(b_2-2)} = 3$, d. h. an der (b_2-3)ten leeren Stelle dürfen 3 Elemente stehen;
. . . . . .
$p'_{(b_{\alpha-1})} - (\alpha-1) = \alpha$, d. h. an der $(b_{\alpha-1}-(\alpha-1))$ten leeren Stelle dürfen α Elemente stehen; und an allen nun weiter folgenden leeren Stellen dürfen α Elemente stehen.

e) Sobald die p' bestimmt sind, kann man aus der schon entwickelten Formel für die Anzahl der Variationen $m-\alpha$ter Classe von der Form $a_1^{n_1-1} a_2^{n_2-1} \ldots a_\alpha^{n_\alpha-1}$, dadurch, dass man sie für die dort stehenden $p_1 p_2 \ldots p_{(m-\alpha)}$ substituirt, berechnen, wieviele (z) neue Variationen aus einer jeden Variation einer Gruppirung entstehen, für welche die p' bestimmt sind.

f) Die gesuchte Formel hat

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-(\alpha-1))}{1.2\ldots(\alpha-1)}$$

Posten. Jeder Posten hat einen numerischen Factor z. Die Posten findet man durch Combination der p' und construirt damit als Factoren die Ausdrücke nach (b). Die p' sind aber nach (d) bekannt und durch diese die z zu jedem Posten. Die so gefundenen Ausdrücke werden addirt und die Summe ist die verlangte Anzahl.

g) Bei dieser Bestimmung sind auch die Formeln früherer Classen nöthig. Da man aber zuletzt auf die 1te, 2te, 3te Classe kommen muss, für welche die Formeln schon entwickelt sind, so kann nichts Unbestimmtes vorkommen.

h) Schliesslich wollen wir angeben, wie die p' für jeden Posten schnell gefunden werden können. Man stellt die Posten durch Combination ohne Wiederholung von $p_2, p_3, \ldots p_m$ (zur $(\alpha-1)$ten Classe) auf; und zwar von der niedrigsten bis zur höchsten Complexion gehend. Dies hat keine Schwierigkeit. Darauf stellt man weiter von den Zahlen $1, 2, 3, \ldots \alpha$ die $(m-\alpha)$te Classe der gewöhnlichen Combinationen mit Wiederholung auf, und zwar nach der Erhöhungsmethode, von der niedrigsten Complexion bis zur

höchsten. Dann sind die Zahlen der niedrigsten Complexion die p' der höchsten Complexion der Posten; die Zahlen der zweit-niedrigsten Complexion sind die p' des zweit-letzten Posten, u. s. w.; die Zahlen der höchsten Complexion sind die p' des ersten Postens, und zwar immer der Ordnung nach; p'_1 ist die erste Zahl, p'_2 die zweite Zahl u. s. w.; $p'_{(m-\alpha)}$ ist die $(m-\alpha)$te Zahl.

Es giebt

$$\frac{(m-1)(m-2)....m-(\alpha-1)}{1.2....(\alpha-1)} \text{ Posten und}$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)....(\alpha+m-\alpha-1)}{1.2....(m-\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha+m-1)}{1.2....(m-\alpha)} \text{ Combinationen}$$

der Zahlen oder Gruppen von p'; und da beide Ausdrücke bekanntlich gleich sind, so erhält man, wie es sein soll, für jeden Posten eine besondere Gruppe von p'.

i) Nimmt man alle p gleich an, so werden alle Posten gleich und fallen zusammen; es entsteht dann ein einziger Ausdruck:

$$\frac{p(p-1)....(p-\alpha+1)}{1.2....\alpha} \times Z,$$

wo Z die Summe aller numerischen Factoren ist. In diesem Falle haben wir das Z schon durch die Formeln für Variationen mit beschränkten Wiederholungen. (Vergl. auch V.) Diese Bemerkung dient zur Probe der Richtigkeit der Rechnung.

k) Für Arten einer und derselben Classe sind die Posten und die p' gleich, wenn in denselben eine gleiche Anzahl verschiedener Elemente vorkommt. Nur die Formeln, aus welchen durch die p' die Z berechnet werden, sind verschieden.

l) Zum besseren Verständniss diene folgendes Beispiel:

Gegeben sind die $p_1 = 2$ Elemente **1, 2** an allen Stellen;
Ferner die $s_2 = 1$ Elemente **3** von der **2**ten Stelle an;
Ferner die $s_3 = 1$ Elemente **4** von der **3**ten Stelle an;
Endlich die $s_4 = 1$ Elemente **5** von der **4**ten Stelle an.

Hier ist $p_1=2$; $p_2=p_1+s_2=3$; $p_3=p_1+s_1+s_2=4$; $p_4=s_1+s_2+s_3+s_4=5$. Es soll die Anzahl der Variationen IVter Classe für den Fall, dass zwei Elemente zweimal gesetzt sind, berechnet werden; nebst den Variationen selbst. Da hier zwei verschiedene Elemente vorkommen, so sind $\alpha = 2$ Stellen zuerst zu besetzen, und da $m = 4$ ist, so erhält man $\frac{3}{1} = 3$ Gruppirungen. Diese Gruppirungen sind

I.	II.	III.
0 0 . .	0 . 0 .	0 . . 0
1 2 . .	1 . 2 .	1 . . 2
1 3 . .	1 . 3 .	1 . . 3
2 1 . .	1 . 4 .	1 . . 4
2 3 . .	2 . 1 .	1 . . 5
	2 . 3 .	2 . . 1
	2 . 4 .	2 . . 3
		2 . . 4
		2 . . 5

In die erste Gruppirung kommen $p'(p_2-1) = 2.2 = 4$ Elemente, wie gehörig; in die zweite Gruppirung $p_1(p_3-1) = 2.3 = 6$ Elemente; in die dritte $p_1(p_4-1) = 2.4 = 8$ Elemente; wie es sein muss.

Nun kommt es auf die Besetzung der $m - \alpha = 4 - 2 = 2$ Stellen an. Bei der ersten Gruppirung sind die zwei ersten Stellen besetzt worden; die zwei folgenden dürfen also von beiden besetzt werden. Demnach ist $p' = 2$ und $p'_2 = 2$. Bei der zweiten Gruppirung darf an die erste leere Stelle nur das eine zuerst schon dastehende, an die zweite leere Stelle aber dürfen beide Elemente gesetzt werden. Also ist $p'_1 = 1$, $p'_2 = 2$. Bei der dritten Gruppirung darf an die zwei leeren Stellen nur das eine schon dastehende Element gesetzt werden; folglich ist $p'_1 = p'_2 = 1$.

Da die Form $a_1^2 a_2^2$ hergestellt werden soll und schon $a'_1 a'_2$ da ist, so müssen an die leeren Stellen Variationen von der Form $a'_1 a'_2$ treten. Folglich giebt es bei der ersten Gruppirung $z = p'_1(p'_2-1) = 2.1 = 2$ aus (3.), bei der zweiten Gruppirung $z = p'_1(p'_2-1) = 1.1 = 1$, bei der dritten Gruppirung $z = p'_1(p'_1-1) = 1.0 = 0$ Variationen von der verlangten Art; mithin ist die allgemeine Formel der 4ten Classe der Variationen von der Form

$$a_1^2 a_2^2 = p_1[2(p_2-1) + (p_3-1)].$$

In unserm Beispiel giebt es also $= 2.[2.2+3] = 14$ Variationen. Dieselben sind folgende:

Aus der ersten Gruppirung

$$\left.\begin{array}{l} 1\,2\,\overset{1}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot} = 1\,2\,1\,2 \\ 1\,2\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{1}{\cdot} = 1\,2\,2\,1 \\ 1\,3\,\overset{1}{\cdot}\,\overset{3}{\cdot} = 1\,3\,1\,3 \\ 1\,3\,\overset{3}{\cdot}\,\overset{1}{\cdot} = 1\,3\,3\,1 \\ 2\,1\,\overset{1}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot} = 2\,1\,1\,2 \\ 2\,1\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{1}{\cdot} = 2\,1\,2\,1 \\ 2\,3\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{3}{\cdot} = 2\,3\,2\,3 \\ 2\,3\,\overset{3}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot} = 2\,3\,3\,2 \end{array}\right\} 8.$$

Aus der zweiten Gruppirung

$$\left.\begin{array}{l} 1\,\overset{1}{\cdot}\,2\,\overset{2}{\cdot} = 1\,1\,2\,2 \\ 1\,\overset{1}{\cdot}\,3\,\overset{3}{\cdot} = 1\,1\,3\,3 \\ 1\,\overset{1}{\cdot}\,4\,\overset{4}{\cdot} = 1\,1\,4\,4 \\ 2\,\overset{2}{\cdot}\,1\,\overset{1}{\cdot} = 2\,2\,1\,1 \\ 2\,\overset{2}{\cdot}\,3\,\overset{3}{\cdot} = 2\,2\,3\,3 \\ 2\,\overset{2}{\cdot}\,4\,\overset{4}{\cdot} = 2\,2\,4\,4 \end{array}\right\} 6.$$

Also finden sich, wie gehörig, $8 + 6 = 14$ Variationen.

m) Für die Form $a_1^3 a_2^1$ vierter Classe hat man auch wieder $\alpha = 2$ ungleiche Elemente, folglich dieselben Gruppirungen und auch dieselben p'; wie es schon in (k) bemerkt wurde. Allein hier hat man an die leeren Stellen Variationen von der Form a_1^2 herzustellen. Für diese Form giebt es aus (2.) p'_1 Variationen in jeder Gruppirung, aus jeder durch Besetzung der $a_1 = 2$ Stellen hervorgegangenen Variationen. Also giebt es in der Gruppirung I. $p' = 2 = z$; in der Gruppirung II. $p' = 1 = z$; in der Gruppirung III. $p' = 1 = 2$ aus jeder der schon dastehenden Variationen, wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} 1\,2\,\overset{1}{\cdot}\,\overset{1}{\cdot} = 1\,2\,1\,1 \\ 1\,2\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot} = 1\,2\,2\,2 \\ 1\,3\,\overset{1}{\cdot}\,\overset{1}{\cdot} = 1\,3\,1\,1 \\ 1\,3\,\overset{3}{\cdot}\,\overset{3}{\cdot} = 1\,3\,3\,3 \\ 2\,1\,\overset{1}{\cdot}\,\overset{1}{\cdot} = 2\,1\,1\,1 \\ 2\,1\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot} = 2\,1\,2\,2 \\ 2\,3\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot} = 2\,3\,2\,2 \\ 2\,3\,\overset{3}{\cdot}\,\overset{3}{\cdot} = 2\,3\,3\,3 \end{array}\right\} 8,$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\,\overset{1}{\cdot}\,2\,\overset{1}{\cdot} = 1\,1\,2\,1 \\ 1\,\overset{1}{\cdot}\,3\,\overset{1}{\cdot} = 1\,1\,3\,1 \\ 1\,\overset{1}{\cdot}\,4\,\overset{1}{\cdot} = 1\,1\,4\,1 \\ 2\,\overset{2}{\cdot}\,1\,\overset{2}{\cdot} = 2\,2\,1\,2 \\ 2\,\overset{2}{\cdot}\,3\,\overset{2}{\cdot} = 2\,2\,3\,2 \\ 2\,\overset{2}{\cdot}\,4\,\overset{2}{\cdot} = 2\,2\,4\,2 \end{array}\right\} 6,$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\,\overset{1}{\cdot}\,\overset{1}{\cdot}\,2 = 1\,1\,1\,2 \\ 1\,\overset{1}{\cdot}\,\overset{1}{\cdot}\,3 = 1\,1\,1\,3 \\ 1\,\overset{1}{\cdot}\,\overset{1}{\cdot}\,4 = 1\,1\,1\,4 \\ 1\,\overset{1}{\cdot}\,\overset{1}{\cdot}\,5 = 1\,1\,1\,5 \\ 2\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot}\,1 = 2\,2\,2\,1 \\ 2\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot}\,3 = 2\,2\,2\,3 \\ 2\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot}\,4 = 2\,2\,2\,4 \\ 2\,\overset{2}{\cdot}\,\overset{2}{\cdot}\,5 = 2\,2\,2\,5 \end{array}\right\} 8.$$

Für diese Form giebt die allgemeine Formel $p_1[2(p_2-1)+1(p_3-1)+1(p_4-1)]$ für unser Beispiel $= 2[2.2+3+4] = 22$; wie gehörig.

Nach der Erhöhungsmethode würden die Variationen so aufgestellt sich zeigen:

$a_1^2\, a_2^2$		$a_1^3\, a_2^1$		
1 1 2 2		III.	1 1 1 2	
1 1 3 3			1 1 1 3	
1 1 4 4			1 1 1 4	
1 2 1 2			1 1 1 5	
1 2 2 1		II.	1 1 2 1	
1 3 1 3	Dies sind		1 1 3 1	
1 3 3 1	dieselben		1 1 4 1	
2 1 1 2	14 Variationen	I.	1 2 1 1	
2 1 2 1	wie oben.		1 2 2 2	
2 2 1 1			1 3 1 1	Dies sind
2 2 3 3			1 3 3 3	dieselben
2 2 4 4			2 1 1 1	Variationen
2 3 2 3			2 1 2 2	wie oben.
2 3 3 2		II.	2 2 1 2	
		III.	2 2 2 1	
			2 2 2 3	
			2 2 2 4	
			2 2 2 5	
		II.	2 2 3 2	
			2 2 4 2	
		I.	2 3 2 2	
			2 3 3 3	

n) Für die Form $a_1^2\, a_2\, a_3$ ist $x = 3$, $m = 4$. Die Zahlen sind

$$p_1(p_2-1)\,(p_3-2),$$
$$p_1(p_2-1)\,(p_4-2),$$
$$p_1(p_3-1)\,(p_4-2);$$

folglich giebt es $\frac{3.2}{1.2} = 3$ Posten. Die Gruppirungen hiefür sind

$$0\ 0\ 0 \qquad p' = 3,$$
$$0\ 0\ 0 \qquad p'_1 = 2,$$
$$0\ 0\ 0 \qquad p'_1 = 1.$$

Eine Stelle bleibt leer. Für die erste Gruppirung ist $p' = 3$; für die zweite $p' = 2$; für die dritte $p' = 1$. Für die Variationen an der leeren Stelle ist aus (1.) die Anzahl $= p$, folglich ist $z = 3$ für (I.); $z = 2$ für (II.); $z = 1$ für (III.), und die Formel für die Anzahl der Variationen 4ter Classe von der Form $a_1^2\, a_2\, a_3$ ist

$$= p_1[3(p_2-1)(p_3-2) + 2(p_2-1)(p_4-2) + 1(p_3-1)(p_4-2)].$$

Für die Classe IV. giebt es also:

9. (a_1^4), d. h. ein Element 4mal; die Anzahl $= p_1$.

10. $(a_1^3 a_2^1)$, d. h. ein Element 3mal und ein Element 1mal; die Anzahl $= p[2(p_2-1) + (p_3-1) + (p_4-1)]$ aus (m).

11. $(a_1^2\, a_2^2)$, d. h. zwei Elemente zweimal; die Anzahl $= p_1[2(p_2-1) + (p_3-1)]$.

12. $(a_1^2\, a_2\, a_3)$, d. h. ein Element 2mal und zwei Elemente 1mal; die Anzahl ist $= p_1[3(p_2-1)(p_3-2) + 2(p_2-1)(p_4-2) + 1(p_3-1)(p_4-2)]$.

13. Um durch ein Beispiel besonders das in (h und i) Gesagte zu erörtern, diene folgende Aufgabe:

Es soll für die Art $a_1^2\, a_2^2\, a_3^2\, a_4^1\, a_5^1\, a_6^1$ zehnter Classe die Anzahl der Variationen gefunden werden. Hier ist $\alpha = 6$, $m = 10$, $m - \alpha = 4$; folglich besteht die Formel aus $\frac{9.8.7.6.5}{4.2.3.4.5} = 126$ Posten, und 126 z sind zu entwickeln, von welchen letztern jedoch einige $= 0$ werden können; was die Anzahl der Posten vermindert.

Wir stellen von unten nach oben die Combinationen der p auf; so wie die Combinationen der p'. Für das Erste sind es die gewöhnlichen Combinationen ohne Wiederlegung zur 5ten Classe aus den Elementen p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9 und p_{10}; für das Zweite die gewöhnlichen Combinationen zur 4ten Classe mit unbeschränkter Wiederholung aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Berechnung der Z nach der Formel $p_1[3(p_2-1)(p_3-2)+2(p_2-1)(p_4-2)+(p_3-1)(p_4-2)]$ $p_1^1 p_2^1 p_3^1 p_4^1$	Z. Die Posten der Formel sind
6666 $6[3.5.4+2.5.4+1.5.4]=720$;	$720 p_1(p_3-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_5-4)(p_6-6)$
5666 $5[3.5.4+2.5.4+1.5.4]=600$;	$600 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_5-4)(p_7-5)$
5566 $5[3.4.4+2.4.4+1.5.4]=500$;	$500 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_5-4)(p_8-5)$
5556 $5[3.4.3+2.4.4+1.5.4]=420$;	$420 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_5-4)(p_9-5)$
5555 $5[3.4.3+2.4.3+1.4.3]=360$;	$360 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_5-4)(p_{10}-5)$
4666 $4[3.5.4+2.5.4+1.5.4]=480$;	$480 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_6-4)(p_7-5)$
4566 $4[3.4.4+2.4.4+1.5.4]=400$;	$400 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_6-4)(p_8-5)$
4556 $4[3.4.3+2.4.4+1.4.4]=336$;	$336 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_6-4)(p_9-5)$
4555 $4[3.4.3+2.4.3+1.4.3]=288$;	$288 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_6-4)(p_{10}-5)$
4466 $4[3.3.4+2.3.4+1.5.4]=320$;	$320 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_7-4)(p_8-5)$
4456 $4[3.3.3+2.2.4+1.4.4]=268$;	$268 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_7-4)(p_9-5)$
4455 $4[3.3.3+2.3.3+1.4.3]=228$;	$228 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_7-4)(p_{10}-5)$
4446 $4[3.3.2+2.3.4+1.3.4]=216$;	$216 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_8-4)(p_9-5)$
4445 $4[3.3.2+2.3.3+1.3.3]=180$;	$180 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
4444 $4[3.3.2+2.3.2+1.3.2]=144$;	$144 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
3666 $3[3.5.4+2.5.4+1.5.4]=360$;	$360 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_7-5)$
3566 $3[3.4.4+2.4.4+1.5.4]=300$;	$300 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_8-5)$
3556 $3[3.4.3+2.4.4+1.4.4]=252$;	$252 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_9-5)$
3555 $3[3.4.3+2.4.3+1.4.3]=216$;	$216 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_{10}-5)$
3466 $3[3.3.4+2.3.4+1.5.4]=240$;	$240 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_7-4)(p_8-5)$
3456 $3[3.3.3+2.3.4+1.4.4]=201$;	$201 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_7-4)(p_9-5)$
3455 $3[3.3.3+2.3.3+1.4.3]=171$;	$171 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_7-4)(p_{10}-5)$
3446 $3[3.3.1+2.3.4+1.3.4]=162$;	$162 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_8-4)(p_9-5)$
3445 $3[3.3.2+2.3.3+1.3.3]=135$;	$135 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
3444 $3[3.3.2+2.3.2+1.3.2]=108$;	$108 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
3366 $3[3.2.4+2.2.4+1.5.4]=180$;	$180 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_8-5)$
3356 $3[3.2.3+2.2.4+1.4.4]=150$;	$150 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_9-5)$
3355 $3[3.2.3+2.2.3+1.4.3]=126$;	$126 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_{10}-5)$
3346 $3[3.2.2+2.2.4+1.3.4]=120$;	$120 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_6-3)(p_3-4)(p_9-5)$
3345 $3[3.2.2+2.2.3+1.3.3]=99$;	$99 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_6-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
3344 $3[3.2.2+2.2.2+1.3.2]=78$;	$78 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_6-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
3336 $3[3.2.1+2.2.4+1.2.4]=90$;	$90 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_9-5)$
3335 $3[3.2.1+2.2.3+1.2.3]=72$;	$72 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
3334 $3[3.2.1+2.2.2+1.2.2]=54$;	$54 p_1(p_2-1)(p_3-2)(p_7-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
3333 $3[3.2.1+2.2.1+1.2.1]=36$;	$36 p_1(p_2-1)(p_7-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
Zusammen 8610	

Berechnung der Z nach der Formel $p_1[3(p_2-1)(p_3-2)+2(p_2-1)(p_4-2)+(p_3-1)(p_4-2)$ $p_1^1 p_2^1 p_3^1 p_4^1$	Z. Die Posten selbst, welche addirt die gesuchte Formel geben, sind:
2666 $2[3.5.4+2.5.4+1.5.4]=240;$	$240p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_6-1)(p_7-1)$
2566 $2[3.4.3+2.4.4+1.4.4]=200;$	$200p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_8-5)$
2556 $2[3.4.3+2.4.4+1.4.4]=168;$	$168p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_9-5)$
2555 $2[3.4.3+2.4.3+1.4.3]=144;$	$144p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_{10}-5)$
2466 $2[3.3.4+2.3.4+1.5.4]=160;$	$160p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_7-4)(p_3-5)$
2456 $2[3.3.3+2.3.4+1.4.3]=134;$	$134p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_7-4)(p_9-5)$
2455 $2[3.3.3+2.3.3+1.4.3]=114;$	$114p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_7-4)(p_{10}-5)$
2446 $2[3.3.2+2.3.4+1.3.4]=108;$	$108p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_8-4)(p_9-5)$
2445 $2[3.3.2+2.3.3+1.3.3]=90;$	$90p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
2444 $2[3.3.2+2.3.2+1.3.2]=72;$	$72p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
2366 $3[3.2.4+2.2.4+1.5.4]=120;$	$120p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_8-5)$
2356 $2[3.2.3+2.2.4+1.4.4]=100;$	$100p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_9-5)$
2355 $2[3.2.3+2.2.3+1.4.3]=84;$	$84p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_{10}-5)$
2346 $2[3.2.2+2.2.4+1.3.4]=80;$	$80p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
2345 $2[3.2.2+2.2.3+1.3.3]=66;$	$66p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_8-3)(p_{10}-5)$
2344 $2[3.2.2+2.2.2+1.3.2]=52;$	$52p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
2336 $2[3.2.1+2.2.4+1.2.4]=60;$	$60p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_9-5)$
2335 $2[3.2.1+2.2.3+1.2.3]=48;$	$48p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
2334 $2[3.2.1+2.2.2+1.2.2]=36;$	$36p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_7-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
2333 $2[3.2.1+2.2.1+1.2.1]=24;$	$24p_1(p_2-1)(p_4-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
2266 $2[3.1.4+2.1.4+1.5.4]=80;$	$80p_1(p_2-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_8-5)$
2256 $2[3.1.3+2.1.4+1.4.4]=66;$	$66p_1(p_2-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_9-5)$
2255 $2[3.1.3+2.1.3+1.4.3]=54;$	$54p_1(p_2-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_{10}-5)$
2246 $2[3.1.2+2.1.4+1.3.4]=52;$	$52p_1(p_2-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_8-4)(p_9-5)$
2245 $2[3.1.2+2.1.3+1.3.3]=42;$	$42p_1(p_2-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
2244 $2[3.1.2+2.1.2+1.3.2]=32;$	$32p_1(p_2-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
2236 $2[3.1.1+2.1.4+1.2.4]=38;$	$38p_1(p_2-1)(p_5-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_9-5)$
2235 $2[3.1.1+2.1.3+1.2.3]=30;$	$30p_1(p_2-1)(p_5-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
2234 $2[3.1.1+2.1.2+1.2.2]=22;$	$22p_1(p_2-1)(p_5-2)(p_7-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
2233 $2[3.1.1+2.1.1+1.2.1]=14;$	$14p_1(p_2-1)(p_5-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
2226 $2[3.1.0+2.1.4+1.1.4]=24;$	$24p_1(p_2-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_9-5)$
2225 $2[3.1.0+2.1.3+1.1.3]=18;$	$18p_1(p_2-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
2224 $2[3.1.0+2.1.2+1.1.2]=12;$	$12p_1(p_2-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
2223 $2[3.1.0+2.1.1+1.1.1]=6;$	$6p_1(p_2-1)(p_6-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
2222 $2[3.1.0+2.1.0+1.1.0]=0;$	$0p_1(p_2-1)(p_7-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
Zusammen 2590	

Berechnung der Z nach der Formel $p_1[3(p_2-1)(p_3-2)+2(p_2-1)(p_4-2)+(p_3-1)(p_3-2)]$ $p_1 p_2^1 p_3 p_4$	Z. Die Posten selbst, welche addirt die gesuchte Formel geben, sind:
1666 1[3.5.4+2.5.4+1.5.4]=120;	$120p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_7-5)$
1566 1[3.4.4+2.4.4+1.5.4]=100;	$100p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_8-5)$
1556 1[3.4.3+2.4.4+1.4.4]=84;	$84p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_9-5)$
1555 1[3.4.3+1.4.3+1.4.3]=72;	$72p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_6-4)(p_{10}-5)$
1466 1[3.3.4+2.3.4+1.5.4]=80;	$80p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_7-4)(p_8-5)$
1456 1[3.3.3+2.3.4+1.4.4]=67;	$67p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_7-4)(p_9-5)$
1455 1[3.3.3+2.3.3+1.4.3]=57;	$57p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_7-4)(p_{10}-5)$
1446 1[3.3.2+2.3.4+1.3.4]=54;	$54p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_8-4)(p_9-5)$
1445 1[3.3.2+2.3.3+1.3.3]=45;	$45p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
1444 1[3.3.2+2.3.2+1.3.2]=36;	$36p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1366 1[3.2.4+2.2.4+1.5.4]=60;	$60p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_8-5)$
1356 1[3.2.3+2.2.4+1.4.4]=50;	$50p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_9-5)$
1355 1[3.2.3+2.2.3+1.4.3]=42;	$42p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_{10}-5)$
1346 1[3.2.2+2.2.4+1.3.4]=40;	$40p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_8-4)(p_9-5)$
1345 1[3.2.2+2.2.3+1.3.3]=33;	$33p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
1344 1[3.2.2+2.2.2+1.3.2]=26;	$26p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_6-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1336 4[3.2.1+2.2.4+1.2.4]=30;	$30p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_9-5)$
1335 1[3.2.1+2.2.3+1.2.3]=24;	$24p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_{19}-5)$
1334 1[3.2.1+2.2.2+1.2.2]=18;	$18p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_7-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1333 1[3.2.1+1.2.1+1.2.1]=12;	$12p_1(p_3-1)(p_4-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1266 1[3.1.4+2.1.4+1.5.4]=40;	$40p_1(p_3-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_8-5)$
1256 1[3.1.3+2.1.4+1.4.4]=33;	$33p_1(p_3-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_9-5)$
1255 1[3.1.3+2.1.3+1.4.3]=27;	$27p_1(p_3-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_{10}-5)$
1246 1[3.1.2+2.1.4+3.4.3]=26;	$26p_1(p_3-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_8-4)(p_9-5)$
1245 1[3.1.2+2.1.3+1.3.3]=21;	$21p_1(p_3-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
1244 1[3.1.2+2.1.2+1.3.2]=16;	$16p_1(p_3-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1236 1[3.1.1+2.1.4+1.2.4]=19;	$19p_1(p_3-1)(p_5-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_9-5)$
1235 1[3.1.1+2.1.3+1.2.3]=15;	$15p_1(p_3-1)(p_5-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
1234 1[3.1.1+2.1.2+1.2.2]=11;	$11p_1(p_3-1)(p_5-2)(p_7-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1233 1[3.1.1+2.1.1+1.2.1]=7;	$7p_1(p_3-1)(p_5-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1226 1[3.1.0+2.1.4+1.1.4]=12;	$12p_1(p_3-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_9-5)$
1225 1[3.1.0+2.1.3+1.1.3]=9;	$9p_1(p_3-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
1224 1[3.1.0+2.1.2+1.1.2]=6;	$6p_1(p_3-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1223 1[3.1.0+2.1.1+1.1.1]=3;	$3p_1(p_3-1)(p_6-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1222 1[3.1.0+2.1.0+1.1.0]=0;	$0p_1(p_3-1)(p_7-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
Zusammen 1295	

Berechnung der Z nach der Formel
$p_1[3(p_2-1)(p_3-2)+2(p_2-1)(p_4-2)+(p_3-1)(p_4-2)]$
$p_1^1 p_2^1 p_3^1 p_4^1$

	Z. Die Posten, welche addirt die gesuchte Formel geben, sind:
1166 1[3.0.4+2.0.4+1.5.4]=20;	$20p_1(p_4-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_8-5)$
1156 1[3.0.3+2.0.4+1.4.4]=16;	$16p_1(p_4-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_9-5)$
1155 1[3.0.3+2.0.3+1.4.3]=12;	$12p_1(p_4-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_7-4)(p_{10}-5)$
1146 1[3.0.2+2.0.4+1.3.4]=12;	$12p_1(p_4-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_8-4)(p_9-5)$
1145 1[3.0.2+2.0.3+1.3.3]=9;	$9p_1(p_4-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
1144 1[3.0.2+2.0.2+1.3.2]=6;	$6p_1(p_4-1)(p_5-2)(p_6-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1136 1[3.0.2+2.0.4+1.2.4]=8;	$8p_1(p_4-1)(p_5-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_9-5)$
1135 1[3.0.1+2.0.3+1.2.3]=6;	$6p_1(p_4-1)(p_5-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
1134 1[3.0.1+2.0.2+1.2.2]=4;	$4p_1(p_4-1)(p_5-2)(p_7-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1133 1[3.0.1+2.0.1+1.2.1]=2;	$2p_1(p_4-1)(p_5-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
Zusammen 95	

Berechnung der Z nach der Formel
$p_1[3(p_2-1)(p_3-2)+2(p_2-1)(p_4-2)+(p_3+1)(p_4-2)]$
$p_1^1 p_2^1 p_3^1 p_4^1$

	Z. Die Posten, welche addirt die gesuchte Formel geben, sind:
1126 1[3.0.0+2.0.4+1.1.4]=4;	$4p_1(p_4-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_9-5)$
1125 1[3.0.0+2.0.3+1.1.3]=3;	$3p_1(p_4-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
1124 1[3.0.0+2.0.2+1.1.2]=2;	$2p_1(p_4-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1123 1[3.0.0+2.0.1+1.1.1]=1;	$1p_1(p_4-1)(p_6-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1122 1[3.0.0+2.0.0+1.1.0]=0;	$0\times p_1(p_4-1)(p_7-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1116 1[3.0.1+2.0.4+1.0.4]=0;	$0\times p_1(p_5-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_9-5)$
1115 1[3.0.1+2.0.3+1.0.3]=0;	$0\times p_1(p_5-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_8-4)(p_{10}-5)$
1114 1[3.0.1+2.0.2+1.0.2]=0;	$0\times p_1(p_5-1)(p_6-2)(p_7-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1113 1[3.0.1+2.0.1+1.0.1]=0;	$0\times p_1(p_5-1)(p_6-1)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1112 1[3.0.1+2.0.0+1.0.0]=0;	$0\times p_1(p_5-1)(p_7-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
1111 1[3.0.1+2.0.1+1.0.1]=0;	$0\times p_1(p_6-1)(p_7-2)(p_8-3)(p_9-4)(p_{10}-5)$
Zusammen 10	

Die Summe aller Z ist $= 10 + 95 + 1295 + 2590 + 8610 = 12600$; wie nach (VIII. 2.).

Wir lassen hier noch die Formeln für die fünfte und sechste Classe folgen.

Classe V.

13. (a_1^5), d. h. ein Element 5 mal. Anzahl $= p_1$.

14. $(a_1^4 a_2^1)$, d h. ein Element 4 mal und ein Element 1 mal. Anzahl $= p_1[2(p_2-1) + (p_3-1) + (p_4-1) + (p_5-1)]$.

15. $(a_1^3 a_2^2)$, d. h. ein Element 3mal und ein Element 2mal. Anzahl $= p_1[6(p_2-1) + 3(p_3-1) + (p_4-1)]$.

16. $(a_1^3 a_2^1 a_3^1)$, d. h. ein Element 3mal und zwei Elemente 1mal. Anzahl $= p_1[3(p_2-1)(p_3-2) + 2(p_2-1)(p_4-2) + 2(p_2-1)(p_5-2) + (p_3-1)(p_4-2) + (p_3-1)(p_5-2) + (p_4-1)(p_5-2)]$.

17. $(a_1^2 a_2^2 a_3^1)$, d. h. zwei Elemente 2mal und ein Element 1mal. Anzahl $= p_1[6(p_2-1)(p_3-2) + 4(p_2-1)(p_4-2) + 2(p_2-1)(p_5-2) + 2(p_3-1)(p_4-2) + (p_3-1)(p_5-2)]$.

18. $(a_1^2 a_2^1 a_3^1 a_4^1)$, d. h. ein Element 2mal und drei Elemente 1mal. Anzahl $= p_1[4(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3) + 3(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3) + 2(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3) + (p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)]$.

Classe VI.

19. (a_1^6), d. h. ein Element 6mal. Anzahl $= p_1$.

20. $(a_1^5 a_2)$, d. h. ein Element 5mal und ein Element 1mal. Anzahl $= p_1[2(p_2-1) + (p_3-1) + (p_4-1) + (p_5-1) + (p_6-1)]$.

21. $(a_1^4 a_2^2)$, d. h. ein Element 4mal und ein Element 2mal. Anzahl $= p_1[8(p_2-1) + 4(p_3-1) + 2(p_4-1) + (p_5-1)]$.

22. $(a_1^3 a_2^3)$, d. h. zwei Elemente 3mal. Anzahl $= p_1[6(p_2-1) + 3(p_3-1) + (p_4-1)]$.

23. $(a_1^4 a_2^1 a_3^1)$, d. h. ein Element 4mal und zwei Elemente 1mal. Anzahl $= p_1[3(p_2-1)(p_3-2) + 2(p_2-1)(p_4-2) + 2(p_2-1)(p_5-2) + 2(p_2-1)(p_6-2) + (p_3-1)(p_4-2) + (p_3-1)(p_5-2) + (p_3-1)(p_6-2) + (p_4-1)(p_5-2) + (p_4-1)(p_6-2) + (p_5-1)(p_6-2)]$.

24. $(a_1^3 a_2^2 a_3^1)$, d. h. ein Element 3mal, ein Element 2mal und ein Element 1mal. Anzahl $= p_1[18(p_2-1)(p_3-2) + 12(p_2-1)(p_4-2) + 8(p_2-1)(p_5-2) + 6(p_2-1)(p_6-2) + 6(p_3-1)(p_4-2) + 4(p_3-1)(p_5-2) + 3(p_3-1)(p_6-2) + 2(p_4-1)(p_5-2) + (p_4-1)(p_6-2)]$.

25. $(a_1^2 a_2^2 a_3^1)$, d. h. drei Elemente 2mal. Anzahl $= p_1[6(p_2-1)(p_3-2) + 4(p_2-1)(p_4-2) + 2(p_2-1)(p_5-2) + 2(p_3-1)(p_4-2) + (p_3-1)(p_5-2)]$.

26. $(a_1^3 a_2^1 a_3^1 a_4^1)$, d. h. ein Element 3mal und drei Elemente 1mal. Anzahl $= p_1[4(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3) + 3(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3) + 3(p_2-1)(p_3-2)(p_6-3) + 2(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3) + 2(p_2-1)(p_4-2)(p_6-3) + 2(p_2-1)(p_5-2)(p_6-3) + (p_3-1)(p_4-2)(p_5-3) + (p_3-1)(p_4-2)(p_6-3) + (p_3-1)(p_5-2)(p_6-3) + (p_4-1)(p_5-2)(p_6-3)]$.

27. $(a_1^2 a_2^2 a_3^1 a_4^1)$, d. h. zwei Elemente 2mal und zwei Elemente 1mal.

Anzahl $= p_1[12(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)+9(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)$
$+6(p_2-1)(p_3-2)(p_6-3)+6(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)+4(p_2-1)(p_4-2)(p_6-3)$
$+2(p_2-1)(p_5-2)(p_6-3)+3(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)+2(p_3-1)(p_5-2)(p_6-3)$
$+(p_3-1)(p_5-2)(p_6-3)]$.

28. $(a_1^2 a_2^1 a_3^1 a_4^1 a_5^1)$, d. h. ein Element 2mal und vier Elemente 1mal.
Anzahl $= p_1[5(p_3-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_5-4)+4(p_2-1)(p_3-2)(p_4-3)(p_6-4)$
$+3(p_2-1)(p_3-2)(p_5-3)(p_6-6)+2(p_2-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_6-4)$
$+(p_3-1)(p_4-2)(p_5-3)(p_6-4)]$.

29. Für die Variationen sind die Formeln weniger weitläufig, und leichter darstellbar, als für Combinationen. Es ist übrigens möglich, dass ein besonderes Raisonnement auch bei den Combinationen auf bequemere Formeln führt; jedoch ist kaum zu hoffen, dass sie viel einfacher als die obigen gegeben werden können. Von den Variationen gingen wir deshalb die Construction der Formeln so ausführlich durch, damit sich leicht für bestimmte Fälle die nöthige Anzahl finden lasse, und weil wir von diesem Falle, wie sogleich folgen wird, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Anwendung machen wollen.

IX.

1. Es sind m prismatische Würfel gegeben, jeder mit n Seitenflächen, die mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ bezeichnet sind.

2. Es wird die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass auf einen Wurf r_1 Zahlen $p_1$mal, r_2 Zahlen $p_2$mal, r_3 Zahlen $p_3$mal u. s. w. r_α Zahlen $p_\alpha$mal fallen; wo natürlich $r_1p_1+r_2p_2+r_3p_3\ldots+r_\alpha p_\alpha=m$ uud $r_1+r_2+r_3\ldots+r_\alpha<n$ sein muss.

3. Bei m Würfeln, jeder mit n Flächen, sind im Ganzen n_m Fälle möglich.

4. Die Anzahl der möglichen Fälle, oder die Anzahl der Variationen $m$ter Classe, in welchen r_1 Elemente $p_1$mal, r_2 Elemente $p_2$mal, r_3 Elemente $p_3$mal u. s. w. r_α Elemente $p_\alpha$mal wiederholt, n Elemente aber gegeben sind, die alle $n$mal, d. h. für diesen Fall uneingeschränkt wiederholt werden können, ist

$$\frac{m!}{(p_1!)^{r_1}(p_2!)^{r_2}(p_3!)^{r_3}\ldots(p_\alpha!)^{r_\alpha}} \times \frac{n(n-1)\ldots(n-(r_1+r_2+r_3\ldots+r_\alpha-1))}{r_1!r_2!r_3!\ldots r_\alpha!}$$ (Aus II. 10.

5. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für den gegebenen Fall

$$= \frac{m!\times n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r_1+r_2+r_3\ldots+r_\alpha-1))}{(p_1!)^{r_1}(p_2!)^{r_2}(p_3!)^{r_3}\ldots(p^\alpha!)^{r_\alpha}\times r_1!r_2!r_3!\ldots r_\alpha!\times n^m}.$$

Beispiel. Es sind **10** Würfel jeder von **6** Flächen gegeben: welche ist die Wahrscheinlichkeit, mit dem ersten Wurf **1** Zahl **3** mal, **2** Zahlen **2** mal und **3** Zahlen **1** mal zu werfen?

Hier ist $m = 10$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$; $p_1 = 3$, $p^2 = 2$, $p_3 = 1$; also ist die Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1.\,6.5.4.3.2.1}{1.(2.1)^2.(3.2.1)!\;1\times1.2\times1.2.3\times6^{10}} = \frac{625}{5832}.$$

6. Es wird die relative Wahrscheinlichkeit für folgende zwei Fälle gesucht.

I. Fall.	II. Fall.
m *Würfel von* n *Flächen.*	M *Würfel von* N *Flächen.*
Es sollen	Es sollen
r_1 Nummern p_1 mal,	R_1 Nummern P_1 mal,
r_2 Nummern p_2 mal,	R_2 Nummern P_2 mal,
r_3 Nummern p_3 mal,	R_3 Nummern P_3 mal,
. . . . .	. . . . .
r_α Nummern p_α mal	R_α Nummern P_α mal
erscheinen.	erscheinen.

7. Die gesuchte relative Wahrscheinlichkeit ist der Quotient aus den beiden absoluten Wahrscheinlichkeiten, also

$$= \frac{m!\,n(n-1)....(n-(r_1+r_2...r_\alpha-1))}{(p_1!)^{r_1}(p_2!)^{r_2}....(p_\alpha!)^{r_\alpha}\times r_1!....r_\alpha!\,n^m} : \frac{M!\,N(N-1)....(N-(R_1+R_2....R_\alpha-1))}{(P_1!)^{R_1}(P_2!)^{R_2}....(P_\alpha!)^{R_\alpha}\times R_1!\,R_2!....R_\alpha!\,N^M}.$$

Wenn hier $m = M$, $r_1+r_2+....+r_\alpha = R_1+R_2+R_3....+R_\alpha$ und $n=N$ ist, so ist die relative Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{(P_1!)^{R_1}(P_2!)^{R_2}....(P_\alpha!)^{R_\alpha}}{(p_1!)^{r_1}(p_2!)^{r_2}....(p_\alpha!)^{r_\alpha}}.$$

Wenn also bei zwei Würfen die Anzahl der verschiedenen erwarteten Nummern (die Summe der r und R) dieselbe ist, so ist die relative Wahrscheinlichkeit für beide Fälle immer die gleiche, welches auch die Zahl m der Würfel, die bei beiden dieselbe ist, sein mag, und wieviel (n) Flächen auch die Würfel haben mögen.

8. *Beispiel.* Es haben zwei Personen jede **10** Würfel von **5** Flächen. Die eine wettet, dass sie mit dem ersten Wurf **2** Zahlen **3** mal und **2** Zahlen **2** mal werfen werde, während die andere **3** Zahlen **3** mal und **1** Zahl **1** mal wirft: mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt die erste gegen die zweite?

Für die erste Person ist $n = n$, $m = m$, $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $r_1 + r_2 = 4$; für die zweite ist $N = n$, $M = m$, $R_1 = 3$, $R_2 = 1$, $P_1 = 3$, $P_2 = 1$, $R_1 + R_2 = 4$; die relative Wahrscheinlichkeit ist also

$$= \frac{m!n(n-1)(n-2)(n-3)}{(3.2)^2(2)^2 n^m} : \frac{m!n(n-1)(n-2)(n-3)}{(3.2)^3.1.n^m} = \frac{3}{2};$$

d. h. die erste Person gewinnt 3 mal, wenn die zweite 2 mal gewinnt. Die 10 Würfel dürfen eine beliebige Zahl von Flächen haben.

Weitere Beispiele.

9. Für 3 Würfel sind folgende Fälle möglich:

1) 3 Nummern jede 1 mal; $p_1 = 1$, $r_1 = 3$.

2) 1 Nummer 1 mal und 1 Nummer 2 mal; $p_1 = 1$, $r_1 = 1$, $p_2 = 2$, $r_2 = 1$.

3) 1 Nummer 3 mal; $p_1 = 3$, $r_1 = 1$.

Anzahl aller Fälle $= n^3$.

Anzahl der günstigen Fälle für (1.) $= n(n-1)(n-2)$, für (2.) $= 3n(n-1)$, für (3.) $= n$.

10. Für 4 Würfel

1) 4 Nummern jede 1 mal; $p_1 = 1$, $r_1 = 4$.

2) 2 Nummern jede 2 mal; $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$.

3) 2 Nummern jede 1 mal und eine Nummer 2 mal; $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$.

4) 1 Nummer 3 mal und eine 1 mal; $p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$.

5) 1 Nummer 4 mal; $p_1 = 4$, $r_1 = 1$.

Anzahl aller Fälle $= n^4$, der günstigen Fälle für (1.) $= n(n-1)(n-2)(n-3)$, für (2.) $= 3n(n-1)$, für (3.) $= 2.3n(n-1)(n-2)$, für (4.) $= 4n(n-1)$, für (5.) $= n$.

11. Für 5 Würfel

1) 5 Nummern 1 mal; $p_1 = 1$, $r_1 = 5$.

2) 3 Nummern 1 mal und 1 Nummer 2 mal; $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $r_1 = 3$, $r_2 = 1$.

3) 2 Nummern 2 mal und 1 Nummer 1 mal; $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$.

4) 2 Nummern 1 mal und 1 Nummer 3 mal; $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$.

5) 1 Nummer 2 mal und 1 Nummer 3 mal; $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $r_1 = r_2 = 1$.

6) 1 Nummer 1 mal und 1 Nummer 4 mal; $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $r_1 = r_3 = 1$.

7) 1 Nummer 5 mal.

Anzahl aller Fälle $= n^2$.

Anzahl der günstigen Fälle für (1.) $= n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, für (2.) $= 10n(n-1)(n-2)(n-3)$, für (3.) $= 15n(n-1)(n-2)$, für (4.) $= 10n(n-1)(n-2)$, für (5.) $= 10n(n-1)$, für (6.) $= 5n(n-1)$, für (7.) $= n$.

12. Welche von den 6 Personen hat die meiste Hoffnung zu gewinnen, wenn alle mit 10 Würfeln von n Flächen wetten: beim ersten Wurf
Die erste Person 1 Nummer 6mal und 4 Nummern 1 mal,
Die zweite Person 5 Nummern 2mal,
Die dritte Person 1 Nummer 5mal, 1 Nummer 2mal und 3 Nummern 1mal,
Die vierte Person 1 Nummer 4mal 2 Nummern 2mal und 2 Nummern 1mal,
Die fünfte Person 2 Nummern 3mal, 1 Nummer 2mal und 2 Nummern 1mal,
Die sechste Person 1 Nummer 3mal, 3 Nummern 2mal und 1 Nummer 1mal
zu werfen.

Die Wahrscheinlichkeit der 1ten Person ist $= \frac{210n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^{10}} = \alpha_1$,

Die der 2ten Person . . . . . $= \frac{945n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^{10}} = \alpha_2$,

Die der 3ten Person . . . . . $= \frac{2520n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^{10}} = \alpha_3$,

Die der 4ten Person . . . . . $= \frac{9450n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^{10}} = \alpha_4$,

Die der 5ten Person . . . . . $= \frac{12600n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^{10}} = \alpha_5$,

Die der 6ten Person . . . . . $= \frac{12600n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n^{10}} = \alpha_6$,

also verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten dieser 6 Personen wie 210 : 945 : 2520 : 9450 : 12600 : 12600, oder wie 2 : 9 : 24 : 90 : 120 : 120. Die letzten zwei haben folglich gleiche und die meiste Wahrscheinlichkeit. Wenn die erste Person 2 Kreuzer setzt, so muss die zweite 9 Kr., die dritte 24 Kr., die vierte 90 Kr. und die fünfte und sechste jede 120 Kreuzer setzen, wenn die Wette billig und gerecht sein soll. Das Verhältniss bleibt dasselbe, mit welcher Art von Würfeln die Personen spielen. Es ist, wie erforderlich, überall m, n und $r_1 + r_2 + r_3 \ldots + r_\alpha$ gleich und zwar letzteres überall $= 5$.

13. Im Vorigen wurde angenommen, dass die Würfel alle *gleich viele* Flächen haben. Wir wollen nun setzen, die verschiedenen Würfel hätten eine *verschiedene* Zahl von Flächen und seien mit den Zahlen 1, 2, 3, ... k,

soweit es angeht, bezeichnet; so dass ein Würfel von k Flächen alle Zahlen von 1 bis k, ein Würfel von l Flächen alle Zahlen von 1 bis l hat.

14. Von den m Würfeln haben der erste p_1, der zweite p_2, der dritte p_3 u. s. w., der $m$te m Flächen.

Die Anzahl aller möglichen Fälle ist nach (VII. 18.)

$$= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \ldots \cdot p_n .$$

15. Die Anzahl der Fälle, in welchen r_1 Nummer $q_1$mal, r_2 Nummern $q_2$mal, r_3 Nummern $q_3$mal u. s. w. r_α Nummern q_α geworfen werden, findet man hier, wenn man die Anzahl der Variationen $m$ter Classe mit beschränkter Stellenbesetzung für den Fall

$$a_1^{q_1}, a_2^{q_2} \ldots a_{r_1}^{q_1}, a_{r_1+1}^{q_2}, a_{r_1+2}^{q_2} \ldots a_{r_1+r_2}^{q_2} \ldots a_{r_1+r_2 \ldots r_{\alpha-1}+1}^{q_\alpha}$$
$$+ a_{r_1+r_2+\ldots r_{\alpha-1}+2}^{q_\alpha} \ldots a_{r_1+r_2+\ldots r_\alpha}^{q_\alpha}$$

nach (VIII.) sucht.

16. Diese Anzahl, dividirt durch die Anzahl (14.), ist die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass von m Würfeln der erste p_1, der zweite p_2, der dritte p_3 u. s. w. der $m$te p_m Flächen hat und r_1 Zahlen $q_1$mal, r_2 Zahlen $q_2$mal, r_3 Zahlen $q_3$mal u. s. w. r_α Zahlen $q_\alpha$mal geworfen werden. Es ist wieder $r_1 q_1 + r_2 q_2 \ldots r_\alpha q_\alpha = m$.

17. Da wir hier die Zähler nicht wie in (4.) *allgemein* darstellen können, so wollen wir die Aufgabe für einzelne Fälle lösen.

Beispiele.

18. Ein Würfel habe 2 breite numerirte Flächen (auf diese nur könne er fallen und ruhen); ein zweiter habe 3 Flächen, ein dritter 4 Flächen: Welches sind die möglichen Fälle und ihre Wahrscheinlichkeiten?

a) Im Ganzen sind $p_1 . p_2 . p_3$ Fälle möglich.

b) Es kann eine Nummer 3mal erscheinen; hiebei haben wir p_1 Fälle.

c) Ferner kann eine Nummer 2mal und eine Nummer 1mal erscheinen. Hievon giebt es nach (VIII. 3.) $p_1[2(p_2-1) + (p_3-1)]$ Fälle.

d) Endlich können drei Nummern jede 1mal erscheinen. Hievon sind $p_1(p_2-1)(p_3-2)$ Fälle möglich.

Nun ist $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 4$, also ist $p_1 . p_2 . p_3 = 2.3.4 = 24$. Dies giebt folgende Fälle:

1 1 1	1 2 1	1 3 1	2 1 1	2 2 1	2 3 1
1 1 2	1 2 2	1 3 2	2 1 2	2 2 2	2 3 2
1 1 3	1 2 3	1 3 3	2 1 3	2 2 3	2 3 3
1 1 4	1 2 4	1 3 4	2 1 4	2 2 4	2 3 4.

Für den Fall (b) giebt es die $p_1 = 2$ Fälle

1 1 1, 2 2 2.

Für den Fall (c) giebt es die $p_1[2(p_2-1) + (p_3-1)] = 2[4+3] = 14$ Fälle

1 1 2	1 2 1	1 3 3	2 2 1	2 3 2
1 1 3	1 2 2	2 1 1	2 2 3	2 3 3
1 1 4	1 3 1	2 1 2	2 2 4.	

Für den Fall (d) giebt es die $p_1(p_2-1)(p_3-2) = 2.2.2 = 8$ Fälle

1 2 3	1 3 2	2 1 3	2 3 1
1 2 4	1 3 4	2 1 4	2 3 4.

Die Wahrscheinlichkeit für den Fall (b) ist $= \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$, für den Fall (c) $= \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ und für den Fall (d) $= \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. Sie verhalten sich also wie 2 : 14 : 8 oder wie 1 : 7 : 4.

19. Es spielen drei Personen mit 6 Würfeln. Der erste Würfel hat 3 Flächen, der zweite 4, der dritte 4, der vierte 6, der fünfte 11 und der sechste 13 Flächen. Die eine Person will eine Nummer 5 mal und eine Nummer 1 mal; die zweite Person eine Nummer 4 mal und eine Nummer 2 mal; die dritte Person zwei Nummern 3 mal werfen: welches sind die Wahrscheinlichkeiten für die drei Personen und wie verhalten sich dieselben unter einander?

Im Ganzen sind $p_1\,p_2\,p_3\,p_4\,p_5\,p_6$ Fälle möglich. Bei der ersten Person sind $p_1[2(p_2-1) + (p_3-1) + (p_4-1) + (p_5-1) + (p_6-1)$, bei der zweiten Person $p_1[8(p_2-1) + 4(p_3-1) + 2(p_4-1) + (p_5-1)]$, bei der dritten $p_1[6(p_2-1) + 3(p_3-1) + (p_4-1)]$ Fälle möglich.

Nun ist $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 4$, $p_4 = 6$, $p_5 = 11$, $p_6 = 13$; also sind im Ganzen $3 . 4 . 4 . 6 . 11 . 13 = 41184$ Fälle möglich und

Für die 1te Person $3[6 + 3 + 5 + 10 + 12] = 108$,
Für die 2te Person $3[24 + 12 + 10 + 10] = 168$,
Für die 3te Person $3[18 + 9 + 5] = 96$.

Folglich hat die erste Person die Wahrscheinlichkeit $\frac{108}{41184} = \frac{3}{1144}$,

Die zweite . . . . . $\frac{168}{41184} = \frac{7}{1716}$,

Die dritte . . . . . $\frac{96}{41184} = \frac{1}{429}$;

und die Wahrscheinlichkeiten verhalten sich wie $108 : 168 : 96 = 9 : 14 : 8$. Wenn also bei einer Wette die erste Person 9 Kreuzer setzt, so muss die zweite 14 Kr. und die dritte 8 Kr. setzen, damit die Wette billig sei.

Nachtrag
zu den Aufgaben aus der Combinationslehre.

1. Im Eingange zu diesem Aufsatze sagte ich, dass mir keine Lösung der Aufgabe, die Anzahl der möglichen Combinationen und Variationen mit eingeschränkten Wiederholungen für eine gegebene Classe zu finden, bekannt sei. Kurz nach Abfassung des Aufsatzes fand ich jedoch in *Grunerts* Supplement zu *Klügels* mathematischem Wörterbuche, dass Dr. *Scherk* in seinen mathematischen Abhandlungen (Berlin 1825) sich mit der Aufgabe bezüglich der Combinationen beschäftigt hat. Erst einige Tage nachdem mein Artikel der Redaction dieses Journals schon zugeschickt war, bekam ich jenes Werk zu Gesicht. Dies gab mir Anlass zu dem jetzigen Nachtrage.

2. Zunächst bemerke ich, dass *Scherk* auf einem ganz von dem meinigen verschiedenen Wege zuletzt für die Anzahl der Combinationen $m$ter Classe folgende Formel findet:

$$\Sigma\Sigma \frac{(-1)^h \partial^{k-2h} C_0^h P_{n+m-k-1}^{m-k}}{\Pi_{k-2h}(\alpha x)^{k-2h}} \text{ *)}.$$

Der Weg des Herrn *Scherk* dürfte aber schon deshalb dem meinigen nach-

*) In der Abhandlung steht durch Druckfehler immer $P_{n+m-k-1}^{n-1}$.

stehen, weil der Satz durch unbestimmte Coefficienten bewiesen und der *Taylor*'sche Satz zu Hülfe genommen wird, diese Hülfsmittel aber, wenn sie anders auch auf festem Grunde ständen, doch der Combinationslehre zu fern sind.

In der obigen Formel durchläuft

a) k alle ganzen Zahlen von **0** bis m.

b) Bei jedem Werthe von k durchläuft h alle Werthe von **0** bis $\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}\varkappa$, wo $\varkappa = 0$ ist, wenn h eine *gerade* Zahl bedeutet, und $= 1$, wenn h eine *ungerade* Zahl ist.

c) $P^{m-h}_{n+m-h-1}$ ist die Facultät $= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-k-1)}{1.2.3\ldots(m-k)}$.

d) Π_{k-2h} ist die Facultät $= 1.2.3 \ldots (k-2h)$.

e) C^h ist die $h$te Combinationsclasse ohne Wiederholung. Die Elemente sind x^{α_1-1}, x^{α_2-1}, x^{α_3-1}, $\ldots$ x^{α_n-1}.

f) $\frac{\partial^{k-2h} C^h_0}{(\partial x)^{k-2h}}$ ist der $(k-2h)$te Differentialquotient, in welchem die Variable x nach der Differentiation $= 0$ gesetzt wird.

g) Der Ausdruck gilt für die Zahl der möglichen Combinationen $m$ter Classe, wenn n Elemente gegeben sind, von welchen das erste α_1, das zweite α_2, das dritte α_3 u. s. f. das $n$te $\alpha_n$mal *höchstens* gesetzt werden darf, und es ist auf diese Weise der Fall eigentlich ein specieller Fall von unserm allgemeinen; aus welchem sich aber allerdings auch der allgemeine Fall leicht ableiten lässt.

3. Ueber die Anzahl der Variationen kommt in der *Scherck*'schen Abhandlung nichts vor; und es konnte dieselbe auch nicht aus dem Ausdruck für die Anzahl der Combinationen, wie es wir vermochten, abgeleitet werden.

4. Wir wollen nun, den Anfang der *Scherk*'schen Ableitung benutzend, die Aufgabe für den allgemeinen Fall, jedoch ohne Hülfe des Differentialcals, zu lösen suchen. Wir werden dabei zu einem anders und zwar schwieriger gebauten Ausdruck gelangen, der jedoch bei der Berechnung der speciellen Fälle natürlich zum nämlichen Resultate führt.

5. Es lässt sich leicht erweisen, dass

$$(1+{}^1ax+({}^1ax)^2+\ldots+({}^1ax)^{\alpha_1})\,(1+{}^2ax+({}^2ax)^2+\ldots+({}^2ax)^{\alpha_2})\ldots.$$
$$\ldots.\,(1+{}^nax+({}^nax)^2+\ldots+({}^nax)^{\alpha_n})$$
$$= 1 + t_1x + t_2x^2 \ldots + t_kx^k \ldots + t_sx^s$$

ist. Hier ist $t_k =$ die $k$te Combinationsclasse mit Wiederholung von den Elementen ${}^1a, {}^2a, {}^3a, \ldots {}^na$, wobei a_1 höchstens $\alpha_1$mal, α_2 höchstens $\alpha_2$mal

^3a höchstens $\alpha_3$mal u. s. w, ^na höchstens $\alpha_n$mal gesetzt werden darf. Ferner ist $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots + \alpha_n$.

6. $$\frac{(1-(^1ax)^{\alpha_1+1})}{1-^1ax} \times \frac{(1-(^2ax)^{\alpha_2+1})}{1-^2ax} \times \frac{(1-(^3ax)^{\alpha_3+1})}{1-^3ax} \times \ldots \frac{(1-(^nax)^{\alpha_n+1})}{1-^nax}$$

ist, wie aus der Algebra bekannt,

$$= (1+{}^1ax+(^1ax)^2+\ldots.(^1ax)^{\alpha_1})\,(1+{}^2ax+(^2ax)^2 \ldots. (^3ax)^{\alpha_2}) \ldots.$$
$$\ldots. (1+{}^nax+(^nax)^2 \ldots. (^nax)^{\alpha_n});$$

also ist

$$\frac{(1-(^1ax)^{\alpha_1+1})}{1-^1ax} \times \frac{(1-(^2ax)^{\alpha_2+1})}{1-^2ax} \times \frac{(1-(^3ax)^{\alpha_3+1})}{1-^3ax} \ldots. \times \frac{(1-(^nax)^{\alpha_n+1})}{1-^nax}$$
$$= 1 + t_1 x + t_2 x^2 \ldots. + t_k x^k \ldots. + t_s x^s.$$

7. Wenn man in dieser Formel $^1a = {}^2a = {}^3a = \ldots. = {}^na = 1$ setzt, so wird in t_k jede Combination $= 1$, und da alle Combinationen additiv verbunden sind, so zeigt alsdann t_k die Anzahl der möglichen Combinationen $n$ter Classe für n gegebene Elemente an, von welchen das erste höchstens $\alpha_1$mal, das zweite höchstens $\alpha_2$mal u. s. w. das $n$te höchstens $\alpha_n$mal gesetzt werden darf. Wir bezeichnen t_k dann durch $\overset{k}{C}$. Es ist also

$$\frac{(1-x^{\alpha_1+1})(1-x^{\alpha_2+1})(1-x^{\alpha_3+1}) \ldots. (1-x^{\alpha_n+1})}{(1-x)^n} = 1 + \overset{1}{C}x + \overset{2}{C}x^2 + \overset{3}{C}a^3 \ldots. \overset{k}{C}x^k \ldots. \overset{s}{C}x^s.$$

8. Wenn man nun in diesem Ausdruck $x^{\alpha_1} = u_1$, $x^{\alpha_2} = u_2$, $x^{\alpha_3} = u_3 \ldots. x^{\alpha_n} = u_n$ setzt, so ergiebt sich

$$\frac{(1-u_1x)(1-u_2x)(1-u_3x) \ldots. (1-u_nx)}{(1-x)^n} = 1 + \overset{1}{C}x + \overset{2}{C}x^2 + \overset{3}{C}x^3 \ldots. \overset{k}{C}x^k \ldots. \overset{s}{C}x^s;$$

wo $\overset{k}{C}$ die in (7.) angegebene Bedeutung hat.

9. Der Zähler dieses Ausdrucks ist bekanntlich

$$= 1 - \overset{1}{K}x + \overset{2}{K}x^2 + \overset{3}{K}x^3 + \overset{4}{K}x^4 \ldots. (-1)^k \overset{k}{K}x^k \ldots. (-1)^n \overset{k}{K}x^n;$$

wo $\overset{k}{K}$ die $k$te Combinationsclasse ohne Wiederholung für die Elemente $u_1, u_2; u_3, \ldots. u_n$ bedeutet.

10. Der Nenner des Ausdrucks ist eine Potenz mit positivem Exponenten und wir können ihn als Factor zum Zähler setzen, wenn wir den Exponenten negativ annehmen. Der Factor heisst alsdann

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2 \ldots. \frac{n(n+1)\ldots.(n+k-1)}{1.2\ldots.k}x^k \ldots.$$

11. Die Gleichung in (8.) geht nun in folgende über:

$$(1 - \overset{1}{K}x + \overset{2}{K}x^2 - \overset{3}{K}x^3 \ldots . (-1)^k \overset{k}{K}x^k \ldots . (-1)^n \overset{n}{K}x^n)$$
$$\times (1 + nx + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2 \ldots . \frac{n(n+1)\ldots.(n+k-1)}{1.2\ldots.k}x^k \ldots .)$$
$$= 1 + \overset{1}{C}x + \overset{2}{C}x^2 + \overset{3}{C}x^3 + \ldots . + \overset{k}{C}x^k + \ldots . + \overset{s}{C}x^s \text{ *).}$$

12. Um $\overset{m}{C}$ für den allgemeinsten Fall zu finden, setze man

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots . \alpha_{p_1} = 1,$

$\alpha_{p_1+1} = \alpha_{p_1+2} = \alpha_{p_1+3} \ldots . = \alpha_{p_1+p_2} = 2,$

$\alpha_{p_1+p_2+1} = \alpha_{p_1+p_2+2} = \alpha_{p_1+p_2+3} \ldots . = \alpha_{p_1+p_2+p_3} = 3,$

. . . . . .

$\alpha_{p_1+p_2\ldots.+p_{m-1}+1} = \alpha_{p_1+p_2\ldots.+p_{m-1}+2} = \alpha_{p_1+p_2\ldots.p_{m-1}+3} \ldots . = \alpha_{p_1+p_2\ldots.+p_m}$; also

$u_1 = u_2 = u_3 \ldots . u_{p_1} = x,$

$u_{p_1+1} = u_{p_1+2} = u_{p_1+3} \ldots . = u_{p_1+p_2} = x^2,$

$u_{p_1+p_2+1} = u_{p_1+p_2+2} = u_{p_1+p_2+3} \ldots . = u_{p_1+p_2+p_3} = x^3,$

. . . . . .

$u_{p_1+p_2\ldots.+p_{m-1}+1} = u_{p_1+p_2\ldots.+p_{m-1}+2} = u_{p_1+p_2\ldots.+p_{m-1}+3} \ldots . = u_{p_1+p_2+p_3\ldots.+p_m}$;

wo $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots . + p_m = n$ ist. Alsdann ist

$$\overset{1}{K} = p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \ldots . + p_k x^k,$$

$$\overset{2}{K} = \frac{p_1(p_1-1)}{1.2}x^2 + p_1 p_3 x^3 + p_1 p_3 \left| \begin{matrix} x^4 \ldots . + p_1 p_{k-1} \\ + \frac{p_2(p_2-1)}{1.2} \end{matrix} \right| \begin{matrix} x^k \\ p_2 p_{k-2} \\ p_3 p_{k-3} \\ \ldots . \end{matrix}$$

$\frac{p_{\frac{1}{2}k}\, p_{\frac{1}{2}k-1}}{1.2}$ oder $p_{\frac{1}{2}(k-1)}\, p_{\frac{1}{2}(k+1)}$,

$$\overset{3}{K} = \frac{p_1(p_1-1)(p_1-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{p_1(p_1-1)p_2}{1.2}x^4 \ldots . + \frac{p_1(p_1-1)p_{k-2}}{1.2} \left| \begin{matrix} x^k \\ + p_1 p_2 p_{k-3} \end{matrix} \right.$$
$$\ldots . \ldots .$$

$\frac{p_{\frac{1}{3}k}(p_{\frac{1}{3}k-1}\, p_{\frac{1}{3}k-2}}{1.2.3}$ oder $\frac{p_{\frac{1}{3}(k-1)}(p_{\frac{1}{3}(k-1)}-1)\times p_{\frac{1}{3}(k+1)}}{1.2}$ oder $\frac{p_{\frac{1}{3}(k-1)} \cdot p_{\frac{1}{3}(k+1)} \cdot (p_{\frac{1}{3}(k-1)}-1)}{1.2}$,

u. s. w.

---

*) Obgleich hier der eine Factor eine unendliche, der andere eine endliche Reihe ist, so ist das Product beider doch eine endliche Reihe. Dies ist immer der Fall bei Producten von endlichen und unendlichen Reihen, wenn die unendlichen Reihen Bruchfunctionen zur Summe haben, von denen das Product der Nenner in dem Producte der Zähler enthalten ist. *Oettinger* bemerkt in seinen „Forschungen im Gebiete der höhern Analysis (§. 23.)", dass die Entwicklung einer gebrochenen Function zuweilen auf eine endliche Darstellung führen kann. Es lässt sich hinzusetzen, dass dies nur bei unächt gebrochenen Functionen der Fall sein kann.

$$\overset{r}{K} = \frac{p_1(p_1-1)(p_1-2)....(p_1-(p-1))}{1.2.3....r}x^r + ... \frac{p_1(p_1-1)(p_1-2)....(p_1-(r-2))}{1.2.3....,r-1}p_{k-r+1}x^k$$
$$+ \frac{p_1(p_1-1)(p_1-2)....(p_1-(r-3))}{1.2.3....r-2}p_2 p_{k-r}x^k .... + \underset{sk}{\overset{r}{\mathfrak{K}}}x^k.$$

Hier bedeutet $\overset{r}{\mathfrak{K}}$ die $r$te Combinationsclasse zur Summe k. Die Elemente sind $p_1, p_2, p_3, ... p_m$. Jede Combination ist als Product der Elemente zu betrachten, und wenn mehrere Elemente mit gleichem Index in der Combination vorkommen, so steht das zweite, gleiche Element nicht als Factor, sondern die Differenz von diesem weniger dem 1ten; das dritte gleiche Element steht ebenfalls nicht als Factor, sondern als Differenz des dritten weniger dem 2ten u. s. w.; endlich ist für jede Gruppe von α hinter einander folgenden gleichen Elementen die Combination noch mit der Facultät $1.2.3....\alpha$ zu dividiren.

13. Führt man diese Werthe für K in die Gleichung (10.) ein, multiplicirt mit der zweiten Reihe, ordnet nach Potenzen von x und bemerkt, dass alsdann die Coefficienten von x unabhängig sind, so erhält man

$$1 + nx + (\frac{n(n-1)}{1.2} - p_1)x^2 + (\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} - np_1 - p_2)x^3$$
$$+ (\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4} - \frac{n(n+1)}{1.2}p_1 - np_2 + \frac{p_1(p_1-1)}{1.2} - p_3)x^4$$
$$+ (\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}p_1 - \frac{n(n+1)p_2}{1.2} + \frac{np_1(p_1-1)}{1.2} - np_3 + p_1p_2 - p_4)x^5$$
$$+ (\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{1.2.3.4.5.6} - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}p_1 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}p_2$$
$$+ \frac{n(n+1)p_1(p_1-1)}{1.2.1.2} - \frac{n(n+1)}{1.2}p_3 + np_1p_2 - np_4 - \frac{p_1(p_1-1)(p_1-2)}{1.2.3}$$
$$+ \frac{p_2(p_2-1)}{1.2} + p_1p_3 - p_5)x^6 + ...$$
$$= 1 + \overset{1}{C}x + \overset{2}{C}x^2 + \overset{3}{C}x^3 + \overset{4}{C}x^4 + \overset{5}{C}x^5 + \overset{6}{C}x^6 ....;$$

und da hier der Satz der unbestimmten Coefficienten anwendbar ist, so erhalten wir für die gesuchte Anzahl der möglichen Combinationen:

Für die 1te Classe $= \overset{1}{C} = n,$

Für die 2te Classe $= \overset{2}{C} = \frac{n(n+1)}{1.2} - p_1,$

Für die 3te Classe $= \overset{3}{C} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} - np_1 - p_2,$

Für die 4te Classe $= \overset{4}{C} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4} - \frac{n(n+1)}{1.2}p_1 - np_2 + \frac{p_1(p_1-1)}{1.2} - p_3,$

$$\text{Für die 5te Classe} = \overset{5}{C} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}p_1 - \frac{n(n+1)}{1.2}p_2 + \frac{np_1(p_1-1)}{1.2} - np_3 + p_1p_2 - p_4,$$

$$\text{Für die 6te Classe} = \overset{6}{C} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{1.2.3.4.5.6} - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}p_1 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}p_2 + \frac{n(n+1)p_1(p_1-1)}{1.2.1.2} - \frac{n(n+1)}{1.2}p_3 + np_1p_2 - np_4 - \frac{p_1(p_1-1)(p_1-2)}{1.2.3} + \frac{p_2(p_2-1)}{1.2} + p_1p_3 - p_5.$$

14. Wenn man auf dieselbe Weise, wie oben die besondern Coefficienten von x, für die linke Seite der Gleichung in (11.) allgemein den Coefficienten von x^m sucht, so findet man

$$\overset{m}{C} = \sum_{k=0}^{k=m} \sum_{r=0}^{r=\frac{1}{2}k \text{ oder } r=\frac{1}{2}(k-1)} (-1)^r \overset{r}{\underset{s(k-r)}{\aleph}} \times \frac{(n_1+1)^{m-k}}{(1_1+1)^{m-k}},$$

wo $\overset{r}{\underset{s(k-r)}{\aleph}}$ die in (12.) angegebene Bedeutung hat, $(n,+1)^{m-k}$ die Facultät $n(n+1)....(n+m-k-1)$ und eben so $(1,+1)^{m-k}$ die Facultät $1.2.3....(m-k)$ nach der *Crelle*'schen Bezeichnungs-Art, so wie auch noch zu bemerken ist, dass $\overset{0}{\underset{0}{\aleph}} = 1$ und $\overset{0}{\underset{k}{\aleph}} = 0$ ist.

15. Aus dem allgemeinen Ausdruck in (14.) finden sich leicht die speciellen Formeln in (13.). Ganz dieselben Formeln findet man auch aus dem *Scherk*'schen Ausdruck in (2.). Es sind jedoch diese Ausdrücke, sowohl die allgemeinen, als die speciellen, nicht so practisch, als die früher von mir gegebenen.

16. Wenn man die Uebereinstimmung beider Formeln prüfen will, muss man berücksichtigen, dass in meinen früher entwickelten Ausdrücken die $n_1, n_2, n_3, ... n_m$ mit den $p, p_1, p_2, ... p_m$ der jetzigen folgende Gleichungen bilden:

$n_1 = n$; $n_1 - n_2 = p_1$; $n_2 - n_3 = p_2$; $n_3 - n_4 = p_4 .... n_{m-1} - n_m = p_m$.

Führt man für die p und n in den letzten Ausdrücken diese Werthe ein, so kommt man auf die frühern.

Z. B. für die 3te Classe ist

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} - np_1 - p_2.$$

Dies giebt

$$\frac{n_1(n_1+1)(n_1+2)}{1.2.3} - n_1(n_1-n_2) - n_2 + n_3$$
$$= \frac{n_1[n_1^2+3n_1+2]-6n_1^2}{1.2.3} + n_1 n_2 - n_2 + n_3$$
$$= \frac{n_1[n_1^2-3n+2]}{1.2.3} + n_2(n_1-1) + n_3 = n_3 + n_2(n_1-1) + \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)}{1.2.3};$$

wie es sein soll.

So ist ferner für die 6te Classe, aus den Elementen

$$a_1^6\ a_2^5\ a_3^5\ a_4^4\ a_5^3\ a_6^3\ a_7^2\ a_8^1\ a_9^1:$$

$$n=9,\quad n_1-9,\quad n_2=7,\quad n_3=6,\quad n_4=4,\quad n_5=3,\quad n_6=1;$$
$$p_1=2,\quad p_2=1,\quad p_3=2,\quad p_4=1,\quad p_5=2.$$

Nach der frühern Formel erhält man also

$$1+3.8+4[6+28]+3[5+84+112]+7[5+63+70]+84$$
$$=1+24+136+603+966+84=1814,$$

und nach den spätern

$$3003-990-156+45-90+18-9-0+0+4-2=3070-1256=1814.$$

Beispiel. Wie viele Factoren hat die Zahl $360=2^3.3^2.5$?

Bekanntlich hat die Zahl $n=a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2},\ldots a_r^{\alpha_r}$ $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_r+1)-1$ Divisoren; also hat 360, $4.3.2-1=24-1=23$ Factoren. Man findet sie, wenn man die 1te, 2te, 3te, 4te, 5te und 6te Classe der Combinationen aus den Elementen 222 335 aufstellt. Dies giebt, da $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=1$, $n_4=n_5=n_6=0$ und $p_1=1$, $p_2=1$, $p_3=1$, $p_4=p_5=0$, $n=3$ ist,

1fache Factoren	$=3$
2fache $=2+3$	$=5$
3fache $=1+4+1$	$=6$
4fache $=2+1+2$	$=5$
5fache $=1+1+1$	$=3$
6fache $=1$	$=1$
Zusammen	23.

Fürth im August 1847.

9.

Einige Aufgaben aus der Lehre von den wiederkehrenden Reihen.

(Von Herrn *Weiss*, Lehrer der Mathematik zu Fürth bei Nürnberg.)

I.

1. Wenn in einer unendlichen Reihe $t_0 + t_1 x + t_2 x^2 \ldots . t_k x^k \ldots .$ die Coefficienten, von t_r an, durch die Gleichung

$$t_k = p_1 t_{k-1} + p_2 t_{k-2} + p_3 t_{k-3} \ldots . p_r t_{k-r}$$

bestimmt werden, so heisst bekanntlich die Reihe *rücklaufend.* Die p sind feststehende Grössen und ihr Aggregat $p_1 + p_2 + p_3 \ldots . p_r$ heisst *Beziehungsscale*; sie selbst heissen Glieder der Scale. Hat die Scale einer rücklaufenden Reihe, wie die obige, r Glieder, so heisst sie $r$ter Ordnung und hat innerhalb der Grenzen ihrer Convergenz zur Summe den Bruch: $\frac{a_0+a_1x+a_2x^2\ldots.+a_{r-1}x^{r-1}}{1+b_1x+b_2x^2\ldots.b_rx^r}$, wo

$b_1=-p_1$; $b_2=-p_2$; $b_3=-p_3 \ldots . b_r=-p_r$ und

$a_0=t_0$; $a_1=t_1-p_1t_0$; $a_2=t_2-p_1t_1-p_2t_0$; $a_3=t_3-p_1t_2-p_2t_1-p_0t_0$ u. s. w.

$a_{r-1} = t_{r-1} - p_1 t_{r-2} - p_2 t_{r-3} \ldots . - p_{r-1} t_0$ ist.

2. Man sieht, dass die Zahl der Glieder der Scale gleich ist der Ordnungszahl der Reihe, und gleich der Anzahl der Anfangsglieder, welche nicht durch die Beziehungsscale bestimmt werden können. Ferner ist durch die Gleichungen in (1.) der Summenbruch leicht zu finden, wenn die Scale und die Anfangs-Coefficienten (r bei der Reihe $r$ter Ordnung) bekannt sind.

3. Es sei nun die Scale $= p_1 + p_2 + p_3 \ldots . + p_r$ nebst den r Coefficienten $t_q, t_{q-1}, t_{q-2}, \ldots . t_{q-(r-1)}$ gegeben, und durch diese sei die Reihe, d. h. ihr Summenbruch, zu bestimmen. Die Aufgabe beschränkt sich darauf, die r Anfangs-Coefficienten zu finden.

4. Für eine Reihe 1ter Ordnung ist $t_k=p_1t_{k-1}=p_1^2t_{k-2}=p_1^3t_{k-3}=\ldots p_1^m t_{k-m}$, und hier $k-m=q$ gesetzt giebt: $t_k=p_1^{k-q}t_q=\mathfrak{C}_{k-q}t_q$, wenn $\mathfrak{C}_{k-q}$ die Summe aller Combinationen mit Wiederholung zur Summe $k-q$ bedeutet und p_1 das Element ist.

5. Für Reihen der zweiten Ordnung ist.

$$\begin{aligned} t_k &= p_1 t_{k-1} + p_2 t_{k-2}, \\ t_{k-1} &= p_1 t_{k-2} + p_2 t_{k-3}, \\ t_{k-2} &= p_1 t_{k-3} + p_2 t_{k-4}, \\ t_{k-3} &= p_1 t_{k-4} + p_2 t_{k-5}. \end{aligned}$$

Und wenn man hier je die nachfolgenden Gleichungen in die vorhergehenden substituirt, so erhält man:

$$\begin{aligned} t_k &= (p_1^2 + p_2) t_{k-2} + p_2 p_1 t_{k-3}, \\ t_k &= (p_1^3 + 2p_1 p_2 + p_3) t_{k-3} + p_2 (p_1^2 + p_2) t_{k-4}, \\ t_k &= (p_1^2 + 3p_2 p_2 + p_2^2) t_{k-4} + p_2 (p_1^3 + 2p_1^2 p_2) t_{k-5}; \end{aligned}$$

das heisst, es ist

$$\begin{aligned} t_k &= \mathfrak{C}_2 t_{k-2} + p_2 \mathfrak{C}_1 t_{k-3}, \\ t_k &= \mathfrak{C}_3 t_{k-3} + p_2 \mathfrak{C}_2 t_{k-4}, \\ t_k &= \mathfrak{C}_4 t_{k-4} + p_2 \mathfrak{C}_3 t_{k-5}, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{C}_m$ die Summe aller Combinationen mit Wiederholung zur Summe m bedeutet, wenn p_1 und p_2 die Elemente sind. Jede Combination ist mit der ihr zugehörigen Permutationszahl zu multipliciren.

Vermöge des Gesetzes, welches sich in den Formeln für t_k zeigt, ist

$$\text{I.} \qquad t_k = \mathfrak{C}_m t_{k-m} + p_2 \mathfrak{C}_{m-1} t_{k-(m+1)},$$

wo m eine ganze positive Zahl bedeutet, k jedoch $\overline{\overline{<}} m+1$ sein muss. Nimmt man diese Formel als erwiesen an, so ist, wegen $t_{k-m} = p_1 t_{k-m-1} + p_2 t_{k-m-2}$, auch $t_k = (\mathfrak{C}_m \times p_1 + p_2 \mathfrak{C}_{m-1}) t_{k-(m+1)} + p_2 \mathfrak{C}_m t_{k-(m+2)}$. Nun ist aber $p_1 \mathfrak{C}_m + p_2 \mathfrak{C}_{m-1} = \mathfrak{C}_{m+1}$ *), also folgt aus $t_k = \mathfrak{C}_m t_{k-m} + p_2 \mathfrak{C}_{m-1} t_{k-(m+1)}$ auch

$$t_k = \mathfrak{C}_{m+1} t_{k-(m+1)} + p_2 \mathfrak{C}_m t_{k-(m+2)},$$

d. h. aus den bereits oben erwiesenen Formeln für t_k folgt die Richtigkeit und Gültigkeit des durch die Formel (I.) ausgesprochenen Gesetzes.

Setzt man hier wieder $k - m = q$, also auch $m = k - q$, so erhält man aus (I.)

$$t_k = \mathfrak{C}_{k-q} t_q + \mathfrak{C}_{k-q-1} t_{q-1}.$$

6. Für eine Reihe dritter Ordnung ist

$$\begin{aligned} t_k &= p_1 t_{k-1} + p_2 t_{k-2} + p_3 t_{k-3}, \\ t_{k-1} &= p_1 t_{k-2} + p_2 t_{k-3} + p_3 t_{k-4}, \\ t_{k-2} &= p_1 t_{k-3} + p_2 t_{k-4} + p_3 t_{k-5}, \\ t_{k-3} &= p_1 t_{k-4} + p_2 t_{k-5} + p_3 t_{k-6}; \end{aligned}$$

---

*) In der Combinationslehre wird bewiesen, dass $\dot{V}_m^n = a_1 \dot{V}_{m-1}^n + a_2 \dot{V}_{m-2}^n + a_3 \dot{V}_{m-3}^n \ldots a_{m-n+1} \dot{V}_{n-1}^{n-1}$ ist, wo $\dot{V}_m^n$ die $n$te Combinationsclasse mit Wiederholung zur Summe m von den Elementen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ bedeutet. Aus dieser Formel ist die Richtigkeit der obigen leicht zu ersehen.

Hieraus folgt wieder

$$t_k = (p_1^2+p_2)\,t_{k-2} + (p_2p_1+p_3)\,t_{k-3} + p_3p_1\,t_{k-4},$$
$$t_k = (p_1^3+2p_1p_2+p_3)\,t_{k-3} + (p_2(p_1^2+p_2)+p_3p_1)\,t_{k-4} + p_3(p_1^2+p_2)\,t_{k-5},$$
$$t_k = (p_1^4+3p_1^2p_2+2p_1p_3+p_1^2)\,t_{k-4} + (p_2(p_1^3+2p_1p_2+p_3)+p_3(p_1^2+p_2))\,t_{k-5} + p_3(p_1^3+2p_1p_2+p_3)\,t_{k-6},$$

oder

$$t_k = \mathfrak{C}_2\,t_{k-2} + (p_2.\mathfrak{C}_1 + p_3\mathfrak{C}_2)\,t_{k-3} + p_3\mathfrak{C}_1\,t_{k-4},$$
$$t_k = \mathfrak{C}_3\,t_{k-3} + (p_2\mathfrak{C}_2 + p_3\mathfrak{C}_1)\,t_{k-4} + p_3\mathfrak{C}_2\,t_{k-5},$$
$$t_k = \mathfrak{C}_4\,t_{k-4} + (p_2\mathfrak{C}_3 + p_3\mathfrak{C}_2)\,t_{k-5} + p_3\mathfrak{C}_3\,t_{k-6}.$$

Es hat hier $\mathfrak{C}_m$ dieselbe Bedeutung wie in (**5.**); nur sind jetzt p_1, p_2, p_3 die Elemente der Combinationen. Es lässt sich auch hier wieder, wie in (**5.**), die allgemeine Gültigkeit der Formel

$$t_k = \mathfrak{C}_m\,t_{k-m} + (p_2\mathfrak{C}_{(m-1)} + p_3\mathfrak{C}_{(m-2)})\,t_{k-m-1} + p_3\mathfrak{C}_{m-1}\,t_{k-m-2}$$

auf dieselbe Art beweisen. Also hat man hier, wenn $k-m=q$ gesetzt wird,

$$t_k = \mathfrak{C}_{k-q}\,t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-2})\,t_{q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-1}\,t_{q-2}.$$

7. Auf ganz ähnliche Weise erhält man für Reihen vierter Ordnung:

$$t_k = \mathfrak{C}_{k-q}\,t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-3})\,t_{q-1} + (p_3\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-2})\,t_{q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-1}\,t_{q-3};$$

Hier sind p_1, p_2, p_3, p_4 die Elemente der Combinationen.

8. Im Folgenden sind die Werthe von t_k für die sechs ersten Ordnungen, so wie man sie durch Betrachtungen ähnlich denen in (**5.** und **6.**) findet, aufgestellt.

1te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}\,t_q$.

2te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}_{k-q}\,t_q + p_2\mathfrak{C}_{k-q-1}\,t_{q-1}$.

3te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}_{k-q}\,t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-2})\,t_{q-1} + p_2\mathfrak{C}_{q-k-1}\,t_{q-2}$.

4te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}_{k-q}\,t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-3})\,t_{q-1} + (p_3\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-3})\,t_{q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-4}\,t_{q-3}$.

5te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}_{k-q}\,t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-3} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-4})\,t_{q-1} + (p_3\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-3})\,t_{q-2} + (p_4\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-2})\,t_{q-3} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-1}\,t_{q-4}$.

6te Ordnung: $t_k = \mathfrak{C}_{k-1}\,t_q + (p_2\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-3} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-4} + p_6\mathfrak{C}_{k-q-3})\,t_{q-1} + (p_3\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_4\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-3} + p_6\mathfrak{C}_{k-q-4})\,t_{q-2} + (p_4\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_5\mathfrak{C}_{k-q-2} + p_6\mathfrak{C}_{k-q-3})\,t_{q-3} + (p_5\mathfrak{C}_{k-q-1} + p_6\mathfrak{C}_{k-q-2})\,t_{q-4} + p_6\mathfrak{C}_{k-q-1}\,t_{q-5}$.

Für die einzelnen Ordnungen ist:
Für die 1te Ordnung a) $q \geqq 0$, b) Elemente der Combinationen sind p_1,
Für die 2te Ordnung a) $q \geqq 1$, b) Elemente der Combinationen sind p_1, p_2,
Für die 3te Ordnung a) $q \geqq 2$, b) Elemente der Combinationen sind p_1, p_2, p_3,
Für die 4te Ordnung a) $q \geqq 3$, b) Elemente der Combinationen sind p_1, p_2, p_3, p_4,
Für die 5te Ordnung a) $q \geqq 4$, b) Elemente der Combinationen sind p_1, p_2, p_3, p_4, p_5,
Für die 6te Ordnung a) $q \geqq 5$ b) Elemente der Combinationen sind p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6.
Ueberall ist $k > q$ und $\mathfrak{C}_m$ bedeutet die Summe aller Combinationen mit Wiederholung, jede noch mit der ihr zugehörigen Permutationszahl multiplicirt.

9. Für eine Reihe $r$ter Ordnung ist

$$t_k = p_1 t_{k-1} + p_2 t_{k-2} + p_3 t_{k-3} \ldots + p_{r-1} t_{k-(r-1)} + p_r t_{k-r},$$
$$t_{k-1} = p_1 t_{k-2} + p_2 t_{k-3} + p_3 t_{k-4} \ldots + p_{r-1} t_{k-r} + p_r t_{k-r-1},$$
$$t_{k-2} = p_1 t_{k-3} + p_2 t_{k-4} + p_3 t_{k-5} \ldots + p_{r-1} t_{k-r-1} + p_r t_{k-r-2},$$
$$t_{k-3} = p_1 t_{k-4} + p_2 t_{k-5} + p_3 t_{k-6} \ldots + p_{r-1} t_{k-r-2} + p_r t_{k-r-3}.$$

Dies giebt durch Substitutionen der je nachfolgenden Gleichungen in die vorhergehenden:

$$t_k = (p_1^2 + p_2) t_{k-2} + (p_1 p_2 + p_3) t_{k-3} + (p_1 p_3 + p_4) t_{k-4} \ldots$$
$$\ldots + (p_1 p_{r-1} + p_r) t_{k-r} + p_1 p_r t_{k-r-1},$$
$$t_k = (p_3 + 2 p_1 p_2 + p_3) t_{k-3} + (p_2 (p_1^2 + p_2) + p_3 p_1 + p_4) t_{k-4}$$
$$+ (p_3 (p_1^2 + p_2) + p_4 p_1 + p_5) t_{k-5} + \ldots + (p_{r-1} (p_1^2 + p_2) + p_r p_1) t_{k-r-1}$$
$$+ p_r (p_1^2 + p_2) t_{k-r-2},$$
$$t_k = (p_1^4 + 3 p_1^2 p_2 + 2 p_1 p_3 + p_2^2 + p_4) t_{k-4}$$
$$+ (p_2 (p_1^3 + 2 p_1 p_2 + p_3) + p_3 (p_1^2 + p_2) + p_4 p_1 + p_5) t_{k-5}$$
$$+ (p_3 (p_1^3 + 2 p_1 p_2 + p_3) + p_4 (p_1^2 + p_2) + p_5 p_1 + p_6) t_{k-6} \ldots$$
$$+ (p_{r-1} (p_1^3 + 2 p_1 p_2 + p_3) + p_r (p_1^2 + p_2)) t_{k-r-2} + p_r (p_1^3 + 2 p_1 p_2 + p_3) t_{k-r-3},$$

oder

$$t_k = \mathfrak{C}_2 t_{k-2} + (p_2 \mathfrak{C}_1 + p_3 \mathfrak{C}_0) t_{k-3} + (p_3 \mathfrak{C} + p_4 \mathfrak{C}_0) + \ldots$$
$$\ldots + (p_r + \mathfrak{C}_1 + p_r \mathfrak{C}_0) t_{k-r} + p_r \mathfrak{C}_1 t_{k-r-1}$$
$$t_k = \mathfrak{C}_3 t_{k-3} + (p_2 \mathfrak{C}_2 + p_3 \mathfrak{C}_1 + p_4 \mathfrak{C}_0) t_{k-1} + (p_3 \mathfrak{C}_2 + p_4 \mathfrak{C}_1 + p_5 \mathfrak{C}_0) t_{k-5} + \ldots$$
$$\ldots + (p_{r-1} \mathfrak{C}_2 + p_r \mathfrak{C}_1) t_{k-r-1} + p_r \mathfrak{C}_2 t_{k-r-2},$$
$$t_k = \mathfrak{C}_4 t_{k-4} + (p_1 \mathfrak{C}_3 + p_3 \mathfrak{C}_2 + p_5 \mathfrak{C}_0) t_{k-5} + (p_3 \mathfrak{C}_3 + p_4 \mathfrak{C}_3 + p_5 \mathfrak{C}_1 + p_6 \mathfrak{C}_0) t_{k-6} + \ldots$$
$$\ldots + (p_{r-1} \mathfrak{C}_3 + p_r \mathfrak{C}_2) t_{k-r-2} + p_r \mathfrak{C}_3 t_{k-r-3}.$$

Aus dem Bildungs-Gesetz, welches sich in diesen Formeln für t_k kund giebt, erhält man die Formel

$$\begin{aligned} t_k = {} & \mathfrak{C}_m t_{k-m} + (p_2 \mathfrak{C}_{m-1} + p_3 \mathfrak{C}_{m-2} \ldots + p_r \mathfrak{C}_{m-(r-1)}) t_{k-m-1} \\ & + (p_3 \mathfrak{C}_{m-1} + p_4 \mathfrak{C}_{m-2} + \ldots . p_r \mathfrak{C}_{m-(r-1)}) t_{k-m-2} + \ldots . \\ & \ldots . + (p_{r-1} \mathfrak{C}_{m-1} + p_r \mathfrak{C}_{m-2}) t_{k-m-(r-2)} + p_r \mathfrak{C}_{m-1} t_{k-m-(r-1)} . \end{aligned}$$

Nimmt man diese Formel als erwiesen an und erwägt, dass

$t_{k-m} = p_1 t_{k-m-1} + p_2 t_{k-m-2} + p_3 t_{k-m-3} \ldots . + p_{r-1} t_{k-m-(r-1)} + p_r t_{k-m-r}$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} t_k = {} & (p_1 \mathfrak{C}_m + p_2 \mathfrak{C}_{m-1} \ldots . + p_r \mathfrak{C}_{m-(r-1)}) t_{k-(m+1)} \\ & + (p_2 \mathfrak{C}_m + p_3 \mathfrak{C}_{m-1} + \ldots . p_r \mathfrak{C}_{m-(r-2)}) t_{k-(m+1)-1} \\ & + (p_3 \mathfrak{C}_m + p_4 \mathfrak{C}_{m-1} + \ldots . + p_r \mathfrak{C}_{m-(r-3)}) t_{k-(m+1)-2} \ldots . \\ & \ldots . + (p_{r-2} \mathfrak{C}_m + p_{r-1} \mathfrak{C}_{m-1} + p_r \mathfrak{C}_{m-2}) t_{k-(m+1)-(r-3)} \\ & + (p_{r-1} \mathfrak{C}_m + p_r \mathfrak{C}_{m-1}) t_{k-(m+1)-(r-2)} + p_r \mathfrak{C}_m t_{k-(m+1)-(r-1)} . \end{aligned}$$

Nun ist $p_1 \mathfrak{C}_m + p_2 \mathfrak{C}_{m-1} \ldots . + p_r \mathfrak{C}_{m-(r-1)} = \mathfrak{C}_{m+1}$, und wenn man dies noch in letzte Formel für t_k setzt, so zeigt sich, dass sie aus (II.) abgeleitet werden kann, wenn man dort $m+1$ statt m setzt; d. h.: das Gesetz, nach welchem die Formel (II.) construirt ist, gilt für alle auf m folgende positive ganze Zahlen (für m gesetzt), sobald es für *irgend eine* ganze Zahl m nachgewiesen ist. Letzteres ist aber für $m = 2$, 3 und 4 geschehen, also ist die Gültigkeit der Formel (II.) erwiesen. $\mathfrak{C}_m$ ist die Summe aller Combinationen zur Summe m, und bei jeder Combination steht noch als Factor die betreffende Permutationszahl. Die Elemente der Combinationen sind $p_1, p_2, \ldots . p_r$.

Setzt man endlich in (II.) statt $k - m$ wieder q, also auch $k - q$ statt m, so erhält man für eine Reihe $r$ter Ordnung:

III. $$\begin{aligned} t_k = {} & p_1 \mathfrak{C}_{k-q} t_q + (p_2 \mathfrak{C}_{k-q-1} + p_3 \mathfrak{C}_{k-q-2} + \ldots . p_r \mathfrak{C}_{k-q-(r-1)}) t_{q-1} \\ & + (p_3 \mathfrak{C}_{k-q-1} + p_4 \mathfrak{C}_{k-q-2} + \ldots . p_r \mathfrak{C}_{k-q-(r-2)}) t_{q-2} + \ldots . \\ & \ldots . + (p_{r-1} \mathfrak{C}_{k-q-1} + p_r \mathfrak{C}_{k-q-2}) t_{q-(r-2)} + p_r \mathfrak{C}_{k-q-1} t_{q-(r-1)} . \end{aligned}$$

Hier ist $q \geqq r-1$, und da m eine ganze positive Zahl sein soll, auch $k > q$.

Die Formel (III.) stimmt genau mit derjenigen überein, welche sich durch Analogie aus den in (8.) zusammengestellten Formeln findet; und umgekehrt: in (III.) $r = 1$; $r = 2$; $r = 3$; $r = 4$; $r = 5$; $r = 6$ gesetzt, giebt die in (8.) aufgestellten Formeln.

10. Mittels der Formel (III.) lassen sich aus den Coefficienten $t_q, t_{q-1}, \ldots . t_{q-(r-1)}$ und aus der Scale alle auf q folgenden Coefficienten ganz unabhängig finden. Die Aufgabe erheischt aber die Bestimmung der r *Anfangs-*

Coefficienten. Um sie zu finden, setze man in (III.), was noch gestattet ist, $q = r - 1$; dann geht die Gleichung (III.) in

$$t_k = M_1 t_{r-1} + M_2 t_{r-2} + M_3 t_{r-3} \ldots + M_{r-1} t_1 + M_r t_0$$

über, und wenn man nun in diese Gleichung für t_k nach und nach die r gegebenen Coefficienten $t_q, t_{q-1}, \ldots t_{q-(r-1)}$ setzt, so erhält man ein System von r Gleichungen, aus welchen sich die unbekannten *Anfangs-Coefficienten* $t_0, t_1, t_2, \ldots t_{r-1}$ finden lassen.

11. *Beispiel.* Es sei

$$p_1 = 1; \quad p_2 = 0; \quad p_3 = 1; \quad t_{10} = 5; \quad t_9 = 3; \quad t_8 = 2.$$

Hier ist $r=3$, $q=10$. Combinations-Elemente sind p_1, p_2, p_3; die Gleichungen heissen

$$t_{10} = M_1 t_2 + M_2 t_1 + M_3 t_0 = (k-10) = p_1 \mathfrak{C}_8 t_2 + (p_2 \mathfrak{C}_7 + p_3 \mathfrak{C}_6) t_1 + p_3 \mathfrak{C}_7 t_0,$$

$$t_9 = \acute{M}_1 t_2 + \acute{M}_2 t_1 + \acute{M}_3 t_0 = (k-9) = p_1 \mathfrak{C}_7 t_2 (p_2 \mathfrak{C}_6 + p_3 \mathfrak{C}_5) t_1 + p_3 \mathfrak{C}_6 t_0,$$

$$t_8 = \acute{\acute{M}}_1 t_2 + \acute{\acute{M}}_2 t_1 + \acute{\acute{M}}_3 t_0 = (k-8) = p_1 \mathfrak{C}_6 t_2 (p_2 \mathfrak{C}_5 + p_3 \mathfrak{C}_4) t_1 + p_3 \mathfrak{C}_5 t_0.$$

$$\mathfrak{C}_8 = p_1^8 + 7 p_1^6 p_2 + 6 p_1^5 p_3 + 15 p_1^4 p_2^2 + 20 p_1^3 p_2 p_3 + 10 p_1^2 p_2^3 + 6 p_1^2 p_3^2 + 12 p_1 p_2^2 p_3 + p_2^4 + 3 p_2 p_3^2 = 1 + 6 + 6 = 13.$$

$$\mathfrak{C}_7 = p_1^7 + 6 p_1^5 p_2 + 5 p_1^4 p_2 + 10 p_1^3 p_2^2 + 12 p_1^2 p_2 p_3 + 4 p_1 p_2^3 + 3 p_1 p_3^2 + 3 p_2^2 p_3 = 1 + 5 + 3 = 9.$$

$$\mathfrak{C}_6 = p_1^6 + 5 p_1^4 p_2 + 4 p_1^3 p_3 + 6 p_1^2 p_1^2 + 6 p_1 p_2 p_3 + p_2^3 + p_3^2 = 1 + 4 + 1 = 6.$$

$$\mathfrak{C}_5 = p_1^5 + 4 p_1^3 p_2 + 3 p_1^2 p_3 + 3 p_1 p_2^2 + 2 p_2 p_3 = 1 + 3 = 4.$$

$$\mathfrak{C}_4 = p_1^4 + 3 p_1^2 p_2 + 2 p_1 p_3 + p_2^2 = 1 + 2 = 3.$$

Die Gleichungen für das Beispiel sind also:

$$5 = 13 t_2 + 6 t_1 + 9 t_0, \quad 3 = 9 t_2 + 4 t_1 + 6 t_0 \quad \text{und} \quad 2 = 6 t_2 + 3 t_1 + 4 t_0.$$

Hieraus folgt $2 = 4 t_2 + 2 t_1 + 3 t_0$ und $1 = 3 t_2 + t_1 + 2 t_0$, und hieraus $1 = t_2 + t_1 + t_0$. Dies giebt $0 = 2 t_2 + t_0$ und $-1 = 3 t_2 + t_0$, also endlich $-1 = t_2$, $2 = t_0$, $0 = t_1$

$$b_1 = -p_1 = -1; \quad b_2 = -p_2 = 0; \quad b_3 = -p_3 = -1;$$

$$a_1 = t_0 = 2; \qquad a_1 = t_1 - p_1 t_0 = 0 - 2 = -2;$$

$$a_2 = t_2 - p_1 t_1 - p_2 t_0 = -1 + 0 + 0 = -1.$$

Also ist der Summenbruch der Reihe

$$\frac{2 - 2x - x^2}{1 - x - x^3} = 2 - x^2 + x^3 + x^4 + x^6 + 2x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} \ldots.$$

Von dieser Reihe findet man mittels der Gleichung (III.)

$$t_{16} = \mathfrak{C}_8\, t_8 + \mathfrak{C}_6\, t_7 + \mathfrak{C}_7\, t_6 = 2.13 + 2.6 + 1.9 = 47,$$
$$t_{17} = \mathfrak{C}_8\, t_9 + \mathfrak{C}_6\, t_8 + \mathfrak{C}_7\, t_7 = 3.13 + 2.6 + 2.9 = 69,$$
$$t_{18} = \mathfrak{C}_7 t_{10} + \mathfrak{C}_6\, t_9 + \mathfrak{C}_7\, t_8 = 5.13 + 3.6 + 2.9 = 101,$$
$$t_{19} = \mathfrak{C}_8 t_{11} + \mathfrak{C}_6 t_{10} + \mathfrak{C}_7\, t_9 = 7.13 + 5.6 + 3.9 = 148.$$

Als Probe für die Richtigkeit der letzten Resultate ist z. B.

$t_{19} = p_1 t_{18} + p_2 t_{17} + p_3 t_{16} = 101 + 0 + 47 = 148$; wie es sein soll.

Es war aber Bedingung, dass $k > q$ sei. Bei der Construction der Gleichungen ist $q = r - 1$; also ist es hier Bedingung, dass $k > r - 1$ sei. Diese Bedingung muss für alle Werthe, welche man statt k nach und nach setzt, erfüllt werden. Der kleinste Werth, der für k gesetzt wird, ist $q-(r-1)$ und es ist also Bedingung, dass $q-(r-1)>r-1$; d. h. $q>2r-2$ sei.

Es sei $q<2r-2$, z. B. $=2r-2-l$; welcher Fall eintritt, wenn unter den auf einander folgenden r gegebenen Coefficienten $2r - 2 - l - (r - 1) = r - (l+1)$ Coefficienten sind, die nicht zu den Anfangs-Coefficienten gehören, also $l + 1$ der letztern mitgegeben sind.

Für $q = r - 2 - l$ heisst die $m$te der aufgestellten Gleichungen:

$$t_{2r-2-l-(m-1)} = \mathfrak{C}_{2r-2-l-m+2}\, t_{r-1}$$
$$+ (p_2 \mathfrak{C}_{s-1} t_1 p_3 \mathfrak{C}_{s-2} \ldots.) t_{r-2} + (p_3 \mathfrak{C}_{s-1} + \ldots.) t_{r-3} \ldots. + p_r \mathfrak{C}_{s-1} t_0,$$

Da es r Gleichungen giebt, so kann m alle Werthe von 1 bis r haben. Die Summe s, zu welcher beim ersten Posten combinirt wird, ist $r - l - m$. Ist dies $= 0$, so heisst die Gleichung $t_{r-1} = t_{r-1}$, und weil dann $m = r - l$ ist, und alle darauf folgenden Gleichungen (da die Summen, zu welchen darin combinirt werden soll, negativ ausfallen) nichts bestimmen, so bleiben, da auch die $r-l$te als identische Gleichung als nichtbestimmend angesehen werden muss, in dem vorgelegten Falle bloss $r-l-1$ bestimmende Gleichungen; wie es auch sein soll, indem in diesem Falle $l + 1$ Anfangs-Coefficienten gegeben und also nur noch $r - l - 1$ Coefficienten zu bestimmen sind.

Beispiel. Es sei

$$t_4 = 1;\ t_5 = 2;\ t_6 = 3;\ t_7 = 4;\ t_8 = 5;\ t_9 = 6;$$
$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0;\ p_6 = 1.$$

Hier ist $r = 6$; $q = 9$. Da $2r - 2 = 10$, $q = 10 - 1$ ist, so ist $l = 1$; also sind hier $l + 1 = 2$ Anfangs-Coefficienten mitgegeben und man erhält bloss $6 - 2 = 4$ bestimmende Gleichungen; wie es sich auch ergiebt.

Die Gleichungen heissen

$$t_9 = \mathfrak{C}_4 t_5 + [p_2\mathfrak{C}_3 + p_3\mathfrak{C}_2 + p_4\mathfrak{C}_1 + p_5\mathfrak{C}_0]t_4 + [p_3\mathfrak{C}_3 + p_4\mathfrak{C}_2 + p_5\mathfrak{C}_1 + p_6\mathfrak{C}_0]t_3$$
$$+ [p_4\mathfrak{C}_3 + p_5\mathfrak{C}_2 + p_6\mathfrak{C}_1]t_2 + [p_5\mathfrak{C}_3 + p_6\mathfrak{C}_2]t_1 + p_6\mathfrak{C}_3 t_0,$$
$$t_8 = \mathfrak{C}_3 t_5 + [p_2\mathfrak{C}_2 + p_3\mathfrak{C}_1 + p_4\mathfrak{C}_0]t_4 + [p_5\mathfrak{C}_2 + p_4\mathfrak{C}_1 + p_5\mathfrak{C}_0]t_3$$
$$+ [p_4\mathfrak{C}_2 + p_5\mathfrak{C}_1 + p_6\mathfrak{C}_0]t_2 + [p_5\mathfrak{C}_2 + p_6\mathfrak{C}_1]t_1 + p_6\mathfrak{C}_2 t_0,$$
$$t_7 = \mathfrak{C}_2 t_5 + [p_2\mathfrak{C}_1 + p_3\mathfrak{C}_0]t_4 + [p_3\mathfrak{C}_1 + p_4\mathfrak{C}_0]t_3 + [p_4\mathfrak{C}_1 + p_3\mathfrak{C}_0]t_2$$
$$+ [p_5\mathfrak{C}_1 + p_6\mathfrak{C}_0]t_1 + p_6\mathfrak{C}_1 t_0,$$
$$t_6 = \mathfrak{C}_1 t_5 + [p_2\mathfrak{C}_0]t_4 + p_3\mathfrak{C}_0 t_3 + p_4\mathfrak{C}_0 t_2 + p_2\mathfrak{C}_0 t_1 + p_6\mathfrak{C}_0 t_0,$$
$$t_5 = \mathfrak{C}_0 t_5 = t_5.$$

Nun ist

$$\mathfrak{C}_4 = p_1^4 + 3p_1^2p_2 + 2p_1p_3 + p_2^2 + p_4 = 0,$$
$$\mathfrak{C}_3 = p_1^3 + 2p_1p_2 + p_3 = 0,$$
$$\mathfrak{C}_2 = p_1^2 + p_2 = 0,$$
$$\mathfrak{C}_1 = p_1 = 0,$$
$$\mathfrak{C}_0 = 1;$$

also sind die Gleichungen für das Beispiel:

$t_9 = t_3 = 6$; $t_8 = t_2 = 5$; $t_2 = t_1 = 4$ und $t_6 = t_0 = 3$ und es ist

$$b_1 = 0,\quad b_2 = 0,\quad b_3 = 0,\quad b_4 = 0,\quad b_5 = 0,\quad b_6 = -1;$$
$$a_0 = 3,\quad a_1 = 4,\quad a_2 = 5,\quad a_3 = 6,\quad a_4 = 1,\quad a_5 = 2.$$

Der Summenbruch ist $= \frac{3+4x+5x^2+6x^3+x^4+2x^5}{1-x^6} = 3. + 4x + 5x^2 + 6x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 \ldots.$

Es lehrt also vorstehende Auflösung: *Erstlich,* eine neue unabhängige Herstellung der Coefficienten, und *Zweitens,* die sonst unbeachtete Aufsuchung des Summenbruches aus der Scale und aus r Coefficienten, welche von einer bekannten Stelle an ununterbrochen auf einander folgen.

II.

1. Für den Bruch $\frac{a_0 + a_1 a \ldots . a_{r-1}x_{r-1}}{1 - b_r x^r}$ ist

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots . p_{r-1} = 0,\quad p_r = b_r;$$
$$t_0 = a_0,\quad t_r = b_r a_0,\quad t_{2r} = b_r^2 a_0,$$
$$t_1 = a_1,\quad t_{r+1} = b_r a_1,\quad t_{2r+1} = b_r^2 a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{r-1} = a_{r-1},\quad t_{2r-1} = b_r a_{r-1},\quad t_{3r-1} = b_r^2 a_{r-1},$$

und hieraus

$$t_{kr} = b_r^k a_0,\quad t_{kr+1} = b_r^k a_1,\quad \ldots .\quad t_{kr+r-1} = b_r^k a_{r-1}.$$

2. Für das allgemeine Glied einer dem vorgelegten Bruch entsprechenden Reihe erhält man also, für $n = rq + s$, wo q und s ganze Zahlen sind und zwar $s \overline{\overline{>}} r - 1$ ist, $t_n x^n = b_r^q a_s$, oder, da $q = \frac{n-s}{r}$ ist,

$$t_n x^n = b_r^{\frac{n-s}{r}} a_s x^n.$$

Die Zahl s ist immer leicht zu finden. Sie ist eine der ganzen Zahlen von 0 bis $r - 1$, welche, von n abgezogen, ein Multiplum von r geben (q ist eine ganze Zahl). Ist $n < r - 1$, so ist nothwendig $s = n$.

3. Die Reihe selbst hat nach dem Vorhergehenden folgende Form:

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots \\
&+ b_r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{r-1} x^{r-1}) x^r + \ldots \\
&+ b_r^2 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{r-1} x^{r-1}) x^{2r} + \ldots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ b_r^k (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{r-1} x^{r-1}) x^{kr} + \ldots
\end{aligned}$$

4. Umgekehrt: Hat eine Reihe diese Gestalt, so hat sie innerhalb der Grenzen ihrer Convergenz obigen Bruch zur Summe. Ist $r = 1$, so bilden die Glieder der Reihe Perioden, und umgekehrt: Perioden geben der Reihe innerhalb der Grenzen ihrer Convergenz zur Summe einen Bruch, der die Coefficienten der Periode zu Zähler-Coefficienten hat und dessen Nenner $= 1 - x^r$ ist, wo r die Gliederzahl der Periode ist. Es sei z. B.

$$1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{1}{8}x^3 + x^4 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{3}{4}x^6 - \tfrac{1}{8}x^7 + x^8 \ldots.$$

Hier ist die Periode $1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$; also ist der Bruch

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3}{1 - x^4} = \frac{8 - 4x + 6x^2 - x^3}{8 - 8x^3}.$$

5. Die Summe der $kr + r$ ersten Glieder ist aus (3.), wenn man $a_0 + a_1 x \ldots a_{r-1} x^{r-1} = Z$ setzt,

$$= Z[1 + b_r x^r + (b_r x^r)^2 + (b_r x^r)^3 \ldots + (b_r x^r)^k] = Z \frac{1 - b_r^{k+1} x^{r(k+1)}}{1 - b_r x^r}.$$

Deshalb ist die Summe aller auf die $kr + r - 1$ ersten Glieder folgenden Glieder:

$$\begin{aligned}
&= \frac{Z}{1 - b_r x^r} - Z \frac{1 - b_r^{k+1} x^{r(k+1)}}{1 - b_r x^r} \\
&= \frac{b_r^{k+1} x^{r(k+1)}}{1 - b_r x^r} (a_0 + a_1 x \ldots a_{r-1} x^{r-1}) \\
&= \frac{(b_r x^r)^{k+1}}{1 - b_r x^r} (a_0 + a_1 x \ldots a_{r-1} x^{r-1}).
\end{aligned}$$

Diese Summe nimmt für $b_r x^r < 1$ unendlich ab, wenn k unendlich zunimmt; und da es für die Convergenz einer Reihe Bedingung ist, dass der Rest der ganzen Reihe, weniger einer Anzahl Anfangsglieder, unendlich abnehme, wenn diese Anzahl unendlich zunimmt, so ist $b_r x^r < 1$ die Bedingung für die Convergenz einer solchen Reihe. Ist also $b_r \geqq 1$, so divergirt die Reihe für alle Werthe, die $\geqq 1$ sind, und convergirt für alle, welche $\geqq 0 < 1$ sind. Ist aber $b_r < 1$, so kann x auch grösser als 1 sein. Z. B. die Reihe

$$1 + 2x + 3x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{3}{16}x^5 + \tfrac{1}{256}x^6 + \tfrac{1}{128}x^7 + \tfrac{1}{256}x^8 \ldots.$$

convergirt für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 2$ einschliesslich, denn sie ist $= \left(\frac{1}{16}\right)^0 (1+2x+3x^2) + \left(\frac{1}{16}\right)^1 (1+2x+3x^2)x^3 + \left(\frac{1}{16}\right)^2 (1+2x+3x^2)x^6 + \ldots.$, folglich ist hier $r = 3$, $p_r = \frac{1}{16}$, $Z = 1 + 2x + 3x^2$. Demnach ist es Bedingung für die Convergenz, dass $\frac{x^3}{16} < 1$, also $x < \sqrt[3]{16} < 2{,}519842$ sei. Es darf demnach hier x noch $= 2{,}519841$ sein, also noch über 2; immer noch wird die Reihe convergiren.

Hieraus folgt ferner die Gleichung

$$\frac{1+2x+3x^2}{1-\frac{1}{16}x^3} = 1 + 2x + 3x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{3}{16}x^5 + \ldots.$$

für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und 2,519842 liegen. Für $x = 1$ folgt

$$\frac{7}{\frac{15}{16}} = \frac{7.16}{15} = 1 + 2 + 3 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{2}{16} + \tfrac{3}{16} + \tfrac{1}{256} + \tfrac{2}{256} + \tfrac{3}{256}, \quad \text{oder}$$

$$\frac{7}{15} = \tfrac{1}{16} + \tfrac{2}{16} + \tfrac{3}{16} + \tfrac{1}{256} + \tfrac{2}{256} + \tfrac{3}{256} \ldots.$$

und auch für $x = 2$:

$$\frac{17}{\frac{1}{2}} = 34 = 1 + 4 + 12 + \tfrac{8}{16} + \tfrac{32}{16} + \tfrac{96}{16} + \tfrac{64}{256} + \ldots.$$

Für die 1002 ersten Glieder ist die Summe $= 34 \times N$; wo N gleich einer Decimalzahl ist, die 0 vor dem Comma, dann 999 Stellen mit 9 besetzt und endlich 300078 als Decimalstellen hat. Endlich hat die Reihe

$$\tfrac{8}{16} + \tfrac{32}{16} + \tfrac{96}{16} + \tfrac{64}{256} + \tfrac{256}{256} + \tfrac{768}{256} \ldots.$$

die Zahl 17 zur Summe.

Fürth im August 1847.

10.

Ueber die Gleichgewichts-Lagen eines mit seiner ganzen Grundfläche in eine Flüssigkeit getauchten graden dreiseitigen Prisma's.

(Von Herrn *A. v. Dawidof* in Moskau.)

Ein fast in allen Schriften über Hydrostatik gebräuchliches Beispiel für die Ermittlung der Gleichgewichts-Lagen schwimmender Körper ist ein *grades dreiseitiges Prisma,* welches so schwimmt, dass seine Kanten horizontal liegen. Dies sind aber nicht die einzigen Gleichgewichts-Lagen: das Prisma kann sich auch in schiefen Lagen in einer Flüssigkeit aufrecht erhalten. Wir wollen hier die verschiedenen Gleichgewichts-Lagen eines schwimmenden Prisma's suchen, in welchen dasselbe mit seiner ganzen Grundfläche in eine Flüssigkeit getaucht ist.

Das Gewicht des Prisma's sei p, das durch dasselbe verdrängte Volumen Flüssigkeit v und das Gewicht eines der Einheit gleichen Volumens derselben Flüssigkeit q, so muss für jede Gleichgewichts-Lage $p = v.q$ oder $v = \frac{p}{q}$ sein. Die andere Bedingung des Gleichgewichts besteht darin, dass die Linie, welche den Schwerpunct des schwimmenden Prisma's mit dem des untergetauchten Theils verbindet, auf der Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht stehe.

Man nehme in dem graden dreiseitigen Prisma *ABCDEF* (Taf. II. Fig. 1.) die obere Grundfläche *ABC* zur Coordinaten-Ebene der xy an, die Achse der x in der Richtung der Linie *AB*, die der y in der Richtung der aus dem Puncte *C* auf die Grade *AB* gefällten Senkrechten, und drücke die Graden *AC* und *BC* durch die Gleichungen $y = Ax + B$ und $y = A_1 x + B$ aus. Es sei ferner $z = ax + by + d$ die Gleichung einer Ebene *MNH*, die von dem

Prisma den Theil *MNHABC*, gleich v, abschneidet; und ξ,η,ζ seien die Coordinaten des Schwerpuncts dieses abgeschnittenen Theils: so ist

$$\text{I.}\quad \begin{cases} v = \iint (ax+by+d)\,\partial x\partial y; & v\xi = \iint (ax+by+d)\,x\partial x\partial y; \\ v\eta = \iint (ax+by+d)\,y\partial x\partial y; & v\zeta = \iint \tfrac{1}{2}(ax+by+d)^2\,\partial x\partial y; \end{cases}$$

wo die doppelten Integrale sich auf alle Elemente des Dreiecks *ACB* beziehen. Es ist demnach

$$\iint \partial x\partial y = \frac{B^2}{2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{A_1}\right);\ \iint x\partial x\partial y = -\frac{B^3}{6}\left(\frac{1}{A^2}-\frac{1}{A_1^2}\right);\ \iint y\partial x\partial y = \frac{B^3}{6}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{A_1}\right);$$

$$\iint x^2\partial x\partial y = \frac{B^4}{12}\left(\frac{1}{A^3}-\frac{1}{A_1^3}\right);\ \iint xy\partial x\partial y = -\frac{B^4}{24}\left(\frac{1}{A^2}-\frac{1}{A_1^2}\right);\ \iint y^2\partial x\partial y = \frac{B^4}{12}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{A_1}\right).$$

Stellen wir uns nun vor, dass die Ebene *MNH* so ihre Lage ändere, dass das abgeschnittene Volumen immer dasselbe, also $= v$ bleibt, so wird dessen Schwerpunct eine gewisse Fläche beschreiben, deren Gleichung sich findet, wenn man aus den vier Gleichungen (I.) die Grössen a, b und d eliminirt.

Man schliesse zunächst aus den drei ersten Gleichungen in (I.) die Grösse d aus, so erhält man

$$\text{II.}\qquad v(\xi-\alpha) = Pa + Qb; \qquad v(\eta-\beta) = Qa + Rb,$$

wo

$$P = \frac{B^4}{36}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{A_1}\right)\left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{A_1^2}-\frac{1}{AA_1}\right);\quad Q = \frac{B^4}{72}\left(\frac{1}{A^2}-\frac{1}{A_1^2}\right);\quad R = \frac{B^4}{36}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{A_1}\right);$$

$$\alpha = -\tfrac{1}{3}B\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{A_1}\right); \qquad \beta = \tfrac{1}{3}B \quad \text{ist.}$$

Um d auch aus der letzten Gleichung in (I.) zu eliminiren, differentiire man diese Gleichung in Bezug auf a, b, d und ζ; was

$$v\partial\zeta = \iint (ax+by+d)\,(x\partial a+y\partial b+\partial d)\,\partial x\,\partial y$$

giebt. Da aber vermöge der ersten drei Gleichungen (I.)

$$\iint (x\partial x+y\partial b+\partial d)\,\partial x\,\partial y = 0; \qquad v\partial\xi = \iint (x^2\partial a+xy\partial b+x\partial d)\,\partial x\,\partial y;$$

$$v\eta = \iint (xy\partial x+y^2\partial b+y\partial d)\,\partial x\,\partial y$$

ist, so geht die vorhergehende Gleichung in

$$\text{III.}\qquad \partial\zeta = a\partial\xi + b\partial\eta$$

über. Nimmt man nun aus den Gleichungen (II.) die Grössen a und b, nämlich

$$a = \frac{vR(\xi-\alpha)-vQ(\eta-\beta)}{PR-Q^2}; \qquad b = \frac{vP(\eta-\beta)-vQ(\xi-\alpha)}{PR-Q^2},$$

und setzt die Werthe derselben in die Gleichung (III.), so ergiebt sich eine Differentialgleichung, deren Integral

IV. $$2\left(\frac{PR-Q^2}{v}\right)(\zeta-\gamma) = R(\xi-\alpha)^2 + P(\eta-\beta)^2 - 2Q(\xi-\alpha)(\eta-\beta)$$

ist; wo noch die constante Grösse γ zu suchen ist.

Die Gleichung (IV.) drückt ein elliptisches Paraboloïd aus, da $Q^2 - RP = -\frac{3}{4}\frac{B^8}{36^2}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{A_1}\right)^2$ immer eine negative Grösse ist.

Um die Grösse γ zu finden, bemerken wir, dass $\xi=\alpha$, $\eta=\beta$ für $a=0$ und $b=0$, folglich $\zeta=\gamma$ ist. Es bedeutet demnach γ die Entfernung des Schwerpuncts von der Ebene ABC, wenn die Ebene MNH mit ABC parallel ist. Da in diesem Falle die Entfernung dieser beiden Ebenen $d = \frac{v}{\iint \partial x \partial y} = \frac{2AA_1}{B^2(A_1-A)}$ ist, so ist $\gamma = \frac{AA_1}{B^2(A_1-A)}$.

Die Gleichung $\partial\zeta = a\partial\xi + b\partial\eta$ zeigt, dass die tangirende Ebene in irgend einem Puncte der Oberfläche (IV.) mit der diesem Puncte entsprechenden schneidenden Ebene $z = ax + by + d$ parallel ist. Fället man also aus dem Schwerpuncte des Prisma's eine Normale auf die Oberfläche (IV.), so wird die Richtung derselben eine der Gleichgewichts-Lagen des Prisma's bestimmen; denn diese Normale steht senkrecht auf der schneidenden Ebene und verbindet den Schwerpunct des ganzen Prisma's mit dem des abgeschnittenen Theils.

Es seien x', y', z' die Coordinaten des Schwerpuncts des Prisma's und ξ, η, ζ die des Puncts, in welchem die Normale aus dem Puncte $(x'y'z')$ die Oberfläche (IV.) trifft, so ist $\eta - y' + b(\zeta - z') = 0$, $\xi - x' + a(\zeta - z') = 0$. Schliesst man nun aus diesen beiden Gleichungen und aus den Gleichungen (II., IV.) die drei Grössen ξ, η, ζ aus, so ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

V. $$\begin{cases} 2Qa + 2Rb + 2c(a-x') + Pa^2b + Rb^3 + 2Qab^2 + 2c(\gamma - z')b = 0, \\ 2Pa + 2Qb + 2c(\beta - y') + Pa^3 + Rab^2 + 2Qa^2b + 2c(\gamma - z')a = 0, \end{cases}$$

welche, zusammen mit der Gleichung

$$c = \frac{B^3}{6}\left(\frac{1}{A_1^2}-\frac{1}{A^2}\right)x + \frac{B^3}{6}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{A_1}\right)b + \tfrac{1}{2}B^2\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A}\right)d,$$

die drei Grössen a, c und d bestimmen.

Besteht das Prisma aus einer *homogenen* Masse, oder fällt der Schwerpunct desselben mit dem seines Volumens zusammen, so ist $x' = \alpha$, $y' = \beta$ und die Gleichungen (V.) gehen in

$$2Qa + 2Pb + Pa^2b + Rb^3 + 2Qab^2 + 2c(\gamma - z')b = 0 \text{ und}$$
$$2Pa + 2Qb + Pa^3 + Rab^2 + 2Qa^2b + 2c(\gamma - z')a = 0$$

über, die auch in der Form

$(P-R)ab + Q(b^2-a^2) = 0$; $2v(\gamma-z')a + (Pa+Qb)(1+a^2+b^2) = 0$ ausgedrückt werden können. Sie geben für a und b fünf Systeme von Werthen; folglich kann ein Prisma *nur fünf Gleichgewichts-Lagen haben,* in welchen seine ganze Grundfläche sich in der Flüssigkeit befindet. Eine der Lagen entspricht $a = 0$ und $b = 0$; die übrigen vier sind nicht immer möglich, oder nicht immer der Aufgabe angemessen.

Ist die Grundfläche des Prisma's ein *gleichschenkliges* Dreieck, so ist $A = A_1$ und

$$P = \frac{B^4}{6A^3}; \qquad Q = 0; \qquad R = \frac{B^4}{12A}; \qquad \gamma = \frac{vA}{2B^2}.$$

Setzt man v gleich dem $p$ten Theil des Volumens des ganzen Prisma's, so ist $v = p \cdot \frac{B^2}{A} \cdot L$, wo L die Höhe des Prisma's bezeichnet. Die fünf Systeme von Werthen für a und b sind dann:

$$a=0, b=0;\ a=0, b=\frac{L}{B}\sqrt{\left(9p(1-p)-\frac{B^2}{L^2}\right)};\ a=0, b=-\frac{L}{B}\sqrt{\left(9p(1-p)-\frac{B^2}{L^2}\right)};$$

$$b=0,\ a=\frac{LA}{B}\sqrt{\left(3p(1-p)-\frac{B^2}{A^2L^2}\right)};\ b=0, a=-\frac{LA}{B}\sqrt{\left(3p(1-p)-\frac{B^2}{A^2L^2}\right)}.$$

Ist die Grundfläche des Prisma's ein *rechtwinkliges* Dreieck und $A = \infty$, so sind die Werthe für a und b folgende:

$$a=0,\ b=0;\ a=b=\frac{L}{B}\sqrt{\left(18p(1-p)-\frac{B^2}{2L^2}\right)};\ a=b-\frac{L}{B}\sqrt{\left(18p(1-p)-\frac{B^2}{2L^2}\right)};$$

$$a=-b=-\frac{L}{B}\sqrt{\left(6p(1-p)-\frac{B^2}{2L^2}\right)};\ a=-b=\frac{L}{B}\sqrt{\left(6p(1-p)-\frac{B^2}{2L^2}\right)}.$$

Moscau im August 1847.

11.

Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Freyburg im Br.)

(Fortsetzung der No. 1., 7., 11. und 17., Bd. 33. und No. 3., Bd. 35.)

---

§. 42.

Die Ausdrücke im vorigen Paragraphen führen, in Verbindung mit den weiter oben gefundenen Resultaten, leicht zu weitern Anwendungen. Setzt man in (8. §. 41.) $p+tq$ statt p und $\frac{n}{m}+r$ statt n, so erhält man folgende allgemeine Uebergangs-Gleichung:

$$1. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{nq}{m}+qr+r-1}}{(1+x^q)^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}+r+t+1}}$$

$$= \int_1^\infty \frac{(x^q-1)^{\frac{n}{m}+r}\partial x}{x^{\frac{qn}{m}+qr+p+tq+1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}+t|1}.1^{\frac{n}{m}+r|1}}{(p+tq)1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+t+r|1}}.$$

Setzt man in (1. §. 38.) $-n$ statt n und $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$, so ergiebt sich

$$\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x = \frac{(m-n)^{r|m}(n+m)^{t|m}}{(n+tm)m^{r+t|m}}.1^{-\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}.$$

Setzt man nun die nämlichen Werthe in (1.), so erhält man hieraus und aus (21. §. 26.) folgende Formel:

$$2. \quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{-n+mr+r-1}\partial x}{(1+x^m)^{r+t+1}} = \int_1^\infty \frac{x^{m-1}(x^m-1)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x}{x^{(r+t)m+m}}$$

$$= \frac{(m-n)^{r|m}(m+n)^{t|m}}{m^{r+t|m}}\cdot\frac{n}{(n+tm)m}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Für $t=r$ ist hieraus

$$3. \quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+t}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{-n+(m+1)t-1}\partial x}{(1+x^m)^{2t+1}} = \int_0^\infty \frac{(x^m-1)^{-\frac{n}{m}+t}}{x^{2tm+1}}$$

$$= (1-\frac{n^2}{m^2})(2^2-\frac{n^2}{m^2})\ldots(t^2-\frac{n^2}{m^2})\frac{n}{1^{2t|1}(n+tm)m}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird in (17. §. 38.) $-n$ statt n und $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$ gesetzt, so ergiebt sich auf dieselbe Weise wie vorhin:

$$4.\quad \int_0^1 \frac{x^{n+tm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{n}{m}+r}} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{n+(m+1)r+1}(1+x^m)^{t-r+1}} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^{(t-r)m+1}(x^m-1)^{\frac{n}{m}+r}}$$

$$= (-1)^r \frac{(m+n)^{t|m}.m^r}{n^{r|m}\,m^t.1^{t-r|1}} \cdot \frac{n}{(n+tm)m} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Für $t=r$ wird hieraus

$$5.\quad \int_0^1 \frac{x^{n+tm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{n}{m}+t}} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{n+(m+1)t+1}(1+x^m)} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x^m-1)^{\frac{n}{m}+t}} = (-1)^t \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird in (22. §. 38.) $-n$ und $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$ gesetzt, so findet sich, in Rücksicht auf (1. in diesem Paragraph):

$$6.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{-u+(r+1)m-1}\partial x}{(1+x^m)^{r-t+1}} = \int_1^\infty \frac{(x^m-1)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x}{x^{m(r-t)+1}}$$

$$= (-1)^t \cdot \frac{(m-n)^{r|m}m^t}{m^r(m-n)^{t|m}} \cdot \frac{1}{1^{r-t|1}m} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Für $t=r$ wird hieraus

$$7.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+t}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{mt+t-1}\partial x}{x(1+x^m)} = \int_1^\infty \frac{(x^m-1)^{-\frac{n}{m}+t}\partial x}{x}$$

$$= (-1)^t \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Aus (8. §. 39. und 1. hier) ergiebt sich:

$$8.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+tq+\frac{nq}{m}+rq-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{p}{q}+t}}$$

$$= \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^\infty \frac{x^{(1-t)q-p-1}\partial x}{(1+x^q)^{\frac{n}{m}+r+1}}$$

$$= \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{nq}{m}+rq}(x^q-1)^{\frac{p}{q}+t-1}} = (-1)^t \frac{1}{p+tq+\frac{nq}{m}+rq} \cdot \frac{\pi}{q.\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Diese Gleichung ist um so merkwürdiger, da n, m, r und t ganz willkürlich sind. Je grösser t_1 und r wird, desto mehr nähert sich der Werth des Doppel-Integrals der 0. Aus (11. §. 39. und 1. hier) findet sich

$$9.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 \frac{x^{p+tq+\frac{nq}{m}+qr-1}\,\partial x}{(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}}$$

$$=\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^\infty \frac{x^{q\frac{m-n}{m}-qr-1}\,\partial x}{(1+x^q)^{\frac{p}{q}+t+1}}$$

$$=\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int^\infty \frac{\partial x}{x^{p+tq+1}(x^q-1)^{\frac{n}{m}+r}} = (-1)^r \frac{(n+rm)}{(p+tq)(p+tq+\frac{nq}{m}+qr)} \cdot \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}\,.$$

Auf die nämliche Weise folgt aus (13. §. 39.):

$$10.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 \frac{x^{n+rm+\frac{mp}{q}+tm-1}\,\partial x}{(1-x^m)^{\frac{p}{q}+t}}$$

$$=\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^\infty \frac{x^{\frac{q-p}{q}m-tm-1}\,\partial x}{(1+x^m)^{\frac{n}{m}+r+1}}$$

$$=\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \cdot \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^{n+rm+1}(x^m-1)^{\frac{p}{q}+t}} = (-1)^t \frac{1}{n+rm+\frac{mp}{q}+tm} \cdot \frac{\pi}{q\sin\frac{p}{q}\pi}\,.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich (15. §. 39.):

$$11.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 \frac{x^{n+rm+\frac{mp}{q}+tm-1}\,\partial x}{(1-x^m)^{\frac{n}{m}+r}}$$

$$=\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \cdot \int_0^\infty \frac{x^{m(1-r)-n-1}\,\partial x}{(1-x^m)^{\frac{p}{q}+t+1}}$$

$$=\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_1^\infty \frac{(x^m-1)^{-\frac{n}{m}+r}\,\partial x}{x^{\frac{mp}{q}+tm+1}}$$

$$=(-1)^r \frac{(n+rm)}{(p+tq)(n+rm+\frac{mp}{q}+tm)} \cdot \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}\,.$$

In (8. bis 11.) kann beliebig $-t$ statt t und $-r$ statt r gesetzt werden. Dieses giebt folgende Ausdrücke:

$$12.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \cdot \int_0^1 \frac{x^{p-tq+\frac{nq}{m}+rq-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{p}{q}-t}}$$

$$=\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^\infty \frac{x^{q+tq-p-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r+1}}$$

$$=\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \cdot \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{nq}{m}+rq}(x^q-1)^{\frac{p}{q}-t+1}} = (-1)^t \frac{1}{(p-tq+\frac{nq}{m}+qr)} \cdot \frac{\pi}{q\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

$$13.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+tq+\frac{nq}{m}-qr-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}}$$

$$=\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x \int_0^1 \frac{x^{q(1+r)-\frac{qn}{m}-1}\partial x}{(1+x^q)^{\frac{p}{q}+t+1}}$$

$$=\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x \cdot \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^{p+tq+1}(x^q-1)^{\frac{n}{m}-r}} = \frac{(-1)^r(n-rm)}{(p+tq)(p+tq+\frac{nq}{m}-rq)} \cdot \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}$$

u. s. w.

Die hier entwickelten Gleichungen sind sehr allgemein. Specielle Fälle ergeben sich leicht. So ist aus (8.), wenn t und r in 0 übergeht:

$$14.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x \int_0^1 \frac{x^{p+\frac{nq}{m}-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{p}{q}}} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x \int_0^\infty \frac{x^{q-p-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{n}{m}+1}}$$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x \cdot \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{nq}{m}}(x^q-1)^{\frac{p}{q}+1}} = \frac{m.\pi}{(pm+nq)q\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Für $-n$ statt n ergiebt sich hieraus:

$$15.\quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{n}{m}}} \int_0^1 \frac{x^{p-\frac{nq}{m}-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{p}{q}}} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{n}{m}}} \int_0^\infty \frac{x^{q-p-1}\partial x}{(1+x^q)^{-\frac{n}{m}+1}}$$

$$=\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{n}{m}}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}}\partial x}{(x^q-1)^{\frac{p}{q}+1}} = \frac{m.\pi}{(pm-nq)q.\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Für $r=-1$ und $t=0$ folgt aus (12.):

16. $$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+\frac{nq}{m}-q-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{p}{q}}} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x \int_0^1 \frac{x^{q-p-1}\,\partial x}{(1+x^q)^{\frac{n}{m}}}$$

$$= \int_0^1 x^{p-1}.(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x \cdot \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{nq}{m}-q}(x^q-1)^{\frac{p}{q}+1}} = \frac{m\pi}{(pm+nq-nq)q\,.\sin\frac{n}{m}\pi}\,.$$

Für $n = 0$ ergiebt sich hieraus

17. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^q}\int_0^1 \frac{x^{p-q-1}\partial x}{(1-x^q)^{\frac{p}{q}}} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^q}\int_0^\infty x^{q-p-1}\,\partial x$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{1-x^q}\int_1^\infty \frac{x^q\,\partial x}{(x^q-1)^{\frac{p}{q}+1}} = \frac{\pi}{(p-q)q\sin\frac{n}{m}\pi}$$

u. s. w. Die Ableitungen lassen sich beliebig fortsetzen. Setzt man in (14. und 15.) $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$, so erhält man

18. $$\int_0^1 x^{p-1}\sqrt{(1-x^q)}\,\partial x \cdot \int_0^1 \frac{x^{p+\frac{1}{2}q-1}\,\partial x}{(1-x^q)^{\frac{p}{q}}} = \int_0^1 x^{p-1}\,\partial x\,.\sqrt{(1-x^q)}\int_0^\infty \frac{x^{q-p-1}\,\partial x}{\sqrt{((1+x^q)^3)}}$$

$$= \int_0^1 x^{p-1}\,\partial x\sqrt{(1-x^q)}\int_1^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{(x^q)}(x^q-1)^{\frac{p}{q}+1}} = \frac{2\pi}{(2p+q)q\sin\frac{p}{q}\pi},$$

19. $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^q)}}\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt{(x^q)}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^q)}}\int_0^\infty \frac{x^{q-p-1}\partial x}{\sqrt{(1+x^q)}}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^q)}}\int_1^\infty \frac{\partial x\sqrt{(x^q)}}{\sqrt[q]{((x^q-1)^{p+q})}} = \frac{2\pi}{(2p-q)q\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Setzt man in (12.) $\frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$, $t = 0$, $r = 0$, so erhält man

20. $$\int_0^1 \frac{(1-x^2)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x^2}\int_0^1 \frac{x^{\frac{2n}{m}-2}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int_0^1 \frac{(1-x^2)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x^2}\int_0^\infty \frac{x^2\,\partial x}{(1-x^2)^{\frac{n}{m}+1}}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x^2)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x^2}\int_1^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{2n}{m}}\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{m\pi}{2(2n-m)\sin\frac{n}{m}\pi} \quad \text{u. s. w.}$$

Von den in diesem Paragraph gefundenen Gleichungen hat *Plana* (S. d. Journ. 17ter Bd. Seite 202.) den besondern Fall von (19.)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^q)}}\int_0^\infty \frac{x^{q-p-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^q)}} = \frac{m\pi}{(2p-q)q\,.\sin\frac{p}{q}\pi}$$

ziemlich mühevoll entwickelt. *Legendre* hat denselben (Exerc. de calc. int. T. I. pag. 234.) angegeben.

§. 43.

Die in (45. §. 41.) aufgestellten Formeln lassen noch weiter mancherlei Anwendungen zu. Setzt man nämlich $p = -\frac{n}{m}$, $r = 2$, $n = \frac{n}{m}$, $q = 1$, so ist mit Rücksicht auf (23. §. 26.):

1. $$\int_0^1 x^{-\frac{n}{m}+1}(1-x)^{\frac{n}{m}}\partial x = \int_0^1 x^{\frac{n}{m}}(1-x)^{-\frac{n}{m}+1}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}+1}\partial x}{(1+x)^3}$$
$$= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}}\partial x}{(1+x)^3} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}+1}\partial x}{x^3} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^3(x-1)^{\frac{n}{m}}} = \frac{n(m-n)}{1.2.m^2}\,\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Für $p = -\frac{n}{m}$, $r = 1$, $q = 2$, $n = \frac{n}{m}$ ist nach (25. §. 26.)

2. $$\int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}+1}\partial x}{x^{\frac{n}{m}}} = \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}+1}\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}}} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{(1-x)^3 x^{\frac{n}{m}}} = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}+1}\partial x}{(1+x)^3}$$
$$= \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^3(x-1)^{\frac{n}{m}}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+1}\partial x}{x^3} = \frac{n(n+m)}{2.m^2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}$$

u. s. w. Eben so ergiebt sich, mit Rücksicht auf die Formeln in (§. 29.), wenn in (45. §. 41.) die erforderlichen Werthe eingeführt werden:

3. $$\int_0^1 x^{\frac{n}{m}+t}(1-x)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x = \int_0^1 x^{-\frac{n}{m}+t}(1-x)^{\frac{n}{m}+r}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{+\frac{n}{m}+t}\partial x}{(1+x)^{r+t+2}}$$
$$= \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}+r}\partial x}{(1+x)^{r+t+2}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+t}\partial x}{x^{r+t+2}} = \int_0^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x}{x^{r+t+2}}$$
$$= \frac{(m+n)^{t|m}(m-n)^{r|m}}{m^{r+t|m}}\cdot\frac{n}{m}\,\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

4. $$\int_0^1 x^{\frac{n}{m}+t}(1-x)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x = \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}+t}\partial x}{x^{\frac{n}{m}+r}} = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+t}\partial x}{(1+x)^{t-r+2}} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}+r}(1+x)^{t-r+2}}$$
$$= \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+t}\partial x}{x^{t-r+2}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x}{x^{t-r+2}} = (-1)^r\frac{(m+n)^{t|m}.m^r}{n^{r|m}m^t.1^{t-r+1|1}}\,\frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$5.\quad \int_0^1 x^{\frac{n}{m}-t}(1-x)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x=\int_0^1 x^{-\frac{n}{m}+r}(1-x)^{\frac{n}{m}-t}\partial x=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-t}\partial x}{(1+x)^{r-t+2}}=\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}+r}\partial x}{(1+x)^{r-t+2}}$$

$$=\int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-t}\partial x}{x^{r-t+2}}=\int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x}{x^{r-t+2}}=\frac{(m-n)^{r|m}m^t}{m^{t|-m}m^r.1^{r-t+1|1}}\cdot\frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Setzt man $p=\frac{n}{m}+\frac{1}{2}$, $-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}$ statt n und $t+r$ statt r, $r+1$ statt q, so wird mit Rücksicht auf (33. §. 27.)

$$6.\quad \int_0^1 x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}(1-x)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+r}\partial x=\int_0^1 x^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+r}(1-x)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}\partial x=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}\partial x}{(1+x)^{t+r+2}}$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+r}\partial x}{(1+x)^{t+r+2}}=\int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}\partial x}{x^{r+t+2}}=\int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+r}\partial x}{x^{r+t+2}}$$

$$=\frac{(3m+2n)^{t|2m}(m-2n)^{r|2m}}{(2m)^{r+t}\,1^{t+r+1|1}}\cdot\frac{2n+m}{2m}\,\frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi}.$$

Aus (45. §. 41. ergiebt sich, wenn $p=\frac{n}{m}+\frac{1}{2}$, $n=-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}$, $r=-t+1$, $q=r+1$ gesetzt wird, nach (35. §. 27.):

$$7.\quad \int_0^1 x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t}(1-x)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+r}\partial x=\int_0^1 x^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+r}(1-x)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t}\partial x=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t}\partial x}{(1+x)^{r-t+2}}$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+r}\partial x}{(1+x)^{r-t+2}}=\int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t}\partial x}{x^{r-t+2}}=\int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+r}\partial x}{x^{r-t+2}}$$

$$=\frac{(m-2n)^{r|2m}(2m)^t}{(2m)^r(2n+m)^{t|-2m}1^{-t+r|1}}\cdot\frac{(2n+m)\pi}{2m\cos\frac{n}{m}\pi},$$

$$8.\quad \int_0^1 x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}(1-x)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-r}\partial x=\int_0^1 x^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-r}(1-x)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}\partial x=\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}\partial x}{(1+x)^{t-r+2}}$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-r}\partial x}{(1+x)^{t-r+2}}=\int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}\partial x}{x^{t-r+2}}=\int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-r}\partial x}{x^{t-r+2}}$$

$$=(-1)^r\frac{(3m+2n)^{t|2m}(2m)^r}{(m+2n)^{r|2m}(2m)^t\,1^{t-r+1|1}}\cdot\frac{(m+2n)\pi}{2m\cos\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird in (4., 5., 7. und 8.) $r=t$ gesetzt, so erhält man aus (7. und 4.), mit Rücksicht auf (40. §. 27.):

$$9.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t}\partial x}{(1+x)^2} : \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+t}\partial x}{(1+x)^2} = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+t}\partial x}{(1+x)^2} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}-t}}{(1+x)^2}$$

$$= \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+t}\partial x}{x^2} \cdot \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^2(x-1)^{\frac{n}{m}+t}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t}\partial x}{x^2} : \int_0^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+t}}{x^2}$$

$$= -\frac{(2t-1)m-2n}{2(n+tm)} \operatorname{tang} \frac{n}{m}\pi.$$

Eben so giebt (7., 5. und 39. §. 27.)

$$10.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t}\partial x}{(1+x)^2} : \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-t}\partial x}{(1+x)^2} = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+t}\partial x}{(1+x)^2} : \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}+t}}{(1+x)^2}$$

$$= \int_1^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t}\partial x}{x^2} : \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-t}\partial x}{x^2} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+t}\partial x}{x^2} : \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}+t}\partial x}{x^2}$$

$$= \frac{(2t-1)m-2n}{2(n+tm)} \operatorname{tang} \frac{n}{m}\pi.$$

Aus (8. und 5.) folgt für $t = r$, wenn (38. §. 27.) berücksichtigt wird:

$$11.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}\partial x}{(1+x)^2} : \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-t}\partial x}{(1+x)^2} = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-t}\partial x}{(1+x)^2} : \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}+t}\partial x}{(1+x)^2}$$

$$= \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}\partial x}{x^2} : \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-t}\partial x}{x^2} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-t}\partial x}{x^2} : \int_1^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}+t}\partial x}{x^2}$$

$$= -\frac{(2t+1)m+2n}{2(tm-n)} \operatorname{tang} \frac{n}{m}\pi.$$

Aus (8. und 4.) erhält man nach (37. §. 27.):

$$12.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}\partial x}{(1+x)^2} : \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+t}\partial x}{(1+x)^2} = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-t}\partial x}{(1+x)^2} : \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}-t}\partial x}{(1+x)^2}$$

$$= \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t}\partial x}{x^2} : \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+t}\partial x}{x^2} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-t}\partial x}{x^2} : \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^2(x-1)^{\frac{n}{m}+t}}$$

$$= \frac{(2t+1)m+2n}{2(n+tm)} \operatorname{tang} \frac{n}{m}\pi$$

Specielle Fälle ergeben sich hieraus leicht. So ist aus (6. und 7.), für $t = r = 0$ und $t = 1$, $r = 0$:

13. $$\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}\partial x}{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}} = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}\partial x}{(1+x)^2} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)^2 x^{+\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}}$$

$$= \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}\partial x}{x^2} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x}{x^2} = \frac{2n+m}{2m} \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi},$$

14. $$\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x}{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}} = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x}{(1+x)} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)^2 x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}}$$

$$= \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x}{x} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x}{x} = \frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi}.$$

Für $t = r = 1$ erhält man aus (7.):

15. $$\int_0^1 x^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}\partial x = \int_0^1 x^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x}{(1+x)^2}$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}\partial x}{(1+x)^2} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x}{x^2} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}\partial x}{x^2} = \frac{m-2n}{2m} \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi}$$

u. s. w. Aus (12.) findet sich für $t = 0$:

16. $$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}\partial x}{(1+x)^3} : \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}}\partial x}{(1+x)^2} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)^2 x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}} : \int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)^2 x^{\frac{n}{m}}}$$

$$= \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}\partial x}{x^2} : \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x^2} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^2(x-1)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}} : \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^2(x-1)^{\frac{n}{m}}}$$

$$= \frac{m+2n}{2n} \operatorname{tang} \frac{n}{m}\pi.$$

Aus (14. und §. 41., 18. und 19.) ergiebt sich

17. $$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x}{(1+x)^2} : \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{1+x} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}(1+x)^2} : \int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)x^{\frac{n}{m}}}$$

$$= \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}}\partial x}{x^2} : \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{x} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^2.(x-1)^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}}} : \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x-1)^{\frac{n}{m}}}$$

$$= \operatorname{tang} \frac{n}{m}\pi \quad \text{u. s. w.}$$

§. 44.

Aus (1. §. 38.) findet man, wenn $\frac{n}{m} = -\frac{1}{2}$ und $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ gesetzt wird:

1. $$\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}+r}\partial x = \frac{1^{r|2}(m+n)^{t|m}(2m)^{r+t}}{2^r.m^t(m+2n)^{r+t|2m}} \cdot \frac{1}{n+tm} \cdot \frac{1^{-\frac{1}{2}|1}1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}.$$

Wird ferner in der nämlichen Gleichung $\frac{n}{m} = -\frac{1}{2}$, $\frac{p}{q} = -\frac{n}{m}$, $t = q$, $r = s$ gesetzt, so erhält man

2. $$\int_0^1 x^{-n+qm-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}+s}\partial x = \frac{1^{s|2}(m-n)^{q|m}(2m)^{s+q}}{2^s.m^q(m-2n)^{s+q|2m}} \cdot \frac{1}{-n+qm} \cdot \frac{1^{-\frac{1}{2}|1}1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}.$$

Durch Verbindung von (1. und 2.) ergiebt sich in Rücksicht auf die Gleichungen in (§. 26. und 27.):

3. $$\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}+r}\partial x \int_0^1 x^{-n+qm-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}+s}\partial x$$
$$= \frac{1^{r|2}.1^{s|2}(m+n)^{t|m}(m-n)^{q|m}(2m)^{r+t+q+s}}{2^{r+s}m^{t+q}(m+2n)^{r+t|2m}(m-2n)^{s+q|2m}} \cdot \frac{1}{(n+tm)(qm-n)} \cdot \frac{n\pi}{m\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird in (17. §. 38.) $\frac{n}{m} = -\frac{1}{2}$, $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ und ferner $\frac{n}{m} = -\frac{1}{2}$, $\frac{p}{q} = -\frac{n}{m}$, $t = q$, $r = s$ in derselben Gleichung gesetzt und werden die hieraus entstandenen Resultate mit einander verbunden, so ergiebt sich

4. $$\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}-r}\partial x \int_0^1 \frac{x^{-n+qm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{1}{2}+s}}$$
$$= (-1)^{r+s}\frac{(m+n)^{t|m}(m-n)^{q|m}.2^{r+s}(2m)^{t+s-r-q}}{m^{t+q}.1^{r|2}1^{s|2}(m+2n)^{t-r|2m}(m-2n)^{s-q|2m}} \cdot \frac{1}{(n+tm)(qm-n)} \frac{n\pi}{m\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}.$$

Ist $t = r$ und $q = s$, so entsteht hieraus

5. $$\int_0^1 \frac{x^{n+tm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{1}{2}+t}} \int_0^1 \frac{x^{-n+qm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{1}{2}+q}}$$
$$= (-1)^{r+s}\frac{(m+n)^{t|m}(m-n)^{q|m}.2^{r+s}}{1^{r|2}.1^{s|2}.m^{t+q}} \frac{1}{(m+tm)(qm-n)} \frac{n\pi}{m\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird in (22. §. 38.) $\frac{n}{m} = -\frac{1}{2}$, $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ und ferner $\frac{n}{m} = -\frac{1}{2}$, $\frac{p}{q} = -\frac{n}{m}$, $t = q$, $r = s$ in derselben Gleichung gesetzt, so ergiebt sich durch Verbindung der Resultate:

$$6.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}+r}\,\partial x \int_0^1 \frac{\partial x}{x^{n+qm-1}(1-x^m)^{\frac{1}{2}+s}}$$
$$= (-1)^q \frac{1^{r|2}.1^{s|2}m_{t+q}.(2m)^{r+s-t-q}}{2^{r+s}n^{t|-m}.n^{q|m}(m+2n)^{r-t|2m}(m-2n)^{s-q|2m}} \cdot \frac{1}{(n-tm)(-n-qm)} \cdot \frac{n\pi}{m\,\mathrm{tang}\frac{n}{m}\pi}.$$

Für $t=r$, $q=s$ geht (6.) in

$$7.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}+t}\,\partial x \int_0^1 \frac{\partial x}{x^{u+qn+1}(1-x^n)^{\frac{1}{2}+q}}$$
$$= (-1)^{q+t+1} \frac{1^{t|2}1^{s|2}m^{t+q}}{2^{t+q}(m-n)^{t|m}n^{q+1|m}} \cdot \frac{\pi}{m\,\mathrm{tang}\frac{n}{m}\pi}$$

über. Setzt man in (2. §. 38.) $\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$ und $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$, so erhält man hieraus und aus (2. in diesem Paragraph):

$$8.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}+r}\,\partial x \int_0^1 x^{-n+qm-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}+s}\,\partial x$$
$$= \frac{3^{r|2}.1^{s|2}(m+n)^{t|m}(m-n)^{s|m}(2m)^{r+t+q+s}}{2^{r+s}m^{t+s}(3m+2n)^{r+t|2m}(m-n)^{q+s|2m}} \cdot \frac{1}{(n+tm)(qm-n)} \cdot \frac{n\pi}{(m+2n)\,\mathrm{tang}\frac{n}{m}\pi}$$

u. s. w. Setzt man nun in (1. §. 38.) $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$ und ferner $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, $-\frac{n}{m}$ statt $\frac{n}{m}$, $t=q$, $r=s$ in der nämlichen Gleichung und verbindet die Resultate, so ergiebt sich

$$9.\quad \int_0^1 x^{2t}(1-x^2)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 x^{2q}(1-x^2)^{-\frac{n}{m}+s}\,\partial x$$
$$= \frac{3^{t|2}.3^{q|2}(m+n)^{r|m}(m-n)^{s|m}(2m)^{r+t+q+s}}{m^{r+s}2^{t+q}(3m+2n)^{r+t|2m}(3m-2n)^{q+s|2m}} \cdot \frac{1}{(1+2t)(1+2q)} \cdot \frac{nm}{m^2-4n^2} \cdot \frac{\pi}{\mathrm{tang}\frac{n}{m}\pi}$$

Setzt man in (1. §. 38.) $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$ und ferner $\frac{p}{q}=-\frac{1}{2}$, $-\frac{n}{m}$ statt $\frac{n}{m}$, $t=q$ und $r=s$ in derselben Gleichung, so erhält man

$$10.\quad \int_0^1 x^{2t}(1-x^2)^{-\frac{n}{m}+r}\,\partial x \int_0^1 x^{2q-2}(1-x^2)^{-\frac{n}{m}+s}\,\partial x$$
$$= \frac{3^{t|2}.1^{q|2}(m+n)^{r|m}(m-n)^{s|m}(2m)^{r+t+q+s}}{2^{t+q}m^{r+s}(3m+2n)^{r+t|2m}(m-2n)^{q+s|2m}} \cdot \frac{1}{(1+2t)(2q-1)} \cdot \frac{n}{m+2n} \cdot \frac{\pi}{\mathrm{tang}\frac{n}{m}\pi} \quad \text{u. s. w.}$$

Man sieht hieraus, dass sich diese Entwicklungen beliebig fortsetzen lassen; die dann um so allgemeiner sind, da die Grössen t, r, q und s von einander nicht abhangen und beliebig positiv oder negativ genommen werden können. Specielle Fälle lassen sich leicht ableiten.

Wir kehren nun zu der unentwickelten Gleichung (1. §. 38.) zurück. Aus ihr und aus (§. 8. §. 41.) ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$11. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{h+ku-1}(1-x^u)^{\frac{f}{g}+w}\partial x$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{\frac{qn}{m}+qr+q-1}\partial x}{(1+x^q)^{\frac{n}{m}+r+\frac{p}{q}+t+1}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{uf}{g}+uw+u-1}\partial x}{(1+x^u)^{\frac{f}{g}+w+\frac{h}{u}+k+1}} =\int_0^\infty \frac{(x^q-1)^{\frac{n}{m}+r}\partial x}{x^{\frac{qn}{m}+qr+p+tq+1}} \int_0^\infty \frac{(x^u-1)^{\frac{f}{g}+w}\partial x}{x^{\frac{uf}{g}+uw+h+ku+1}}$$

$$= \frac{1}{(p+tq)(h+ku)} \cdot \frac{1^{\frac{p}{q}+t|1}.1^{\frac{n}{m}+r|1}.1^{\frac{h}{u}+k|1}.1^{\frac{f}{g}+w|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+t+r|1}.1^{\frac{h}{u}+\frac{f}{g}+k+w|1}}.$$

Die in diese Gleichung aufgenommenen, unter sich verschiedenen Grössen sind unabhängig von einander und können also willkürlich angenommen werden. Diese Eigenschaft macht die vorstehende Gleichung durch Annahme zweckmässiger Werthe besonders zu Anwendungen tauglich. Setzt man $t=r=k=w=0$ und $\frac{n}{m}=-\frac{1}{2}$, $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$, $\frac{h}{u}=-\frac{n}{m}$, $\frac{f}{g}=-\frac{1}{2}$, so ergiebt sich

$$\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}}\partial x \int_0^1 x^{-n-1}(1-x^m)^{-\frac{1}{2}}\partial x = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1^{-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}.$$

Werden die Gleichungen (21. §. 26., 3. §. 27. und 26. §. 13.) berüchsichtigt, so folgt

$$12. \quad \int_0^1 \frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^m)}} \int_0^1 \frac{\partial x}{x^{n+1}\sqrt{(1-x^m)}} =\int_0^1 \frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^m)}} \int_1^\infty \frac{x^n\partial x}{x\sqrt{(x^m-1)}} = -\frac{\pi}{nm\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}.$$

Auf gleiche Art erhält man für $r=t=w=k=0$, $\frac{p}{q}=-\frac{1}{2}$, $\frac{h}{u}=-\frac{1}{2}$, $\frac{f}{g}=-\frac{n}{m}$ aus (11.):

$$13. \quad \int_0^1 \frac{(1-x^2)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x^2} \int_0^1 \frac{\partial x}{x^2(1-x^2)^{\frac{n}{m}}} =\int_0^1 \frac{(1-x^2)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x^2} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{2n}{m}}\partial x}{(x^2-1)^{\frac{n}{m}}}$$

$$=\int_1^\infty \frac{(x^2-1)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x^{\frac{2n}{m}}} \int_1^\infty \frac{x^{\frac{2n}{m}}\partial x}{(x^2-1)^{\frac{n}{m}}} = \frac{n\pi}{m\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}.$$

Für $t=r=w=0$, $k=1$, $\frac{n}{m}=-\frac{1}{2}$, $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$, $\frac{f}{g}=-\frac{1}{2}$, $\frac{h}{u}=-\frac{n}{m}$ findet sich aus (11.):

$$14.\quad \int_0^1 \frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^m)}} \int_0^1 \frac{x^{m-n-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^m)}} = \int_0^1 \frac{x^{m-n-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^m)}} \int_1^\infty \frac{\sqrt{(x^m)}\,\partial x}{x^{n+1}\sqrt{(x^m-1)}}$$
$$= \frac{2\pi}{m(m-2n)\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}.$$

Diese Gleichung folgt auch aus (3.), wenn $q=1$, $r=s=t=0$. Ist unter den nämlichen Bedingungen, welche für (13.) angenommen wurden, $\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$, so giebt (11.):

$$15.\quad \int_0^1 x^{n-1}\partial x\sqrt{(1-x^m)}\int_0^1 \frac{x^{m-n-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^m)}} = \int_0^1 \frac{x^{m-n-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^m)}} \int_0^1 \frac{\sqrt{(x^m-1)}\,\partial x}{x^{n+1}\sqrt{(x^m)}}$$
$$= \frac{2\pi}{(m+2n)(m-2n)\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird unter den nämlichen Bedingungen auch $\frac{f}{g}=\frac{1}{2}$ gesetzt, so erhält man aus (11.)

$$16.\quad \int_0^1 x^{n-1}\partial x\sqrt{(1-x^m)}\int_0^1 x^{m-n-1}\partial x\sqrt{(1-x^m)}$$
$$= \int_0^1 x^{m-n-1}\partial x\sqrt{(1-x^m)}\int_1^\infty \frac{\sqrt{(x^m-1)}\,\partial x}{x^{n+1}\sqrt{(x^m)}} = \frac{4m\pi}{(m^2-4n^2)(m-2n)\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird $k=\varpi=r=0$, $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, $\frac{h}{u}=\frac{1}{2}$, $\frac{f}{g}=-\frac{n}{m}$ gesetzt, so ergiebt sich aus (11.)

$$17.\quad \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{m}}\partial x\int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{n}{m}}} = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n}{m}}\partial x\int_1^\infty \frac{\sqrt[m]{(x^{2n})}\,\partial x}{x^2(x^2-1)^{\frac{n}{m}}}$$
$$= \frac{nm}{m^2-n^2}\cdot\frac{\pi}{\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}.$$

Diese Gleichung erhält man aus (9.), wenn $t=q=r=s=0$ ist. Setzt man endlich $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, $-\frac{n}{m}$ statt $\frac{n}{m}$, $\frac{h}{u}=\frac{n}{m}$, $\frac{f}{g}=-\frac{1}{2}$, $t=r=k=\varpi=0$, so ist aus (11.):

$$18.\quad \int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{n}{m}}} \int_0^1 \frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^m)}} = \int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{n}{m}}} \int_0^1 \frac{\sqrt{(x^m)}\,\partial x}{x^2\sqrt{(x^m-1)}} = \frac{\pi}{(m-2n)\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}$$

u. s. w. Diese Rechnungen lassen sich nach Belieben weiter fortsetzen.

Andere hieher gehörige Ausdrücke kann man aus (45. §. 41.) ableiten.

Setzt man nämlich in dieser Gleichung zuerst $p = \frac{p}{q}$, $n = \frac{n}{m}$, $r = t$, $q = r$; dann $\frac{p}{q} = \frac{h}{u}$, $\frac{n}{m} = \frac{f}{g}$, $t = k$ und $r = \omega$ und verbindet die Resultate mit einander, so erhält man

$$19. \quad \int_0^1 x^{\frac{p}{q}+t-1}(1-x)^{\frac{n}{m}+r-1}\partial x . \int_0^1 x^{\frac{h}{u}+k-1}(1-x)^{\frac{f}{g}+\omega-1}\partial x$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{p}{q}+t-1}\partial x}{(1+x)^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+t+r}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{h}{u}+k-1}\partial x}{(1+x)^{\frac{h}{u}+\frac{f}{g}+k+\omega}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{p}{q}+t-1}\partial x}{x^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+t+r}} \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{h}{u}+k-1}\partial x}{x^{\frac{h}{u}+\frac{f}{g}+k+\omega}}$$

$$= \frac{1^{\frac{p}{q}+t-1|1} . 1^{\frac{n}{m}+r-1|1} . 1^{\frac{h}{u}+k-1|1} . 1^{\frac{f}{g}+\omega-1|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+t+r-1|1}\ 1^{\frac{h}{u}+\frac{f}{g}+k+\omega-1|1}} .$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich mancherlei andere. Führt man nämlich $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, $t = 0$, $r = 0$, $\frac{h}{u} = -\frac{1}{2}$, $k = 1$, $\frac{f}{g} = -\frac{n}{m}$, $\omega = 0$ ein, so erhält man aus (19.):

$$20. \quad \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}+1}.\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{\sqrt{x}} \int_1^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}}\partial x}{\sqrt{(x(x-1))}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}+1}\partial x} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,\partial x}{\sqrt{(x(x-1))}} = \frac{\pi}{\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi} .$$

Für $\frac{h}{u} = -\frac{1}{2}$, $\frac{p}{q} = -\frac{1}{2}$, $r = 1$, $\frac{f}{g} = -\frac{n}{m}$, $\omega = k$, $t = k = 0$ erhält man

$$21. \quad \int_0^1 \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}}\partial x}{\sqrt{(x^3)}} \int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}}\sqrt{(x^3)}} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}}\partial x}{\sqrt{(x^3)}} \int_1^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}}\sqrt{(x)}\,\partial x}{\sqrt{(1-x^3)}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}}\sqrt{(x^3)}} \int_1^\infty \frac{\sqrt{(x)}\,\partial x}{x^{\frac{n}{m}}\sqrt{(1-x)^3}} = \frac{4n\pi}{m\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi} .$$

Für $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, $\frac{h}{u} = \frac{1}{2}$, $\frac{f}{g} = -\frac{n}{m}$, $t = r = k = \omega = 0$ erhält man

$$22. \quad \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{n}{m}+1}} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{\sqrt{x}} \int_1^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}}\partial x}{\sqrt{(x(x-1))}}$$

$$= -\frac{m}{n} \frac{\pi}{\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi} .$$

Endlich kann man auch Ausdrücke aus den verschiedenen Formen der Integrale ableiten. So ist z. B.

$$23. \quad \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{n}{m}}} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}}\partial x}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{2n}{m}}\partial x}{x^2(x^2-1)^{\frac{n}{m}}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x^2)^{\frac{n}{m}}} \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}}\sqrt{(x(x-1))}} = \frac{m}{m-2n} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{tang}\frac{n}{m}\pi}$$

u. s. w. Von den hieher gehörigen Ausdrücken ist No. 12. von *Plana* (siehe dieses Journ. 17ter Bd. Seite 173.) auf ziemlich mühevolle Weise entwickelt worden. *Legendre* hat den Ausdruck (Exerc. d. calc. intégr. T. I. Pg. 232.) gegeben.

§. 45.

Der besondere Fall (3. §. 33.) giebt, wenn $q = 2$ ist:

$$1. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^2)^n \partial x = \frac{1^{\frac{1}{2}p|1}\, 1^{n|1}}{p.1^{\frac{1}{2}p+n|1}}.$$

Je nachdem nun p eine gerade oder ungerade Zahl ist, erhält man folgende zwei Ausdrücke:

$$2. \quad \int_0^1 x^{2p-1}(1-x^2)^n \partial x = \frac{1^{p|1}\, 1^{n|1}}{2p.1^{p+n|1}},$$

$$3. \quad \int_0^1 x^{2p}(1-x^2)^n \partial x = \frac{1^{n\,1}2^n}{(2p+1)^{n+1|2}} = \frac{2^{n|2}}{(2p+1)^{n+1|2}}.$$

Setzt man $x = \sin x$, so wird $1 - x^2 = 1 - \sin x^2 = (\cos x)^2$ und $\partial x = \cos x \partial x$. Dadurch gehen die vorstehenden Gleichungen in folgende über:

$$4. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{p-1}(\cos x)^{2n+1} \partial x = \frac{1^{\frac{1}{2}p|1}\, 1^{n|1}}{p.1^{\frac{1}{2}p+n|1}} = \frac{2^{n|2}}{p^{n+2|2}},$$

$$5. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2p-1}(\cos x)^{2n+1} \partial x = \frac{1^{p|1}\, 1^{n|1}}{2p.1^{p+n|1}},$$

$$6. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2p}(\cos x)^{2n+1} \partial x = \frac{1^{p+1|2}2^{n|2}}{(2p+1)\,1^{p+n+1|2}}.$$

Hierin können p und n ganze und gebrochene Zahlen sein. Geht p in $\frac{p}{q}$ und n in $\frac{n}{m}$ über, so erhält man aus (4.):

$$7. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{\frac{p}{q}-1}(\cos x)^{\frac{2n}{m}+1} \partial x = \frac{q.1^{\frac{p}{2q}|1}\, 1^{\frac{n}{m}|1}}{p.1^{\frac{p}{2q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Setzt man $2n + 2$ statt p in (4.), so ergiebt sich

$$8. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2n+1} (\cos x)^{2n+1} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{n|1} . \mathbf{1}^{n|1}}{2 . \mathbf{1}^{2n+1|1}},$$

Nun ist $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. Durch Einführung dieses Werthes geht (8.) in

$$9. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin 2x)^{2n+1} \partial x = \frac{2^{2n} . \mathbf{1}^{n|1} \mathbf{1}^{n|1}}{\mathbf{1}^{2n+1|1}}$$

über. Dieses Integral lässt sich auch so darstellen:

$$10. \quad \int_0^{\pi} (\sin x)^{2n+1} \partial x = \frac{2^{2n} \mathbf{1}^{n|1} \mathbf{1}^{n|1}}{\mathbf{1}^{2n+1|1}} .$$

Setzt man $\cos x = \frac{(1+\cos 2x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$, so ergiebt sich aus (4.):

$$11. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{p-1} (1+\cos 2x)^{n+\frac{1}{2}} \partial x = \frac{2^n . \mathbf{1}^{\frac{1}{2}p|1} \mathbf{1}^{n|1}}{p . \mathbf{1}^{\frac{1}{2}p+n}} \sqrt{2}.$$

Für $n = 0$ ist

$$12. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{p-1} \partial x \sqrt{(1+\cos 2x)} = \frac{\sqrt{2}}{p} .$$

Setzt man $x = \cos x$, so ist $1 - x^2 = \sin x^2$ und $\partial x = -\sin x \partial x$ und die Gleichung (1.) geht in

$$13. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos x)^{p-1} (\sin x)^{2n+1} \partial x = -\frac{\mathbf{1}^{\frac{1}{2}p|1} \mathbf{1}^{n|1}}{p . \mathbf{1}^{\frac{1}{2}p+n|1}}$$

oder in

$$14. \quad \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} (\cos x)^{p-1} (\sin x)^{2n+1} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{1}{2}p|1} \mathbf{1}^{n|1}}{p . \mathbf{1}^{\frac{1}{2}p+n|1}}$$

über. Auf diesen Ausdruck lassen sich die obigen Bemerkungen anwenden.

Legt man die Gleichung

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{n-1} \partial x = \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{p-1} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{n-1|1} . \mathbf{1}^{p-1|1}}{\mathbf{1}^{n+p-1|1}}$$

zum Grunde und setzt $x = \sin x$, also $1 - x = \cos x^2$ und $\partial x = 2 \sin \cos x \partial x$, so ergiebt sich

$$14a. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2n-1} \partial x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2n-1} (\cos x)^{2p-1} \partial x = \frac{\mathbf{1}^{n-1|1} \mathbf{1}^{p-1|1}}{2 . \mathbf{1}^{n+p-1|1}} .$$

Führt man die weiter oben benutzten Werthe ein, so ergeben sich die nämlichen Resultate. Für $n = \frac{1}{2}$ giebt (14.)

$$15. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2p-1} \partial x = \frac{2^{p-1|2}}{\mathbf{1}^{p|2}} = \frac{2^{2p-1} . \mathbf{1}^{p-1|1} . \mathbf{1}^{p-1|1}}{\mathbf{1}^{2p-1|1}}$$

u. s. w.

Sind die Grössen p und n Brüche, so lassen sich die Integrale wieder durch Kreisfunctionen darstellen. Wird $\frac{2n}{m}$ statt p und $-\frac{n}{m}$ statt n in (4.) gesetzt, so erhält man

$$16. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{\frac{2n}{m}-1} (\cos x)^{-\frac{2n}{m}+1} \partial x = \frac{\pi}{2 \sin \frac{n}{m}\pi} .$$

Legt man die Gleichung

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n+1} \partial x}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}p+1}} = \frac{\mathbf{1}^{\frac{1}{2}p|1} . \mathbf{1}^{n|1}}{p . \mathbf{1}^{\frac{1}{2}p+n|1}}$$

zum Grunde und setzt darin $x = \text{tang}\, x$, so ist $1 + x^2 = \sec x^2$ und $\partial x = \sec x^2 \partial x$. Dies giebt

$$17. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\text{tang}\, x)^{2n+1} \partial x}{(\sec x)^{n+\frac{1}{2}p}} = \frac{\mathbf{1}^{\frac{1}{2}p|1} \mathbf{1}^{n|1}}{p . \mathbf{1}^{\frac{1}{2}p+n|1}} = \frac{\mathbf{2}_{n|2}}{p^{n+1|2}} .$$

Wird $2p$ und $2p + 1$ statt p gesetzt, so erhält man

$$18. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\text{tang}\, x)^{2n+1} \partial x}{(\sec x)^{n+p}} = \frac{\mathbf{1}^{p|1} \mathbf{1}^{n|1}}{2p . \mathbf{1}^{p+n|1}} ,$$

$$19. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\text{tang}\, x)^{2n+1} \partial x}{(\sec x)^{n+p+\frac{1}{2}}} = \frac{\mathbf{1}^{p+1|2} . \mathbf{1}^{n|1} \mathbf{2}^n}{(2p+1)^{p+n+1|2}} .$$

Wird $-\frac{n}{m}$ statt n und $\frac{2n}{m}$ statt p gesetzt, so geht (17.) in

$$20. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial x}{(\text{tang}\, x)^{\frac{2n}{m}-1}} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{n}{m}\pi}$$

über. Setzt man in (17.) $2n + 2$ statt p, so erhält man

$$21. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\text{tang}\, x)^{2n+1} \partial x}{(\sec x)^{2n+1}} = \frac{\mathbf{1}^{n|1} \mathbf{1}^{n|1}}{2 . \mathbf{1}^{2n+1|1}} ,$$

oder da $\frac{\text{tang}\, x}{\sec x} = \frac{1}{\sec x \cot x}$ ist,

$$22. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial x}{(\text{cosec}\, x)^{2n+1}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial x}{(\sec x \cot x)^{2n+1}} = \frac{\mathbf{1}^{n|1} . \mathbf{1}^{n|1}}{2 . \mathbf{1}^{2n+1|1}} .$$

Für $p = 2$ wird aus (17.)

$$23. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\text{tang}\, x)^{2n+1} \partial x}{(\sec x)^{n+1}} = \frac{\mathbf{1}}{2(n+1)} .$$

Für $n = \frac{1}{2}$ wird hieraus

$$24. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\text{tang}\, x)^2}{(\sec x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3} .$$

Setzt man in der Gleichung

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} \partial x}{(1+x)^{n+p}} = \frac{\mathbf{1}^{n-1|1} \mathbf{1}^{p-1|1}}{\mathbf{1}^{n+p-1|1}}$$

$x = \text{tang}\, x^2$, so ist $1 + x = \sec x^2$ und $\text{tang}\, x^2 = 2 \text{tang}\, x \sec x^2 \partial x$, und man erhält

$$25. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\operatorname{tang} x)^{2n-1}\,\partial x}{(\sec x)^{2n+2p-2}} = \frac{1^{n-1|1}.1^{p-1|1}}{2.1^{p+n-1|1}}.$$

Ist $n = \frac{1}{2}$, so wird hieraus

$$26. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial x}{(\sec x)^{2p-1}} = \frac{2^{p-1|2}}{1^{p|2}} \quad \text{u. s. w.}$$

§. 46.

In den bisherigen Untersuchungen wurden Integrale, die aus *zwei* Functionen bestehen, dargestellt. Man kann die bisher gefundenen Resultate auch benutzen, um durch sie die Integrale von Ausdrücken darzustellen, die aus *drei* Functionen zusammengesetzt sind. Dies wird geschehen können, wenn sich nach der üblichen Methode eine von den angegebenen Functionen in eine Reihe nach den Potenzen der veränderlichen Grösse entwickeln lässt. Ist solches geschehen, werden die beiden andern Functionen mit den Gliedern dieser Reihe verbunden, und ergeben sich durch Integration der einzelnen Ausdrücke selbst wieder Reihen, die summirbar sind, so ist die Aufgabe gelöset.

Um dieses Verfahren anzuwenden, soll die Darstellung des Integrals

$$\int_h^k f(x)\, f(y)\, f(z)\, \partial x$$

als Aufgabe vorgelegt werden, wo $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$ Functionen von x sind.

Es sind folgende Fälle möglich:

$$1. \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

$$2. \quad f(y) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots.$$

$$3. \quad f(z) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots.$$

Daraus ergeben sich folgende drei Ausdrücke:

$$4. \quad \int_h^k f(x)\, f(y)\, f(z)\, \partial x$$
$$= c_0 \int_h^k f(x) f(y)\, \partial x + c_1 \int_h^k f(x) f(y)\, x\, \partial x + c_2 \int_h^k f(x)\, f(y)\, x^2\, \partial x \ldots.$$

$$5. \quad \int_h^k f(x)\, f(y)\, f(z)\, \partial x$$
$$= b_0 \int_h^k f(x)\, f(z)\, \partial x + b_1 \int_h^k f(x) f(z)\, x\, \partial x + b_2 \int_h^k f(x)\, f(z)\, x^2\, \partial x \ldots.$$

$$6. \quad \int_h^k f(x)\, f(y)\, f(z)\, \partial x$$
$$= a_0 \int_h^k f(x)\, f(z)\, \partial x + a_1 \int_h^k f(y)\, f(z)\, x\, \partial x + a_2 \int_h^k f(y)\, f(z)\, x^2\, \partial x \ldots.$$

Wie man sieht, ist diese Methode nicht allgemein anwendbar und kann

also auch nicht zur allgemeinen Regel erhoben werden; ihr Gebrauch ist beschränkt. Sie wird jedoch in manchen Fällen gute Dienste thun.

Es sei das Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x (\lg x)^r$$

darzustellen. In diesem Falle ist, wenn man in **(6.)** $f(x) = (1-x^q)^n$ setzt:

$$(1-x^q)^n = 1 - nx^q + (n)_2 x^{2q} - (n)_3 x^{3q} + (n)_4 x^{4q} - \ldots.$$

Dies giebt

$$7. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x (\lg x)^r$$
$$= \int_0^1 x^{p-1}(\lg x)^r \partial x - n\int_0^1 x^{p+q-1}(\lg x)^r \partial x + (n)_2 \int_0^1 x^{p+2q-1}(\lg x)^r \partial x - \ldots.$$

die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen können nach **(13. §. 33.)** integrirt werden. Man erhält

$$8. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^r \partial x (\lg x)^r$$
$$= (-1)^r . 1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}} - n\frac{1}{(p+q)^{r+1}} + (n)_2 \frac{1}{(p+2q)^{r+1}} - (n)_3 \frac{1}{(p+3q)^{r+1}} + \ldots.\right).$$

Wie man sieht bilden die Glieder der in Klammern eingeschlossenen Reihe den $n$ten Unterschied von $\frac{1}{p^{r+1}}$; jedoch in umgekehrter Ordnung, wenn die Zunahme q ist. Demnach lässt sich die vorstehende Gleichung auch so darstellen:

$$9. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x (\lg x)^r = (-1)^{r+n} . 1^{r|1} . \Delta^n \frac{1}{p^{r+1}},$$

unter der Voraussetzung, dass q die Zunahme von p ist. Unterscheidet man gerade und ungerade n, so erhält man für ein *gerades* n folgenden Ausdruck:

$$10. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x (\lg x)^r = (-1)^r \, 1^{r|1} \, \Delta^n \frac{1}{p^{r+1}},$$

und für ein *ungerades* n:

$$11. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x (\lg x)^r = (-1)^{r+1} \, 1^{r|1} \, \Delta^n \frac{1}{p^{r+1}}.$$

Der Ausdruck **(7.)** lässt sich auch dadurch umformen, dass man die Integrale rechts vom Gleichheitszeichen auf das Integral $\int_0^1 x^{p-1}(\lg x)^r \partial x$ bringt. Nach **(13. §. 33.)** ist nämlich

$$\int_0^1 x^{p-1}(\lg x)^r \partial x = (-1)^r \cdot \frac{1^{r|1}}{p^{r+1}}.$$

Bringt man diesen Werth mit **(8.)** in Verbindung, so erhält man

$$12.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,(\lg x)^r\,\partial x$$
$$=\int_0^1 x^{p-1}(\lg x)^r\,\partial x\Big[\frac{p^{r+1}}{p^{r+1}} - n\Big(\frac{p}{p+q}\Big)^{r+1} + (n)_2\Big(\frac{p}{p+2q}\Big)^{r+1} - (n)_3\Big(\frac{p}{p+3q}\Big)^{r+1} + \ldots.\Big]$$

oder

$$13.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,(\log x)^r\,\partial x = (-1)^n p^{r+1}\Delta^n \frac{1}{p^{r+1}}\int_0^1 x^{p-1}(\lg x)^r\,\partial x.$$

Diese Gleichung lässt sich in eine etwas allgemeinere Reductionsformel verwandeln, wenn man $r+t$ statt r setzt. Dies giebt

$$14.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n(\lg x)^{r+t}\,\partial x = (-1)^n(r+1)^{t|1}\cdot p^{r+t+1}\Delta^n \frac{1}{p^{r+t+1}}\int_0^1 x^{p-1}(\lg x)^r\,\partial x.$$

Auf gleiche Weise lässt sich das Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,(\lg \frac{1}{x})^n\,\partial x$$

darstellen. Es ist

$$15.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n(\lg \frac{1}{x})^r\partial x = \int_0^1 x^{p-1}(\lg \frac{1}{x})^r\partial x - \int_0^1 x^{p+q-1}(\lg \frac{1}{x})^r\partial x$$
$$+ (n)_2\int_0^1 x^{p+2q-1}(\lg \frac{1}{x})^r\partial x - (n)_3\int_0^1 x^{p+3q-1}(\lg \frac{1}{x})^r\partial x \ldots.$$

Benutzt man die Gleichung (14. §. 33.), so ergiebt sich

$$16.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,(\lg \frac{1}{x})^r\,\partial x$$
$$=\frac{1^{r|1}}{p^{r+1}} - n\frac{1^{r|1}}{(p+q)^{r+1}} + (n)_2\frac{1^{r|1}}{(p+2q)^{r+1}} - (n)_3\frac{1^{r|1}}{(p+3q)^{r+1}}.$$

Hieraus erhält man, aus den nämlichen Gründen wie oben:

$$17.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,(\lg \frac{1}{x})^r\,\partial x = (-1)^u 1^{r|1}\Delta^n \frac{1}{p^{r+1}}.$$

Die Zunahme in diesem Ausdruck ist q. Auch dieses Integral kann auf die Form $\int_0^1 x^{p-1}(\lg \frac{1}{x})^r\,\partial x$ gebracht werden. Es ergiebt sich auf die angegebene Weise

$$18.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,(\lg \frac{1}{x})^r = (-1)^n p^{r+1}\Delta^n \frac{1}{p^{r+1}}\int_0^1 x^{p-1}\,(\lg \frac{1}{x})^r\,\partial x,$$

$$19.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,(\lg \frac{1}{x})^{r+t}$$
$$=(-1)^n p^{r+t+1}(r+1)^{t|1}\Delta^n \frac{1}{p^{r+t+1}}\int_0^1 x^{p-1}\,(\lg \frac{1}{x})^r\,\partial x.$$

Aus diesen Formeln zeigt sich, dass die bestimmten Integrale vorstehender Art mit der Entwicklung der Unterschiede der Potenzialfunctionen mit negativen Exponenten in engem Zusammenhange sind und dass die Ausbildung der Theorie letzterer von Nutzen für die ersteren ist. Da oben die allgemeinen

Entwicklungsformeln zur Darstellung der Unterschiede gegeben wurden, wenn der Exponent eine ganze oder gebrochene positive oder negative Zahl ist, so ist dadurch die Darstellung der Integrale von vorstehender Form schon ermittelt.

Setzt man in den Ausdruck $(-1)^n \Delta \frac{1}{p^{r+1}}$, welcher in (9.) vorkommt, für n eine negative gebrochene Zahl, so könnte es scheinen, dass derselbe in bestimmten Fällen auf einen imaginären Werth führe. Dem ist jedoch nicht so; wie sich zeigen wird. Setzt man nämlich $X = \frac{1}{x^k}$ in (1. §. 19.), so ist bekanntlich

$$20. \qquad \frac{\partial^r X}{(\partial x)^r} = (-1)^r k^{r|1} \frac{1}{x^{k+r}} .$$

Schreibt man nun q statt Δx und benutzt die Gleichung (20.) für die Werthe n, $n+1$, $n+2$, ..., so ergiebt sich für den $n$ten Unterschied von $\frac{1}{x^k}$ folgender Ausdruck:

$$21. \qquad \Delta^n \frac{1}{x^k} = (-1)^n \Big(\frac{k^{n|1} q^n}{x^{k+n}} - \frac{SC^1(1,2,....n)^1}{n+1} \cdot \frac{k^{n+1|1} q^{n+1}}{x^{k+n+1}} + \frac{SC^1(1,2,....n)^2}{(n+1)^{2|1}} \cdot \frac{k^{n+2|1} q^{n+2}}{x^{k+n+2}} - \frac{SC^1(1,2,....n)^3}{(n+1)^{3|1}} \cdot \frac{k^{n+3|1} q^{n+3}}{x^{k+n+3}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \Big)$$

Schreibt man hierin p statt x und der Kürze wegen A_1, A_2, A_3, ... für die Ausdrücke, auf welche die Verbindungen mit Wiederholungen zu den verschiedenen Classen nach (§. 9.) führen, so ist

$$22. \qquad (-1)^n \Delta^n \frac{1}{p^k} = \frac{k^{n|1} q^n}{p^{k+n}} - A_1 \frac{k^{n+1|1} q^{n+1}}{p^{k+n+1}} + A_2 \frac{k^{n+2|2} q^{n+2}}{p^{k+n+2}} + ...$$

Es zeigt sich, dass der Ausdruck in (9.) unter den vorstehenden Bedingungen reelle Werthe giebt. Setzt man in (9.) $r = 0$, so ergiebt sich folgende bemerkenswerthe Relation:

$$22a. \qquad (-1)^n \Delta^n \frac{1}{p} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1} 1^{n|1}}{p . 1^{\frac{p}{q}+n|1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p(n+1)^{\frac{p}{q}|1}} .$$

Zur Darstellung der Werthe von $\Delta^n \frac{1}{p^k}$ können die weiter oben, oder auch die hier in (8. und 16.) aufgestellten Ausdrücke benutzt werden. Sie convergiren schnell, wenn p eine nicht ganz kleine Zahl ist. Von dem Verhältnisse von p und q zu einander hangt die Anwendbarkeit der verschiedenen hier gefundenen Formeln ab.

Euler hat (Integr.-Rechnung 4ter Thl. §. 131. u. s. w.) gezeigt, dass

$$\textbf{23.}\qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt[m]{(1-x^m)^{m-q}}} \int_0^1 \frac{x^{p+q-r}-x^{p+1}\,\partial x}{1-x^m} = \int_0^1 \frac{x^{p-1}\lg x\partial x}{\sqrt[p]{(1-x^m)^{m-q}}}$$

ist, und hat sich dann mit Ermittlung der Werthe für mehrere specielle Fälle dieser Gleichung beschäftigt. Dies soll hier benutzt werden, um einige Folgerungen daraus zu ziehen. Setzt man nämlich in (28.) $m = 2$, $p = 1$ und $p = 1$, $q = 2$, $r = 1$, $n = -\frac{1}{2}$ in (9.), so erhält man

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{\sqrt{(1-x^2)}}\partial x = -\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} \int^1 \frac{\partial x}{1+x} = (-1)^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1^2}\right).$$

Nun ist $\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2}\pi$ und $\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x} = \lg 2$, also ist

$$\int_0^1 \frac{\lg x}{\sqrt{(1-x^2)}}\partial x = -\tfrac{1}{2}\pi \lg 2.$$

Hieraus folgt ferner, dass

$$\textbf{24.}\qquad \tfrac{1}{2}\pi \lg 2 = \frac{1}{(-1)^{\frac{1}{2}}}\Delta^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1}\right),$$

wenn die Zunahme des Unterschiedes 2 ist. Es ist ferner unter den nämlichen Bedingungen, wenn $p = 2$ gesetzt wird,

$$\int_0^1 \frac{x\lg x}{\sqrt{(1-x^2)}}\partial x = -\int_0^1 \frac{x\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} \int_0^1 \frac{x\partial x}{1+x} = \lg 2 - 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x}{\sqrt{(1-x^2)}}\partial x = (-1)^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^2}\right),$$

und hieraus

$$\textbf{25.}\qquad 1 - \lg 2 = \frac{1}{(-1)^{\frac{1}{2}}}\Delta^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^2}\right),$$

wenn 2 die Zunahme des Unterschiedes ist. Diese Rechnungen lassen sich leicht weiter fortsetzen. Die Richtigkeit der Schlüsse bestätigt sich durch die Rechnung.

Obgleich die Gleichung (17.) ganz allgemein für jedes beliebige n gilt, und also der Werth von $\Delta^n \frac{1}{p^{r+1}}$ nach dem Frühern gefunden werden kann, so lässt sich doch der Fall, wenn $n = -1$ gesetzt wird, auf schon bekannte Werthe bringen. Die Reihe in (6.) fällt dann mit den reciproken Potenzen-Reihen zusammen. Man erhält

$$\textbf{26.}\qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1}(\lg \frac{1}{x})^r}{1-x^q}\partial x = -1^{r|1}\Delta^{-1}\frac{1}{p^{r+1}} = 1^{r|1}\left(\frac{1}{p^{r+1}} + \frac{1}{(p+q)^{r+1}} + \frac{1}{(p+2q)^{r+1}} + \ldots\right)$$

Bezeichnet man die reciproken Potenzen-Reihen durch

$$S_{p,q}^{(n)} = \frac{1}{p^n} + \frac{1}{(p+q)^n} + \frac{1}{(p+2q)^n} + \cdots$$

so ist

$$27. \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1} \lg(\frac{1}{x})^r}{1-x^q} = 1^{r|1} S_{p,q}^{(r+1)} .$$

Hieraus erhält man

$$28. \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1} \lg(\frac{1}{x})^r}{1-x} \partial x = 1^{r|1} S_{p,1}^{(r+1)} = -1^{r|1} \Delta^{-1} \frac{1}{p^{r+1}} ,$$

wenn die Zunahme des Unterschiedes 1 ist. In so weit nun die Werthe für $S_{p,q}^{(n)}$ in (§. 23.) angegeben sind, kennt man auch die Werthe des vorstehenden Integrals. Ist $q = 2$, so hat man

$$29. \quad \int_0^1 \frac{x^{p-1} \lg(\frac{1}{x})^r}{1-x^2} = 1^{r|1} S_{p,2}^{(r+1)} = -1^{r|1} \Delta^{-1} \frac{1}{p^{r+1}},$$

wenn die Zunahme 2 ist. Die Werthe vieler hierher gehörigen Reihen finden sich in *Euler*'s Analysis (10tes Capitel) dargestellt.

(Der Schluss folgt.)

12.

De pendulis sphaericis, et de curvis, quae ab ipsis describuntur sphaericis.

(Auctore Dr. *Christoph. Gudermann*, math. prof. ord. Monast. Guestph.)

1.

Si punctum quoddam grave M filo suspensum OM in puncto quodam fixo O, circa lineam OZ verticalem movetur, punctum mobile M hoc modo coniunctum cum puncto fixo O describit curvam in superficie sphaerae sitam, et punctum fixum O est huius sphaerae centrum; radius vero sphaerae est fili longitudo $OM = l$. Quamobrem *pendulum* ipsum OM dicimus *sphaericum*, et angulum plerumque variabilem $ZOM = E$ dicimus penduli *elongationem*. Si elongantio haec constans est, punctum mobile M describit circulum minorem horizontalem, cuius radius est $l.\sin E$, et cuius radius sphaericus ipsa elongatio E est, et quidem motu uniformi nunc describit circulum hunc. Id, quando eveniat, facillime eruitur. A puncto mobili M demittamus lineam perpendicularem MR in verticalem OZ, erit $MR = l\sin E$ radius circuli describendi. Sit $k.l$ celeritas, qua punctum movetur in plano horizontali, et ipsius directio angulos faciat rectos cum plano MOZ, sive cum lineis MO et MR; vis centrifuga puncti mobilis M erit in directione radii RM aequalis quotienti $\frac{(kl)^2}{RM} = \frac{(kl)^2}{l\sin E}$. Si haec vis esset unica, elongatio E augeretur. Gravitas vero puncti M est vis verticalis ipsum deprimens; quae si in partibus radii l est g, ut revera sit gl, e duabus his viribus oritur composita N; quae ut sit in directione fili OM, componentium ratio = tang E esse debet. Quare habes aequationem conditionalem

$$1. \qquad \frac{k^2}{gl\sin E} = \text{tang } E, \quad \text{sive} \quad k = \sin E\sqrt{\frac{g}{\cos E}},$$

qua determinatur celeritas initialis et constans ea, ut punctum mobile M describat circulum minorem, sive ut elongatio penduli E non mutetur.

Vis composita N, quae est in directione fili OM, invenitur $= \frac{(kl)^2}{l \sin E} . \sin E + gl . \cos E$, sive

$$2. \qquad N = l(k^2 + g . \cos E) = \frac{gl}{\cos E}.$$

Si vero punctum mobile M movetur celeritate initiali kl, quae maior est modo inventa $l \sin E \sqrt{\frac{g}{\cos E}}$, vis centrifuga praepollebit et elongatio E augebitur, unde sequitur, celeritatem puncti mutari. Si e contra celeritas initialis kl minor est inventa $l \sin E . \sqrt{\frac{g}{\cos E}}$, praepollebit puncti gravitas gl, et elongatio E minuetur; unde sequitur, etiam celeritatem primitivam mutari. Si T est tempus, quo praeterito punctum mobile M totam peripheriam $2\pi l \sin E$ descripsit, erit $kl . T = 2\pi l \sin E$, ideoque

$$3. \qquad T = 2\pi . \sqrt{\frac{\cos E}{g}}.$$

Haec pauca sufficiant de *pendulo constantis elongationis sphaerico*, et ad disquisitionem penduli sphaerici, cui est elongatio *variabilis*, procedentes supponimus, celeritatem primitivam sive initialem kl esse eam, ut sit

$$k \leqq \sin E . \sqrt{\frac{g}{\cos E}}.$$

2.

Sint x_1, y_1, z_1 tres lineae coordinatae rectangulares puncti mobilis M, parallelae tribus axibus OX, OY, OZ (rectangularibus), quarum ultima OZ sit simul gravitatis directio. Quia M est punctum superficiei sphaericae, cuius centrum est punctum suspensionis O, coordinatae tres satisfacient aequationi

$$1. \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = l^2,$$

et filum OM cum tribus axibus facit angulos tales, ut sit:

$$\cos MOX = \frac{x_1}{l}, \qquad \cos MOY = \frac{y_1}{l}, \qquad \cos MOZ = \frac{z_1}{l}.$$

Si iterum N est vis in directione fili, quae tendit filum, vel, quod idem est, quae remoto filo punctum mobile M normaliter premit versus sphaerae superficiem internam, vis haec decomponitur in vires laterales tres

$$N . \cos MOX = \frac{x_1}{l} . N, \qquad N \cos MOY = \frac{y_1}{l} . N, \qquad N \cos MOZ = \frac{z_1}{l} . N,$$

punctum M propellentes in directionibus, quae parallelae sunt axibus OX, OY, OZ.

Quare vires eiusdem magnitudinis oppositae punctum mobile in sphaerae superficie retinebunt dum, gravitas, quae iterum sit $g.l$, celeritatem puncti M in directione ultima augebit. Quare si t est tempus inde ab initio motus praeteritum, valent aequationes tres:

$$\mathbf{2.}\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -\frac{x_1}{l}.N, \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = -\frac{y_1}{l}N, \\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = -\frac{z_1}{l}.N + g.l, \end{cases}$$

ita constructae, ut filum OM nunc sit superfluum, quia ipsius loco vis N applicanda mobile punctum in sphaerae superficie retinebit, dummodo vis N agit in directione MO.

Ex aequatione (1.) differentiando obtines $x_1\partial x_1 + y_1\partial y_1 + z_1\partial z_1 = 0$, et si differentiale arcus a puncto M descripti est $l.\partial s = \sqrt{(\partial x_1^2 + \partial y_1^2 + \partial z_1^2)}$, iterata differentiatione invenis

$$l^2.\partial s + x_1\partial^2 x_1 + y_1\partial^2 y_1 + z_1\partial^2 z_1 = 0, \quad \text{et}$$
$$l^2\partial s.\partial^2 s = \partial x_1\partial^2 x_1 + \partial y_1\partial^2 y_1 + \partial z_1\partial^2 z_1.$$

Quia ex aequationibus (2.) componitur

$$\frac{\partial x_1\partial^2 x_1 + \partial y_1\partial^2 y_1 + \partial z_1\partial^2 z_1}{\partial t^2} = -\frac{x_1\partial x_1 + y_1\partial y_1 + z_1\partial z_1}{l}.N + gl.\partial z_1, \quad \text{est}$$

$$\frac{l^2.\partial s\partial^2 s}{\partial t^2} = gl.\partial z_1, \quad \text{sive} \quad \frac{2l^2.\partial s.\partial^2 s}{\partial t^2} = 2gl\partial z_1; \quad \text{quare integrando:}$$

$$\mathbf{3.}\quad \left(\frac{l\partial s}{\partial t}\right)^2 = e.l^2 + 2glz_1,$$

si $e.l^2$ est quantitas constans ab integratione hac originem ducens, quam mox determinabus. Quia $\frac{l.\partial s}{\partial t} = c.l$ est celeritas puncti mobilis M, valet aequatio

$$\mathbf{4.}\quad c = \sqrt{(e + \frac{2gz_1}{l})}.$$

Ex iisdem aequationibus (2.) componimus alio modo

$$\frac{x_1\partial^2 x_1 + y_1\partial^2 y_1 + z_1\partial^2 z_1}{\partial t^2} = -\frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{l}.N + glz_1, \quad \text{quae reducitur ad}$$

$$-\frac{l^2\partial s^2}{\partial t^2} = -l.N + glz_1; \quad \text{quare est}$$

$$\mathbf{5.}\quad N = l.c^2 + gz_1 = e.l + 3gz_1.$$

Formula hac determinatur vis N, quae tendit filum OM, vel quae remoto filo punctum mobile M premit versus sphaerae superficiem internam.

Ex aequationum (2.) duabus primis eliminatione huius N oritur denique $\frac{x_1 \partial^2 y_1 - y_1 \partial^2 x}{\partial t} = 0$, cuius integralis est

$$6. \qquad \frac{x_1 \partial y_1 - y_1 \partial x_1}{\partial t} = h \,.\, l^2,$$

si $h \,.\, l^2$ est alia quantitas constans ab integratione hac originem ducens.

3.

Ulteriorem calculum instituamus adhibitis coordinatis sphaericis $l \,.\, x$ et $l \,.\, y$, quem in finem ponamus

$$1. \qquad \frac{y_1}{x_1} = \text{tang } x \quad \text{et} \quad z_1 = l \,.\, \sin y,$$

vel, quod eodem redit, $x_1 = l \cos y \,.\, \cos x$, $y_1 = l \cos y \sin x$, $z_1 = l \sin y$. Linea abscissarum $l \,.\, x$ nunc est circulus maximus, et applicata $l \,.\, y$ descendens a circulo hoc maximo, et quidem in fine abscissae $l \,.\, x$ usque ad punctum M, angulum rectum facit cum abscissa hac. Arcus y est insuper complementum elongationis variabilis E, sive vice versa

$$2. \qquad E = \tfrac{1}{2}\pi - y.$$

Quia invenis ex aequatione prima $\partial x = \frac{x_1 \partial y_1 - y_1 \partial x_1}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x_1 \partial y_1 - y_1 \partial x_1}{l^2 \,.\, \cos^2 y}$, aequatio (6.) articuli praecedentis fit simplicior haec:

$$3. \qquad \cos^2 y \,.\, \partial x = h \,.\, \partial t$$

et pariter aequationes reliquae nunc fiunt:

$$4. \qquad c = \frac{\partial s}{\partial t} = \sqrt{(e + 2g \sin y)},$$

$$5. \qquad N = l(e + 3g \sin y).$$

Quare eliminatione differentialis ∂t oritur

$$h \,.\, \partial s = \partial x \,.\, \cos^2 y \sqrt{(e + 2g \sin y)},$$

et si utimur formula e praeceptis Geometria sphaericae notissima $\partial s = \sqrt{(\partial y^2 + \cos^2 y \,.\, \partial x^2)}$, invenimus aequationem integrabilem

$$6. \qquad \partial x = \frac{\pm h \partial y}{\cos y \sqrt{[(e + 2g \sin y) \cos^2 y - h^2]}},$$

quae est ipsius curvae a puncto mobili M descriptae aequatio differentialis quaesita. Quum aequatio haec non pendet a spharae radio l, ipsa simul pertinet ad curvam proiectam in sphaerae superficiem eam, cuius radius est longitudinum unitas.

Sed ante omnia nunc determinentur quantitates duae constantes e et h, quem in finem supponamus, punctum mobile M in initio temporis t fuisse in puncto quodam A ita sito, ut sit abscissa $x = 0$ et applicata $y = a$, et e puncto hoc propulsum esse celeritate quadam data $k \,.\, l$ in directione, quae angulos rectos faciat cum plano MOZ. Quia puncti A lineae coordinatae e datis $x = 0$ et $y = a$ inveniuntur

$$x_1 = l \cos a, \qquad y_1 = 0, \qquad z_1 = l \sin a,$$

et quia insuper $\frac{\partial x_1}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial y_1}{\partial t} = k \,.\, l$ et $\frac{\partial z_1}{\partial t} = 0$, ideoque $c = k$ est, substitutis valoribus his particularibus inveniuntur formulae simplices:

$$7. \qquad e = k^2 - 2g \sin a,$$

$$8. \qquad h = k \cos a.$$

Elongatio penduli initialis igitur est $\frac{1}{2}\pi - a$ et celeritas initialis est $k \,.\, l$; e datis igitur his computantur duae quantitates constantes e et h, quorum signa nihilominus brevitatis causa retinebimus.

4.

Sit Θ angulus non obtusus, quem circulus maximus curvam tangens in M, facit cum applicata y eiusdem puncti, quem angulum e praeceptis Geometriae sphaericae determinari formula $\operatorname{tang} \Theta = \pm \frac{\cos y \,.\, \partial x}{\partial y}$ notissimum est. Ex aequatione (6.) articuli praecedentis concludimus

$$1. \qquad \begin{cases} \operatorname{tang} \Theta = \dfrac{h}{\sqrt{[(e+2g\sin y)\cos^2 y - h^2]}}, & \text{ideoque} \\ \sin \Theta = \dfrac{h}{\cos y \sqrt{(e+2g\sin y)}}. \end{cases}$$

Vertices curvae dicimus puncta ea, quorum angulus Θ est rectus, et quia ratio $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ in iisdem punctis est, applicatae horum punctorum sunt aut maxima aut minima, et determinantur aequatione

$$\cos y \sqrt{(e + 2g \sin y)} = h,$$

quae evoluta fit aut

$$2. \qquad \cos^6 y - \frac{4g^2 - e^2}{4g^2} \cos^4 y - \frac{h^2 e}{2g^2} \cos^2 y + \frac{h^4}{4g^2} = 0,$$

aut

$$3. \qquad \sin^3 y + \frac{e}{2g} \sin^2 y - \sin y + \frac{h^2 - e}{2g} = 0,$$

prout aut $\cos y$ aut $\sin y$ habere vis quantitatem incognitam. Aequatio haec,

si $\frac{2g}{e} = \frac{k^2}{2g} - \sin\alpha$ et $\frac{h^2-e}{2g} = \sin\alpha(1 - \frac{k^2}{2g}\sin\alpha)$ quantitates positivas esse volumus, monstrat, duas ipsius radices esse positivas, et tertiam radicem esse negativam.

Radicem unam noscimus $\sin y = \sin\alpha$, et si duae reliquae sunt μ et $-\mu'$, valent relationes

$$\frac{e}{2g} = \mu' - \mu - \sin\alpha, \qquad \frac{h^2-e}{2g} = \mu.\mu'\sin\alpha,$$
$$1 = (\mu + \sin\alpha)\mu' - \sin\alpha,$$

quarum prima reducitur ad

$$\mu' - \mu = \frac{k^2}{2g}, \text{ et altera ad } \mu\mu' = 1 - \frac{k^2}{2g}\sin\alpha,$$

ita ut radices μ et μ' exprimantur formulis

$$4. \qquad \mu = \frac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}-k^2}{4g},$$

$$5. \qquad \mu' = \frac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}+k^2}{4g},$$

quae satisfacient relationi tertiae

$$6. \qquad \mu' = \frac{1+\mu\sin\alpha}{\mu+\sin\alpha}.$$

Quia enim

$$\mu + \sin\alpha = \frac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}-(k^2-4g\sin\alpha)}{4g}, \quad \text{et}$$

$$1 + \mu\sin\alpha = \frac{\sin\alpha\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}+4g-k^2\sin\alpha}{4g},$$

e formula (4.) substituendo componis, est

$$\frac{1+\mu\sin\alpha}{\mu+\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}+4g-k^2\sin\alpha}{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}-(k^2-4g\sin\alpha)},$$

quae fractio, si simul ipsius numeratorem et denominatorem multiplicas factore

$$\sqrt{(k^4 - 8gk^2\sin\alpha + 16g^2)} + k^2 - 4g\sin\alpha,$$

reducendo abit in simpliciorem

$$\frac{1+\mu\sin\alpha}{\mu+\sin\alpha} = \frac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}+k^2}{4g}, \quad \text{sive} \quad \frac{1+\mu\sin\alpha}{\mu+\sin\alpha} = \mu'.$$

Radix μ certe unitate minor est; quia enim $\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)} = 4g\mu + k^2$, sive $k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2 = k^4+8gk^2\mu+16g^2\mu^2$, reducendo invenis

$$1 - \mu^2 = \frac{k^2}{2g}(\mu + \sin\alpha),$$

unde sequitur, esse $\mu^2 < 1$, si $\mu + \sin\alpha$ sit quantitas positiva. Facta eadem

suppositione invenitur, radicem negativam $-\mu'$ esse unitate maiorem. Quia enim $\frac{1}{\mu_1} = \frac{\mu+\sin\alpha}{1+\mu\sin\alpha}$, est

$$\frac{1}{\mu'^2} - 1 = \frac{(1-\mu^2).\cos^2\alpha}{(1+\mu\sin\alpha)^2},$$

unde concludis $\mu'^2 > 1$, si $\mu^2 < 1$.

5.

His praemissis ponamus

$$1. \quad \begin{cases} \sin\beta = \frac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}-k^2}{4g}, & \text{et} \\ \frac{1}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}+k^2}{4g}, \end{cases}$$

ita ut aequatio (6.) nunc fiat

$$2. \qquad \sin\gamma = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta};$$

et radices aequationis cubicae (3.) erunt $\sin y = \sin\alpha$, $\sin y = \sin\beta$ et $\sin y = -\frac{1}{\sin\gamma}$, unde sequuntur $y = \alpha$, $y = \beta$ et $y = -l(\frac{1}{2}\pi i + \mathfrak{L}\gamma)$, ubi in formula hac utimur functionibus longitudinalibus, tum cyclicis tum hyperbolicis. Iidem valores quum satisfaciunt aequationi $\cos y.\sqrt{(e+2g\sin y)} = h$, valent formulae

$$3. \quad \begin{cases} \sqrt{(e+2g\sin\alpha)} = \frac{h}{\cos\alpha}, \\ \sqrt{(e+2g\sin\beta)} = \frac{h}{\cos\beta}, \\ \sqrt{\left(\frac{2g-e\sin\gamma}{\sin\gamma}\right)} = h\,\mathrm{tang}\,\gamma. \end{cases}$$

E relatione (8.) sequuntur formulae

$$4. \quad \begin{cases} \cos\gamma = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}, & \text{et} \\ \mathrm{tang}\,\gamma = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}, \\ 1+\sin\gamma = \frac{(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)}{1+\sin\alpha\sin\beta}, \\ 1-\sin\gamma = \frac{(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)}{1+\sin\alpha\sin\beta}, \\ \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}, \end{cases}$$

quae omnes eandem relationem exprimunt, quae adiuvante functione hyperbolica longitudinali sic exprimitur:

$$5. \qquad \mathfrak{L}\gamma = \mathfrak{L}\alpha + \mathfrak{L}\beta.$$

Addimis his formulas $1-\sin\alpha\sin\gamma=\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha\sin\beta}$, $1-\sin\beta\sin\gamma=\frac{\cos^2\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}$ et $(1-\sin\alpha.\sin\gamma)(1-\sin\beta.\sin\gamma)=\cos^2\gamma$. Coefficientes aequationis cubicae nunc fiunt

$$6. \quad \begin{cases} \frac{e}{2g} = \frac{1}{\sin\gamma} - \sin\alpha - \sin\beta = \frac{1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}, \\ \frac{h^2-e}{2g} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha\sin\beta(1+\sin\alpha\sin\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}, \quad \text{quare} \\ \frac{h^2}{2g} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{tang}\gamma} = \frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}. \end{cases}$$

Quantitates α et β nunc ex arbitrio sumi possunt quadrante $\frac{1}{2}\pi$ minores, at una tantum negitiva esse potest, scilicet α, cum $\alpha<\beta$ esse supponimus. Si vero applicata α est negativa, ob formulam $\mu\mu'=1-\frac{k^2}{2g}\sin\alpha$ sive

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=1-\frac{k^2}{2g}\sin\alpha$$

applicata β semper est positiva, et quia $\frac{h^2}{2g}$ debet esse quantitas positiva, applicatae β et α semper tales esse debent, ut $\sin\beta+\sin\alpha$ sit quantitas positiva.

Insuper est secundum regulas Algebrae:

$$7. \qquad (e+2g\sin\gamma)\cos^2\gamma-h^2=2g(\sin\gamma-\sin\alpha)(\sin\beta-\sin\gamma)(\sin\gamma+\frac{1}{\sin\gamma}),$$

quae aequatio est mere analytica, unde positis $\gamma=\frac{1}{2}\pi$ et $\gamma=-\frac{1}{2}\pi$, derivantur speciales

$$8. \qquad \frac{h^2}{2g}\sin\gamma=(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1+\sin\gamma)$$
$$=(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1-\sin\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

6.

Duo igitur curvae a puncto M descriptae sunt vertices reales A et B sibi proximi reales, quorum applicatae sunt reales $y=\alpha$ et $y=\beta$; at vertices hi infinities repetuntur, ita ut punctum mobile M a vertice superiore A descendat ad verticem inferiorem B (quia $\alpha<\beta$ esse suponitur), a vertice B iterum ascendat ad verticem superiorem A_1, a quo descendat ad verticem B_1; et sic porro in infinitum. Hinc sequitur, curvam totam contineri inter duos

circulos minores parallelos lineae abscissarum, quorum radii sphaerici $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ et $\frac{1}{2}\pi - \beta$ sunt simul elongationes penduli maximae et minimae. Curva circulos hos tangit alternatim, et quidem primum cum verticibus superioribus A, A_1, A_2, A_3, etc., et alterum cum verticibus inferioribus B, B_1, B_2, B_3, etc., quia in verticibus his omnibus est $\Theta = \frac{1}{2}\pi$. Eruamus celeritates puncti mobilis M in verticibus A et B. Quia celeritatem in puncto A esse kl iam supra diximus, celeritas in vertice B pariter sit $k'.l$.

Formula generalis $v = \sqrt{(e+2g\sin y)}$ praebet $v = k$, si $y = \alpha$ fit, et praebet $v = k'$, si $y = \beta$ fit. Quare est

$$k = \sqrt{(e+2g\sin\alpha)} = \frac{h}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad k' = \sqrt{(e+2g\sin\beta)} = \frac{h}{\cos\beta},$$

quae formulae subsituto valore $h = \cos\alpha\cos\beta.\sqrt{\frac{2g}{\sin\alpha+\sin\beta}}$ fiunt

$$1. \quad \begin{cases} k = \cos\beta.\sqrt{\frac{2g}{\sin\beta+\sin\alpha}}, \\ k' = \cos\alpha.\sqrt{\frac{2g}{\sin\beta+\sin\alpha}}. \end{cases}$$

Quia $\alpha < \beta$ supponitur, ideoque $\cos\alpha > \cos\beta$, est $k < k'$, ideoque $kl < k'l$. Quare *celeritas puncti mobilis* M *in verticibus superioribus* A, A_1, A_2, A_3 *etc. est minima, et in verticibus inferioribus* B, B_1, B_2, B_3, *etc. est maxima.*

Etiam formulae hae monstrant, applicatam minimam α negativam esse posse, dummodo summa $\sin\beta + \sin\alpha$, ideoque et summa $\beta+\alpha$ ipsa maneat positiva (et >0). Si vero α est applicata negativa, vertices superiores A, A_1, A_2, A_3, etc. sunt in superiore superficiei sphaericae parte, et vertices B, B_1, B_2, B_3, etc. in inferiore, ita tamen, ut hi a linea abscissarum horizontali magis distent, quam illi.

Formula articuli praecedentis

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}-k^2}{4g}$$

paullum transformata pariter praebet antea inventam $k = \cos\beta.\sqrt{\frac{2g}{\sin\alpha+\sin\beta}}$, quare formulis

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}-k^2}{4g},$$
$$\frac{1}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}+k^2}{4g}$$

similes habes

$$2.\quad \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{(k'^4-8gk'^2\sin\beta+16g^2)}-k'^2}{4g}, \\ \dfrac{1}{\sin\gamma} = \dfrac{\sqrt{(k'^4-8gk'^2\sin\beta+16g^2)}+k'^2}{4g}. \end{cases}$$

Quia $\sin\beta + \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}-(k^2-4g\sin\alpha)}{4g}$, est

$$\frac{1}{\sin\beta+\sin\alpha} = \frac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}+k^2-4g\sin\alpha}{4g\cos^2\alpha},$$ ideoque

$$3.\quad \begin{cases} k'^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}+k^2-4g\sin\alpha), \\ \text{et vice versa} \\ k^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{(k'^4-8gk'^2\sin\beta+16g^2)}+k'^2-4g\sin\beta). \end{cases}$$

Ope harum formularum (2. et 3.) ex applicata et celeritate datis, quae ad vertices superiores pertinent, computantur applicata et celeritas, quae ad vertices inferiores pertinent, et vice versa ex his computantur illae. Formula prior facillime transformatur in

$$\sin^2\alpha + \frac{k'^2}{g}\sin a = \frac{4g^2+k^2k'^2-k'^4}{4g^2},$$

unde sequitur, remota ambiguitate removenda:

$$4.\quad \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{-k'^2+\sqrt{(4g^2+k^2k'^2)}}{2g}, & \text{et pariter} \\ \sin\beta = \dfrac{-k^2+\sqrt{(4g^2+k^2k'^2)}}{2g}. \end{cases}$$

Ope harum formularum e datis penduli sphaerici celeritatibus maximis et minimis computantur applicatae, quae ad curvae descriptae vertices pertinent. Quia $e = k^2 - 2g\sin\alpha = k'^2 - 2g\sin\beta$, est $k'^2 - k^2 = 2g(\sin\beta - \sin\alpha)$; quare substituta formula $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}-k^2}{4g}$ eodem pervenis. Applicata α fit negitiva, si est $k'^2(k'^2-k^2) > 4g^2$.

E formula $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)}-k}{4g}$ sequitur, esse revera $\sin\beta > \sin\alpha$, si est $\sqrt{(k^4-8gk^2\sin\alpha+16g^2)} > 4g\sin\alpha + k^2$; conditio vero haec reducitur ad simpliciorem, esse

$$5.\quad \begin{cases} \beta > \alpha, \text{ si } k < \cos\alpha \sqrt{\frac{g}{\sin\alpha}}, & \text{et pariter} \\ \alpha < \beta, \text{ si } k' > \cos\beta \sqrt{\frac{g}{\sin\beta}}. \end{cases}$$

Quae conveniunt cum inventis in articulo (1.), dummodo memineris, α et β esse elongationum primitivarum complementa, prout motus incipit aut in vertice A aut in vertice B.

Formula

$$6.\quad \begin{cases} \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 1 - \frac{k^2}{2g}\sin\alpha, & \text{similis invenitur} \\ \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 1 - \frac{k'^2}{2g}\sin\beta. \end{cases}$$

Quia enim

$$e = k^2 - 2g\sin\alpha \quad \text{et} \quad h = k\cos\alpha, \quad \text{pariter est}$$
$$e = k'^2 - 2g\sin\beta \quad \text{et} \quad h = k'\cos\beta,$$

ideoque $h^2 - e = 2g\sin\beta - k'^2\sin^2\beta$, et quum $\frac{h^2-e}{2g} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$, invenitur revera $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 1 - \frac{k'^2}{2g}\sin\beta$. E formulis (1.) multiplicatis sequitur

$$k^2k'^2 = \frac{4g^2.\cos^2\alpha\cos^2\beta}{(\sin\alpha+\sin\beta)^2} = 4g^2\cot^2\gamma, \quad \text{sive}$$

$$7.\qquad kk' = 2g\cot\gamma \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{(4g^2+k^2k'^2)}}{2g} = \frac{1}{\sin\gamma}.$$

Insuper est $\mu' - \mu = \frac{k^2}{2g}$, sive

$$8.\qquad \frac{k^2}{2g} = \frac{1}{\sin\gamma} - \sin\beta, \quad \text{et pariter} \quad \frac{k'^2}{2g} = \frac{1}{\sin\gamma} - \sin\alpha.$$

Quare e formulis his coniunctis cum antecedente sine ambiguitate inveniuntur formulae supra inventae (4.). Formulas (8.) etiam subtrahendo colligis e formulis (2.).

Ubi fit $\beta = \alpha$, duo circuli minores. inter quos alioquin curva a mobili M descripta continetur, coincidunt cum curva, quare nunc et ipsa est circulus minor, cuius radius sive elongatio est $\frac{1}{2}\pi - \alpha$. Formulae vero (1.) nunc fiunt $k = k' = \cos\alpha\sqrt{\frac{g}{\sin\alpha}}$, quae formula cum inventa in articulo (1.) est eadem, dummodo $E = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ sumitur.

Applicata α etiam $= 0$ esse potest; curva tunc verticibus superioribus

suis tangit lineam abscissarum, et formulae (1.) fiunt $k = \cos\beta \sqrt{\frac{2g}{\sin\beta}}$ et $k' = \sqrt{\frac{2g}{\sin\beta}}$.

7.

Si p et q sunt vires, quae filum in verticibus A et B tendunt, formula generalis $N = l(e+3g\sin\gamma)$ illico praebet

$$p = l(e+3g\sin\alpha) \quad \text{et} \quad q = l(e+3g\sin\beta).$$

Si vero substituimus $e = k^2 - 2g\sin\alpha$ et $e = k'^2 - 2g\sin\beta$, oriuntur formulae

$$1. \quad \begin{cases} p = l(k^2+g\sin\alpha) = gl(\sin\alpha + \frac{2\cos^2\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}), \\ q = l(k'^2+g\sin\beta) = gl(\sin\beta + \frac{2\cos^2\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}). \end{cases}$$

Eaedem vires p et q mobile punctum remoto filo premunt versus sphaerae superficiem in verticibus A et B. Hinc sequitur

$$q - p = 3gl(\sin\beta - \sin\alpha).$$

Si $\beta = \alpha$ sumitur, invenitur $N = p = q = gl(\sin\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}) = \frac{gl}{\sin\alpha}$, uti in articulo primo

Angulum Θ in articulo (4.) exhibitum etiam computabis ope formulae

$$2. \quad \operatorname{tang}\Theta = \sqrt{\frac{\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}{(\sin\gamma-\sin\alpha)(\sin\beta-\sin\gamma)(1+\sin\gamma\sin\gamma)}},$$

unde colligis, applicatam γ semper versari inter limites α et β, et limiti alterutri in verticibus aequalem fieri.

Si γ' est applicata puncti M', reciprocitatis lege coniuncti cum puncto M, e praeceptis Geometriae sphaericae notum est, applicatam hanc esse complementum anguli acuti, quem circulus maximus curvam primitivam tangens in M faciat cum linea abscissarum, ideoque esse $\sin\gamma' = \cos\gamma.\sin\Theta$; quare nunc est

$$3. \quad \sin\gamma' = \frac{h}{\sqrt{(e+2g\sin\gamma)}}.$$

Si r est radius curvaturae sphaericus, ex iisdem praeceptis nota est formula generalis $\operatorname{tang} r = \frac{\partial\sin\gamma}{\partial\sin\gamma'}$, qua adhibita invenis

$$4. \quad \operatorname{tang} r = \frac{\sqrt{(e+2g\sin\gamma)}}{gh} = \frac{h^2}{g\sin^3\gamma'},$$

si signum praefigendum — omittimus, quo tantummodo indicatur, *curvam versus lineam abscissarum esse convexam.*

Radii curvaturae ad vertices A et B pertinentes sunt igitur

arc tang $\left(\frac{h^2}{g\cos^3\alpha}\right)$ et arc tang $\left(\frac{h^2}{g\cos^3\beta}\right)$; quare curvatura in verticibus superioribus A, A_1, A_2, A_3, etc. maior est quam in verticibus inferioribus B, B_1, B_2, B_3, etc.

Ex aequationibus $\sin y = \sin\alpha$, $\sin y = \sin\beta$, $\sin y = -\frac{1}{\sin\gamma}$ sequuntur

$$\cos^2 y = \cos^2\alpha, \quad \cos^2 y = \cos^2\beta, \quad \cos^2 y = -\cot^2\gamma,$$

et cum $\sin\alpha$, $\sin\beta$ et $-\frac{1}{\sin\gamma}$ sunt radices aequationis (3.) in articulo (4.), radices aequationis (2.):

$$\cos^6 y - \frac{4g^2-e^2}{4g^2}\cos^4 y - \frac{h^2 e}{2g^2}\cos^2 y + \frac{h^4}{4g^2} = 0$$

erunt modo inventae $\cos^2 y = \cos^2\alpha$, $\cos^2 y = \cos^2\beta$ et $\cos^2 y = -\cot^2\gamma$, ita ut quicunque valor variabili y tribuatur, sit

5. $$\cos^6 y - \frac{4g^2-e^2}{4g^2}\cos^4 y - \frac{h^2 e}{2g^2}\cos^2 y + \frac{h^4}{4g^2}$$
$$= (\cos^2 y - \cos^2\alpha)(\cos^2 y - \cos^2\beta)(\cos^2 y + \cot^2\gamma).$$

8.

His praemissis ad integrationes convertimur, et initium faciamus integratione aequationis differentialis, quae exprimit relationem inter tempus praeteritum et spatium a puncto mobili descriptum. Si aequationem $\partial t = \frac{\cos^2 y . \partial x}{h}$ coniungis cum aequatione (6.) articuli (3.), oritur aequatio differentialis integranda

$$\partial t = \frac{\pm\partial \sin y}{\sqrt{[(e+2g\sin y)\cos^2 y - h^2]}},$$

quam adiuvante formula (7.) articuli (5.) ita repraesentamus:

$$\partial t = \sqrt{\frac{\sin\gamma}{2g}} \cdot \frac{\pm\partial \sin y}{\sqrt{[(\sin y - \sin\alpha)(\sin\beta - \sin y)(1+\sin\gamma\sin y)]}}.$$

Si motus penduli sphaerici incipit in vertice superiore A, cuius applicata $y = \alpha$, crescente aplicata y simul crescit tempus t; quare nunc signum superius + valet, et integratione inveniendum est tempus

$$t = \sqrt{\frac{\sin\gamma}{2g}} \cdot \int_\alpha \frac{\partial \sin y}{\sqrt{[(\sin y - \sin\alpha)(\sin\beta - \sin y)(1+\sin\gamma\sin y)]}}.$$

Integratio haec hodie facillima est. Adhibitis signis

$$1.\quad \begin{cases} k = \sqrt{\frac{(\sin\beta-\sin\alpha)\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}} = \sqrt{\frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}}, \\ k' = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}} = \sqrt{\frac{1+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}}, \\ m = \sqrt{\frac{\sin\gamma}{2g(1+\sin\beta\sin\gamma}} = \sqrt{\frac{\sin\beta+\sin\alpha}{2g(1+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)}}, \end{cases}$$

quorum duo prima eos habent valores, ut sit

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

formula, quae exprimit tempus praeteritum t inde ab initio motus in vertice A, redigitur in valde simplicem hanc:

$$2.\qquad t = 2m.u,$$

dummodo argumentum u e data applicata y puncti mobilis M in fine temporis t computatur adiumento functionum modularium, quae omnes referendae sunt ad modulum k, cuius complementarius est k'. Formulae ipsae sunt

$$3.\quad \begin{cases} sncu = \sqrt{\frac{\sin\beta-\sin y}{\sin\beta-\sin\alpha}}, & snu = \sqrt{\frac{(1+\sin\gamma\sin\beta)(\sin y-\sin\alpha)}{(\sin\beta-\sin\alpha)(1+\sin\gamma\sin y)}}, \\ cncu = \sqrt{\frac{\sin y-\sin\alpha}{\sin\beta-\sin\alpha}}, & \text{et} \quad cnu = \sqrt{\frac{(1+\sin\gamma\sin\alpha)(\sin\beta-\sin y)}{(\sin\beta-\sin\alpha)(1+\sin\gamma\sin y)}}, \\ tncu = \sqrt{\frac{\sin\beta-\sin y}{\sin y-\sin\alpha}}, & tnu = \sqrt{\frac{(1+\sin\gamma\sin\beta)(\sin y-\sin\alpha)}{(1+\sin\gamma\sin\alpha)(\sin\beta-\sin y)}}, \\ dncu = \sqrt{\frac{1+\sin\gamma\sin y}{1+\sin\gamma\sin\beta}}, & dnu = \sqrt{\frac{1+\sin\gamma\sin\alpha}{1+\sin\gamma\sin y}}. \end{cases}$$

Vice versa invenitur formula

$$4.\quad \begin{cases} \sin y = \sin\alpha.snc^2u + \sin\beta.cnc^2u, & \text{et differentialis} \\ \partial\sin y = 2(\sin\beta-\sin\alpha).sncu.cncu.dncu.\partial u, \end{cases}$$

sive

$$\partial\sin y = 2(\sin\beta-\sin\alpha).\frac{k'^2snu.cnu.\partial u}{dn^3u}.$$

In sequentibus utimur et formula

$$5.\qquad \sin y = \frac{\sin\alpha(1+\sin\gamma\sin\beta)+(\sin\beta-\sin\alpha)sn^2u}{1+\sin\gamma\sin\beta-\sin\gamma(\sin\beta-\sin\alpha)sn^2u},$$

cuius denominator $1+\sin\gamma\sin\beta-\sin\gamma(\sin\beta-\sin\alpha).sn^2u=(1+\sin\gamma\sin\beta).dn^2u$ est. Quadrantes modulares, qui pertinent ad modulos supra dictos k et k', sint K et K'; quare, si T est tempus, quo opus est, ut punctum mobile M inde a vertice superiore A descendat ad verticem proximum inferiorem B, fit $y=\beta$, ideoque am $u=\frac{1}{2}\pi$, sive $u=K$, quo oritur formula

$$6.\qquad T = 2m.K,$$

sive

$$T = m\pi\left(1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}.k^8 + \text{etc.}\right).$$

Formulae hae omnes etiam tunc valent, si applicata α vertices A aut $= 0$, aut quantitas negativa est, quae $< \frac{1}{2}\pi$, dummodo $\sin\beta + \sin\alpha$ est quantitas positiva.

Si in formulis (2., 3., 4., 5.) loco argumenti u sumitur $\pm(2nk \pm u)$, et n est numerus integer, applicata y est aequalis longitudini. In verticibus ipsis est $u = \pm nK$, et numerus n est *par* in verticibus superioribus, et *impar* in inferioribus.

9.

Suscipiamus nunc problema integrandi aequationem curvae differentialem. Quia $\partial x = \frac{h}{\cos^2 y}.\partial t$ et $\partial t = 2m.\partial u$, est primo

$$\partial x = \frac{2mh.\partial u}{\cos^2 y},$$

et quia $\frac{2}{\cos^2 y} = \frac{1}{1-\sin y} + \frac{1}{1+\sin y}$, habes

$$\partial x = \frac{mh.\partial u}{1-\sin y} + \frac{mh.\partial u}{1+\sin y}.$$

Cum huius integrationis problemate aptissime coniungitur problema eruendae quadraturae. Si f designat aream sphaericam sive quadrigonum inclusum arcu $AM = s$, applicatis α et γ punctorum A et M et abscissa x, applicatis his intercepta, est $\partial f = \sin y.\partial x$, ideoque $\partial f = \frac{2mh.\sin y.\partial u}{\cos^2 y}$, et quia $\frac{2\sin y}{\cos^2 y} = \frac{1}{1-\sin y} - \frac{1}{1+\sin y}$, fit

$$\partial f = \frac{mh.\partial u}{1-\sin y} - \frac{mh.\partial u}{1+\sin y}.$$

Quare integratione eruendae sunt

$$\tfrac{1}{2}(x+f) = \int_0 \frac{mh.\partial u}{1-\sin y}, \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}(x-f) = \int_0 \frac{mh.\partial u}{1+\sin y}.$$

Quia vero e formula (5.) articuli praccedentis componitur

$$1 - \sin y = \frac{(1+\sin\gamma\sin\beta)(1-\sin\alpha) - (\sin\beta-\sin\alpha)(1+\sin\gamma).sn^2u}{(1+\sin\gamma\sin\beta).dn^2u},$$

$$1 + \sin y = \frac{(1+\sin\gamma\sin\beta)(1+\sin\alpha) - (\sin\beta-\sin\alpha)(1-\sin\gamma).sn^2u}{(1+\sin\gamma\sin\beta).dn^2u},$$

formulae integrandae fiunt

$$\tfrac{1}{2}(x+f) = \frac{hm}{1-\sin\alpha}\cdot\int_0 \frac{dn^2u\,.\,\partial u}{1-\dfrac{(\sin\beta-\sin\alpha)(1-\sin\gamma)}{(1+\sin\gamma\sin\beta)(1-\sin\alpha)}\,.\,sn^2u},$$

$$\tfrac{1}{2}(x-f) = \frac{hm}{1+\sin\alpha}\cdot\int_0 \frac{dn^2u\,.\,\partial u}{1+\dfrac{(\sin\beta-\sin\alpha)(1-\sin\gamma)}{(1+\sin\gamma\sin\beta)(1+\sin\alpha)}\,.\,sn^2u}.$$

Si primam comparamus cum formula

$$'D(u,a) = \int_0 \frac{tn'a\,dn'a\,.\,dn^2u\,.\,\partial u}{1-dn'^2a\,.\,sn^2u},$$ et alteram cum formula

$$D(u,b) = \int_0 \frac{tn'b\,dn'b\,.\,dn^2u\,.\,\partial u}{1+k^2\,.\,tn'^2b\,.\,sn^2u},$$

in quibus functiones argumenti u ad modulum k relatae congruunt cum functionibus (3.) articuli praecedentis, functiones reliquae vero parametrorum a et b referendae sunt ad modulum coniugatum $k' = \sqrt{(1-k^2)}$, quos modulos in articulo praecedenti invenimus, sumendi sunt parametri a et b tales, ut sit

$$dn'^2a = \frac{(\sin\beta-\sin\alpha)(1-\sin\gamma)}{(1+\sin\gamma\sin\beta)(1-\sin\alpha)}, \quad \text{et} \quad k^2\,.\,tn'^2b = \frac{(\sin b-\sin\alpha)(1-\sin\gamma)}{(1+\sin\gamma\sin\beta)(1+\sin\alpha)}.$$

E formulis his primitivis levi negotio inveniuntur sequentes:

1.

$$\begin{cases}
sn'a = \sqrt{\dfrac{1-\sin\beta}{1-\sin\alpha}}, & sn'b = \sqrt{\dfrac{1-\sin\gamma}{1-\sin\alpha\sin\gamma}},\\
cn'a = \sqrt{\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}, & cn'b = \sqrt{\dfrac{\sin\gamma(1+\sin\alpha)}{1+\sin\alpha\sin\gamma}},\\
tn'a = \sqrt{\dfrac{1-\sin\beta}{\sin\beta-\sin\alpha}}, & tn'b = \sqrt{\dfrac{1-\sin\gamma}{\sin\gamma(1+\sin\alpha)}},\\
dn'a = \sqrt{\dfrac{(1+\sin\gamma)(\sin\beta-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\beta\sin\gamma)}}, & dn'b = \sqrt{\dfrac{\sin\gamma(1+\sin\beta)}{1+\sin\beta\sin\gamma}},\\
snc'a = \sqrt{\dfrac{1+\sin\beta\sin\gamma}{1+\sin\gamma}}, & snc'b = \sqrt{\dfrac{(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta\sin\gamma)}{(1+\sin\beta)(1+\sin\alpha\sin\gamma)}},\\
cnc'a = \sqrt{\dfrac{\sin\gamma(1-\sin\beta)}{1+\sin\gamma}}, & cnc'b = \sqrt{\dfrac{(1-\sin\gamma)(\sin\beta-\sin\alpha)}{(1+\sin\beta)(1+\sin\alpha\sin\gamma)}},\\
tnc'a = \sqrt{\dfrac{1+\sin\beta\sin\gamma}{\sin\gamma(1-\sin\beta)}}, & tnc'b = \sqrt{\dfrac{(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta\sin\gamma)}{(1-\sin\gamma)(\sin\beta-\sin\alpha)}},\\
dnc'a = \sqrt{\dfrac{\sin\gamma(1-\sin\alpha)}{1+\sin\gamma}}, & dnc'b = \sqrt{\dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{1+\sin\beta}}.
\end{cases}$$ et

Quia vero invenis

$$dn'a\,.\,tn'a = \frac{1}{1-\sin\alpha}\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1+\sin\gamma)}{1+\sin\beta\sin\gamma}} = \frac{hm}{1-\sin\alpha}, \text{ et}$$

$$tn'b\,.\,dn'b = \frac{1}{1+\sin\alpha}\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1-\sin\gamma)}{1+\sin\beta\sin\gamma}} = \frac{hm}{1-\sin\alpha},$$

oriuntur formulae admodum simplices:

$$\tfrac{1}{2}(x+f) = {}'D(u, a), \qquad \tfrac{1}{2}(x-f) = D(u, b),$$

e quibus tum addendo tum subtrahendo componis

$$\mathbf{2.} \quad \begin{cases} x = {}'D(u, a) + D(u, b), \\ f = {}'D(u, a) - D(u, b), \end{cases}$$

quarum prima e data applicata y puncti mobilis M computare ipsius abscissam x, et altera ex eadem applicata data computare curvae aream f docet. Iisdem formulis uteris, applicata α verticis A sit positiva, aut negativa, aut $= 0$, cum nec moduli nec parametri hisce mutationibus fiant imaginarii.

Utraque formula relata est ad sphaerae superficiem, cuius radius est longitudinum unitas; si ipsas vis referri ad eam superficiem, cuius radius est penduli spharici longitudo l, primae formulae addendus est factor, et alteri factor l^2.

Si V et W sunt centra sphaerica lineae abscissarum opposita, applicatae punctorum A et M concurrent in punctis his, quo oritur biangulum sphaericum $VAWMV$, cuius area $= 2x$, et quod abscissa x dividitur in partes congruas, ideoque aequales. Si centrum W curvae a pendulo descriptae proprius est centro V, areae sectorum sive triangulorum AWM et AVM sunt $x - f$ et $x + f$, quare est

$$\mathbf{3.} \quad \begin{cases} \text{area sectoris } AVM = 2.l^2.{}'D(u, a), \\ \text{area sectoris } AWM = 2.l^2.\ D(u, b). \end{cases}$$

Si X est abscissa intercepta applicatis, quae ad vertices A et B pertinent, et si F est area contenta inter abscissam hanc X, inter arcum AB et applicatas modo dictas, quia posito $y = f$ fit argumentum $u = K$, erunt

$$X = {}'D(K, a) + D(K, b),$$
$$F = {}'D(K, a) - D(K, b).$$

Si ratio $2\pi : X$ est numerus aut integer aut fractus, ideoque aequalis est rationi numerorum duorum integrorum, curva in se ipsam recurrit, alioquin ab utraque parte in infinitum excurrit, quamvis ipsius rami se infinities intersecant.

10.

Ubi formulas has, et praesertim formulas (2.) articuli praecedentis reducere vis unamquamque ad integrale unicum modulare, parameter integralis novi aut $a + b$, aut $a - b$, aut complementum huius summae vel differentiae erit. Quare ante omnia functiones huius summae et differentiae modulares sunt eruendae. Adhibita formula

$$tn'(a\pm b) = \frac{tn'a\,dn'b \pm tn'b\,dn'a}{1 \mp tn'a\,dn'b\,.\,tn'b\,dn'a},$$

quia componis $tn'a\,dn'b = \cos\beta\,.\,\sqrt{\frac{\sin\gamma}{(\sin\beta-\sin\alpha)(1+\sin\beta\sin\gamma)}}$,

$$tn'b\,dn'a = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\,.\,\sqrt{\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\sin\gamma\,(1+\sin\beta\sin\gamma)}},$$

$$tn'a\,dn'b\,.\,tnb'\,dn'a = \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha(1+\sin\beta\sin\gamma)},$$

praebet $tn'(a\pm b) = \frac{\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma \pm \cos\gamma(\sin\beta-\sin\alpha)}{\cos\alpha(1+\sin\beta\sin\gamma) \mp \cos\beta\cos\gamma}\,.\,\sqrt{\frac{1+\sin\beta\sin\gamma}{\sin\gamma(\sin\beta-\sin\alpha)}}$, quae formula, quia est $\sqrt{\frac{1+\sin\beta\sin\gamma}{\sin\gamma(\sin\beta-\sin\alpha)}} = \frac{1}{k}$, et $ktn'(a\pm b) = \frac{1}{tnc'(a\pm b)}$, eadem est cum his:

$$tnc'(a+b) = \frac{\cos\alpha+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\gamma(\sin\beta-\sin\alpha)},$$

$$tnc'(a-b) = \frac{\cos\alpha+\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\gamma(\sin\beta-\sin\alpha)},$$

quae fiunt persimplices, dummodo substituis $\sin\gamma = \frac{\sin\beta+\sin\alpha}{1+\sin\alpha\sin\beta}$ et $\cos\gamma = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}$, ita ut functiones modulares summae $a+b$ et differentiae $a-b$ ad modulum k' articuli (8.) referendae sint:

$$snc'(a+b) = \sqrt{\frac{(\sin\beta+\sin\alpha)\sin\gamma}{1+\sin\alpha\sin\gamma}}, \qquad snc'(a-b) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha\sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\gamma}},$$

$$cnc'(a+b) = \sqrt{\frac{1-\sin\beta\sin\gamma}{1+\sin\alpha\sin\gamma}}, \qquad cnc'(a-b) = \sin\alpha\sqrt{\frac{1-\sin\beta\sin\gamma}{1+\sin\alpha\sin\gamma}},$$

$$tnc'(a+b) = \frac{\sin\beta+\sin\alpha}{\cos\beta}, \qquad tnc'(b-b) = \frac{1+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta},$$

$$dnc'(a+b) = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}}, \qquad dnc'(a-b) = \sin\beta\sqrt{\frac{1-\sin\alpha\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}},$$

et

$$sn'(a+b) = \sqrt{\frac{1-\sin^2\beta\sin^2\gamma}{1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma}}, \qquad sn'(a-b) = \sqrt{\frac{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\sin^2\alpha}{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\sin^2\beta}},$$

$$cn'(a+b) = \sqrt{\frac{(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)\sin^2\gamma}{1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma}}, \qquad cn'(a-b) = \sqrt{\frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)\sin^2\beta}},$$

$$tn'(a+b) = \sqrt{\frac{1-\sin^2\beta\sin^2\gamma}{(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)\sin^2\gamma}}, \qquad tn'(a-b) = \sqrt{\frac{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\sin^2\alpha}{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}},$$

$$dn'(a+b) = \sqrt{\frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}, \qquad dn'(a-b) = \sqrt{\frac{(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha}}.$$

E formulis his simul patet, esse parametrum $a > b$, et esse summam $a+b < K'$.

11.

Progrediamur ad rectificationem arcus $AM = s$; quem in finem transformetur radicale

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sqrt{(e + 2g \sin \gamma)}.$$

Quia $\frac{e}{2g} = \frac{1-(\sin\alpha+\sin\beta)\sin\gamma}{\sin\gamma}$ et $\sin\gamma = \sin\beta - (\sin\beta - \sin\alpha)\,snc^2 u$ est, oritur

$$\sqrt{(e+2g\sin\gamma)} = \sqrt{\frac{2g(1+\sin\beta\sin\gamma)}{\sin\gamma}} \cdot \sqrt{\left[\frac{1-\sin\alpha\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma} - k^2\,snc^2 u\right]}.$$

Si vero memineris esse in articulo (8.) $m = \sqrt{\frac{\sin\gamma}{2g(1+\sin\beta\sin\gamma)}}$, adhibitis signis novis

$$v = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}}, \quad \text{et} \quad v' = \sqrt{\frac{(\sin\beta+\sin\alpha)\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}},$$

relatione $v^2 + v'^2 = 1$ inter se coniunctis, oritur formula

$$\sqrt{(e+2g\sin\gamma)} = \frac{1}{m}\sqrt{(v^2 - k^2 snc^2 u)} = \frac{1}{m}\sqrt{(dn^2 u - v'^2)} = \frac{\sqrt{(k'^2 - v'^2 dn^2 u)}}{m\,dn\,u}, \text{ sive}$$

$$1. \qquad \sqrt{(e+2g\sin\gamma)} = \frac{\sqrt{(v^2 k'^2 - v'^2 k^2 cn^2 u)}}{m\,dn\,u}.$$

Quia vero $\partial t = 2m.\partial u$, est $\partial s = \frac{2\partial u.\sqrt{(v^2 k'^2 - v'^2 k'^2.cn^2 u)}}{dn\,u}$, quae formula posito $z = cn\,u$ abit in hanc:

$$\partial s = \frac{-2\partial z\sqrt{(v^2 k'^2 - v'^2 k^2.z^2)}}{(k'^2 + k^2 z^2).\sqrt{(1-z^2)}}.$$

Ut integratio contingat, alium adhibeamus modulum $\lambda = \frac{v'k}{vk'}$; et aliud argumentum φ tale, ut sit $z = snc\varphi$, quo fit $-\partial z = \frac{\lambda'^2 sn v.\partial v}{dn^2 v}$, posito $\lambda' = \sqrt{(1-\lambda^2)}$.

Formulam transformatam invenies

$$\partial s = \frac{2\lambda'^2 k' v.\partial v}{1-(1-k'^2)sn'^2 v},$$

cuius integrale comparandum est cum integrali $'C(\varphi, p) = \int_0^{\varphi} \frac{\lambda'^2 sn' p\, snc' p.\partial v}{1-dn'^2 p.sn^2 v}$, relatis functionibus argumenti φ ad modulum

$$2. \qquad \lambda = \frac{kv'}{v'k},$$

et relatis functionibus parametri p ad modulum complementarium

$$3. \qquad \lambda' = \frac{\sqrt{(v^2-k^2)}}{vk'}.$$

Si vero hunc in finem ponimus $dn'^2 p = 1 - k'^2\lambda'^2$, facile negotio eruuntur valores sequentes:

$$4. \quad \begin{cases} sn'p = k, & snc'p = \nu, \\ cn'p = k, \quad \text{et} & cnc'p = \nu, \\ dn'p = \dfrac{k}{\nu}, & dnc'p = \dfrac{\nu'}{k'}. \end{cases}$$

Quia ex his componitur $\lambda'^2 sn'p\, snc'p = \lambda'^2 k'\nu$, oritur formula admodum simplex

$$5. \quad \text{arcus } AM = s = 2.{}'C(\varphi, p).$$

Missis signis ν et ν', moduli novi computantur e formulis

$$6. \quad \begin{cases} \lambda = \sqrt{\dfrac{(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)\sin^2\gamma}{1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma}} = \dfrac{\sin\beta+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sqrt{\dfrac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha}}, \\ \lambda' = \sqrt{\dfrac{1-\sin^2\beta\sin^2\gamma}{1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma}} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{1+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta}{1+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha}}. \end{cases}$$

Quia $snc\,\varphi = cn\,u$, $cnc\,\varphi = sn\,u$, $\lambda' tn\varphi = tn\,u$, functiones modulares argumenti novi φ ad modulum λ referendi determinantur formulis sequentibus:

$$7. \quad \begin{cases} snc\,\varphi = \sqrt{\dfrac{(1+\sin\alpha\sin\gamma)(\sin\beta-\sin y)}{(\sin\beta-\sin\alpha)(1+\sin\gamma\sin y)}}, \\ cnc\,\varphi = \sqrt{\dfrac{(1+\sin\beta\sin\gamma)(\sin y-\sin\alpha)}{(\sin\beta-\sin\alpha)(1+\sin\gamma\sin y)}}, \\ dnc\,\varphi = \sqrt{\dfrac{(1+\sin\beta\sin\gamma)(1-\sin\alpha\sin\gamma-\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin y)}{(1-\sin\alpha\sin\gamma)(1+\sin\gamma\sin y)}}, \\ tnc\,\varphi = \sqrt{\dfrac{(1+\sin\alpha\sin\gamma)(\sin\beta-\sin y)}{(1+\sin\beta\sin\gamma)(\sin y-\sin\alpha)}}, \\ \text{et} \\ sn\,\varphi = \sqrt{\dfrac{(1-\sin\alpha\sin\gamma)(\sin y-\sin\alpha)}{(\sin\beta-\sin\alpha)(1-\sin\alpha\sin\gamma-\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin y)}}, \\ cn\,\varphi = \sqrt{\dfrac{(1+\sin\beta\sin\gamma)(\sin\beta-\sin y)}{(\sin\beta-\sin\alpha)(1-\sin\alpha\sin\gamma-\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin y)}}, \\ dn\,\varphi = \sqrt{\dfrac{(1-\sin\beta\sin\gamma)(1+\sin\gamma\sin y)}{(1+\sin\alpha\sin\gamma)(1-\sin\alpha\sin\gamma-\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin y)}}, \\ tn\,\varphi = \sqrt{\dfrac{(1-\sin\alpha\sin\gamma)(\sin y-\sin\alpha)}{(1+\sin\beta\sin\gamma)(\sin\beta-\sin y)}}. \end{cases}$$

in quibus loco factoris magis compositi $1-\sin\alpha\sin\gamma-\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin y$ substitui potest simplicior et ipsi aequalis

$$\frac{\sin\gamma}{2g}.(e + 2g\sin y).$$

Functiones denique modulares parametri p referendae omnes ad modulum λ' exprimuntur formulis

$$8.\quad \begin{cases} sn'p = \sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}}, \\ cn'p = \sqrt{\dfrac{(\sin\beta-\sin\alpha)\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}}, \\ tn'p = \sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha\sin\gamma}{(\sin\beta-\sin\alpha)\sin\gamma}}, \\ dn'p = \sqrt{\dfrac{(\sin\beta-\sin\alpha)\sin\gamma}{1-\sin\alpha\sin\gamma}}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} snc'p = \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}}, \\ cnc'p = \sqrt{\dfrac{(\sin\beta-\sin\alpha)\sin\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}}, \\ tnc'p = \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha\sin\gamma}{(\sin\beta+\sin\alpha)\sin\gamma}}, \\ dnc'p = \sqrt{\dfrac{(\sin\beta+\sin\alpha)\sin\gamma}{1+\sin\alpha\sin\gamma}}. \end{cases}$$

Si L et L' sunt quadrantes modulares referendi ad novos modulos λ et λ', est arcus curvae inter duos vertices sibi proximos,

$$9.\quad AB = 2.'C(L, p),$$

quia $amc = \frac{1}{2}\pi$ est, si $\gamma = \beta$ sumitur. Quare arcum $BM = 2('C(L,p) - 'C(c,p))$ invenis, sive

$$10.\quad BM = 2.'D(L-c,\ L'-p).$$

Formulae erutae (5., 9. et 10.) ad superficiem sphaericam eam relatae sunt, cuius radius est unitas, quare ipsis adiiciendus factor l est, si eas vis referre ad superficiem sphaericam eam, cuius radius penduli longitudo l est. Etiam omnes hae formulae valent, si applicata α verticis superioris A est aut positiva, aut negitiva, aut $= 0$.

Revertendo denique obtines formulam, cuius ope applicatam γ ex amplitudine data amv computare queas, hanc

$$11.\quad \sin\gamma = \frac{\sin\alpha(1-\sin\alpha\sin\gamma)\,cn^2v + \sin\beta(1+\sin\beta\sin\gamma)\,.sn^2v}{(1-\sin\alpha\sin\gamma).cn^2v + (1+\sin\beta\sin\gamma)sn^2v},$$

Quia $tn'2p = \dfrac{2tn'p\,dn'p}{1-tn'^2p\,dn'^2p}$, et $tn'p\,dn'p = \sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha\sin\gamma}{1-\sin\alpha\sin\gamma}}$, invenis $-tn'2p$ sive

$$tn'(2L'-2p) = \frac{\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)}}{\sin\alpha\sin\gamma},$$

unde perspicis esse duplum parametri p quadrante modulari L' maiorem. Reliquae functiones argumenti $2L'-2p$ sunt:

$$12.\quad \begin{cases} sn'(2L'-2p) = \sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma}, \\ cn'(2L'-2p) = \sin\alpha\sin\gamma, \\ dn'(2L'-2p) = \sin\beta\sin\gamma, \\ snc'(2L'-2p) = sn'(2p-L') = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \\ cnc'(2L'-2p) = cn'(2p-L') = \dfrac{\sqrt{(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)}}{\sin\beta}. \end{cases}$$

12.

Ut ad curvam reciprocam nunc procedamus, revertimur ad formulam $\sin y' = \frac{h}{\sqrt{(e+2g\sin y)}}$, qua determinatur applicata y' puncti M' reciprocitatis lege coniuncti cum puncto mobili M, cuius applicata est y. Substitutio valoris $\sqrt{(e+2g\sin y)} = \frac{1}{m}\sqrt{(r^2-k^2 snc^2 u)}$ praebet $\sin y' = \frac{mh}{\nu}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{k^2}{\nu^2}snc^2 u}}$; quia vero $\frac{k^2}{\nu^2} = \frac{(\sin\beta-\sin\alpha)\sin\gamma}{1-\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, et $\frac{mh}{\nu} = \sqrt{\frac{h^2\sin\gamma}{2g(1-\sin\alpha\sin\gamma)}} = \cos\beta$ invenitur, oritur formula simplex:

$$1. \qquad \sin y' = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{(\cos^2\alpha\, cnc^2 u+\cos^2\beta\, snc^2 u)}},$$

quae exprimit, quaenam functio argumenti variabilis u sit applicata y' puncti reciproci M'. Si vero substituis valorem $\sqrt{(e+2g\sin y)} = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{\nu^2k^2-\nu'^2k^2cn^2u}{cn^2u+k'^2sn^2u}}$ $= \frac{1}{m}\sqrt{\frac{\nu^2-k^2}{cn^2v+\frac{\nu^2-k^2}{\nu^2}sn^2v}}$ oritur $\sin y' = \frac{mh}{\nu}\sqrt{\frac{1-\frac{k^2}{\nu^2}sn^2v}{1-\frac{k^2}{\nu^2}}}$, sive magis reducta:

$$2. \qquad \sin y' = \sqrt{(\cos^2\alpha\,.\,cn^2 v + \cos^2\beta\,.\,sn^2 v)},$$

quae edocet, quaenam argumenti v functio sit applicata y' puncti M'.

Quia celeritas puncti mobilis M in curva primitiva est $\frac{l\partial s}{\partial t} = \frac{h.l}{\sin y'}$, invenis celeritatem hanc $= l\sqrt{\frac{2g(\cos^2\alpha\, cnc^2 u+\cos^2\beta\, snc^2 u)}{\sin\alpha+\sin\beta}}$, si ipsam vis habere functionem argumenti u; si vero vis habere functionem argumenti v novi, eadem celeritas est

$$= l.\sqrt{\left(\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\, cn^2 v+\cos^2\beta\, sn^2 v}\right)}\cdot\sqrt{\frac{2g}{\sin\alpha+\sin\beta}}.$$

13.

Si T est arcus circuli maximi curvam primitivam tangens in M, usque ad intersectionem lineae abscissarum prolongatus, et quadrante non maior, est $\operatorname{tang} T = \frac{\operatorname{tang} y}{\cos\Theta}$, et quia $\sin y' = \cos\gamma\,.\sin\Theta$, ideoque $\cos\Theta = \frac{\sqrt{(\cos^2 y-\sin^2 y')}}{\cos y}$, oritur formula $\operatorname{tang} T = \frac{\sin y}{\sqrt{(\cos^2 y'-\sin^2 y)}}$. E praeceptis Geometriae sphaericae insuper notum est, arcum T aequalem esse angulo Θ', quem circulus maximus

curvam reciprocam tangens in M' faciat cum applicata y' huius puncti; quare si x_1 est abscissa puncti M', valet formula tang T = tang $\Theta' = \frac{\cos y' . \partial x'}{\partial y'}$ generalis, sive

$$\partial x' = \frac{\pm \sin y . \partial y'}{\cos y' \sqrt{(\cos^2 y - \sin^2 y)}},$$

quae est curvae reciprocae uniuscuiusque aequatio differentialis, dummodo relatio inter sin y' et sin y reverti potest, quum valor ipsius sin y hac reversione inventus est substituendus.

Formula $\sin y' = \frac{h}{\sqrt{(e+2g\sin y)}}$ facillime revertitur, et cum hoc modo inveniatur

$$\sin y = \frac{h^2 - e\sin^2 y'}{2g\sin^2 y'},$$

substitutione hac illico oritur quaesita curvae reciprocae aequatio differentialis

$$\partial x' = \frac{\pm (h^2 - e\sin^2 y') . \partial y'}{\cos y' \sqrt{[4g^2 \sin^4 y' \cos^2 y' - (h^2 - e\sin^2 y')^2]}}.$$

Pro initio abscissarum x' punctum sumamus initio abscissarum x e diametro oppositum; quare crescente abscissa x simul crescit abscissa x', et cum crescentibus x et y ob formulam $\sin y' = \frac{h}{\sqrt{(e+2g\sin y)}}$ decrescat applicata y', signum inferius — praefigendum est formulae erutae, quo fit curvae reciprocae aequatio differentialis ab omni ambiguitate liberata:

$$1. \qquad \partial x' = \frac{-(h^2 - e\sin^2 y')\partial y'}{\cos y' \sqrt{[4g^2 \sin^4 y' \cos^2 y' - (h^2 - e\sin^2 y')^2]}}.$$

Angulus Θ' nunc est obtusus; si vero Θ angulum deinceps positum acutum esse volumus, formula supra allegata mutanda est; nunc fit tang $\Theta' = \frac{-\cos y' . \partial x'}{\partial y'}$, quare est

$$2. \qquad \begin{cases} \text{tang } \Theta' = \dfrac{h^2 - e\sin^2 y'}{\sqrt{[4g^2 \sin^4 y' \cos^2 y' + (h^2 - e\sin^2 y')^2]}}, & \text{ideoque} \\ \sin \Theta' = \dfrac{h^2 - e\sin^2 y'}{2g\sin^2 y' \cos y'}. \end{cases}$$

Puncta et huius curvae dicimus *vertices* ea, quorum angulus $\Theta = \frac{1}{2}\pi$, et quia in ipsis $\frac{\partial y'}{\partial x'} = 0$, illorum applicatae sunt aut maxima aut minima. Aequatio qua determinantur vertices hi, est

$$4g^2 \sin^4 y' \cos^2 y' - (h^2 - e\sin^2 y')^2 = 0, \text{ sive}$$

$$-4g^2 (\sin^6 y' - \frac{4g^2 - e^2}{4g^2} \sin^4 y' - \frac{h^2 e}{2g^2} \sin^2 y' - \frac{h^4}{4g^2}) = 0.$$

Radices huius aequationis omnino congruunt cum radicibus aequationis

$$\cos^6 y - \frac{4g^2-e^2}{4g^2}\cos^4 y - \frac{h^2 e}{2g^2}\cos^2 y + \frac{h^4}{4g^2} = 0$$

in articulo (7.) inventis, et quum huius radices sunt $\cos^2 y = \cos^2\alpha$, $\cos^2 y = \cos^2\beta$ et $\cos^2 y = -\frac{1}{\operatorname{tang}^2\gamma}$, illius radices erunt

$$\sin^2 y' = \cos^2\alpha, \quad \sin^2 y' = \cos^2\beta, \quad \sin^2 y' = -\frac{1}{\operatorname{tang}^2\gamma},$$

quarum, quia $\alpha < \beta$ esse suppositum est, secunda $\cos^2\beta < \cos^2\alpha$ est. Etiam huic curvae duo sunt vertices reales A' et B' reciprocitatis lege coniuncti cum verticibus A et B curvae primitivae. Formulae enim

$$\sin y = \sin\alpha\, snc^2 u + \sin\beta\, cnc^2 u \text{ et } \sin y' = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{(\cos^2\alpha\, cnc^2 u + \cos^2\beta\, snc^2 u)}}$$

posito $u = 0$ praebent $\sin y = \sin\alpha$ et $\sin y' = \cos\alpha$, et posito $u = K$ praebent $\sin y = \sin\beta$ et $\sin y' = \cos\beta$. Quare applicata verticis A' est $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ et verticis B' est $\frac{1}{2}\pi - \beta$.

Etiam curva reciproca tota continetur inter duos circulos minores, quorum radii sunt α et β, et qui paralleli sunt lineae abscissarum; curva et hos alternatim tangit in verticibus A', B', A'_1, B'_1, A'_2, B'_2, etc. Vertices A', A'_1, A'_2, etc. sunt vero inferiores et vertices B', B'_1, B'_2, etc. sunt superiores.

Simul patet, esse radicale $\sqrt{(4g^2\sin^4 y'\cos^2 y' - (h^2 - e\sin^2 y')^2)}$
$= 2g\sqrt{[(\cos\alpha^2 - \sin^2 y')(\sin^2 y' - \cos^2\beta)(\sin^2 y' + \cot^2\gamma)]}$

$$= \frac{2g}{\sin\gamma}\sqrt{[(\cos^2\alpha - \sin^2 y')(\sin^2 y' - \cos^2\beta)(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma.\sin^2 y')]},$$

ita ut applicatae y' limites sint $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ et $\frac{1}{2}\pi - \beta$.

14.

Revertendo aequationem $\sin y' = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{(\cos^2\alpha\, cnc^2 u + \cos^2\beta\, snc^2 u)}}$ oriuntur formulae, quarum ope functiones modulares argumenti u ad modulum k relati computantur ex applicata y' puncti M', scilicet:

$$1.\quad \begin{cases} sncu = \sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha(\sin^2 y' - \cos^2\beta)}{(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)\sin^2 y'}}, \\ cncu = \sqrt{\dfrac{\cos^2\beta(\cos^2\alpha - \sin^2 y')}{(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)\sin^2 y'}}, \\ tncu = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sqrt{\dfrac{\sin^2 y' - \cos^2\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2 y'}}, \\ dncu = \sqrt{\dfrac{\cos^2\beta(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\sin^2 y')}{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\sin^2 y'}}, \\ \text{et} \\ snu = \sqrt{\dfrac{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)(\cos^2\alpha - \sin^2 y')}{(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\sin^2 y')}}, \\ cnu = \sqrt{\dfrac{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)(\sin^2 y' - \cos^2\beta)}{(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\sin^2 y')}}, \\ tnu = \sqrt{\dfrac{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)(\cos^2\alpha - \sin^2 y')}{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)(\sin^2 y' - \cos^2\beta)}}, \\ dnu = \sqrt{\dfrac{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)\sin^2 y'}{\cos^2\alpha(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\sin^2 y')}}, \end{cases}$$

E formulis his differentiando nanciscimur:

$$\frac{\partial u}{\cos\alpha\sqrt{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)}} = \frac{-\partial\sin y'}{\sqrt{[(\cos^2\alpha - \sin^2\gamma')(\sin^2 y - \cos^2\beta)(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\sin^2 y')]}},$$

quare, si brevitatis causa paullisper ponimus

$$n = \frac{\sin\gamma}{2g\cos\alpha\sqrt{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)}}, \quad \text{est}$$

$$2.\qquad \frac{-\partial\sin y'}{\sqrt{(4g^2\sin^4 y'\cos^2 y' - (h^2 - e\sin^2 y')^2)}} = n\,.\,\partial u,$$

qua formula utimur in integratione aequationis differentialis curvae reciprocae in articulo praecedenti inventae, et quae nunc fit

$$\partial x' = \frac{n(h^2 - e\sin^2 y').\partial u}{\cos^2 y'} = ne\partial u + \frac{n(h^2-e)}{\cos^2 y'}\,.\,\partial u.$$

Quia vero

$$\sin^2 y' = \frac{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)\cos^2\gamma\,.\,sn^2 u}{1-\sin^2\beta\sin^2\gamma + (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)\sin^2\gamma\,sn^2 u}, \quad \text{ideoque}$$

$$\cos^2 y' = \frac{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\sin^2\alpha + (\cos^2\alpha - \cos^2\beta).sn^2 u}{1-\sin^2\beta\,\sin^2\gamma + (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)\sin^2\gamma\,sn^2 u}, \quad \text{est primo}$$

$$x = ne\,.\,u + n(h^2-e)\,.\int_0 \frac{1-\sin^2\beta\sin^2\gamma + (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)\sin^2\gamma\,.\,sn^2 u}{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\sin^2\alpha + (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)sn^2 u}\,.\,\partial u.$$

Et quia $\dfrac{A + B\,sn^2 u}{C + D\,sn^2 u} = \dfrac{A}{C} + \dfrac{BC - AD}{C^2}\cdot\dfrac{sn^2 u}{1 + \dfrac{D}{C}sn^2 u}$, duce hac formula invenis decomponendo:

$$x' = n(e + \frac{h^2-e}{\sin^2\alpha}) \,.\, u - M \,.\, \int_0 \frac{sn^2 u \,.\, \partial u}{1 + \frac{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\sin^2\alpha} \,.\, sn^2 u},$$

si brevitatis causa intelligitur

$$M = \frac{n(h^2-e)(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)}{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma) \,.\, sn^4\alpha}.$$

Integrale hoc comparandum est cum $S(u, a') = \int_0 \frac{k^2 tn' a' \, dn' a' \,.\, sn^2 u \,.\, \partial u}{cn'^2 a' (1 + k^2 tn'^2 a' \,.\, sn^2 u)}$, ponendo

$$k^2 tn'^2 a' = \frac{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\sin^2\alpha}, \quad \text{sive} \quad tnc' a' = \sqrt{\frac{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\sin^2\alpha}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}},$$

quae formula, quum $tn'(a-b) = \sqrt{\frac{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\sin^2\alpha}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}$ esse in articulo (10.) vidimus, edocet esse parametrum

$$a' = K' - (a-b).$$

Quia insuper invenitur $\frac{k^2 tn' a' \, dn' a'}{cn'^2 a'} = M$, est

$$x' = n(e + \frac{h^2-e}{\sin^2\alpha}) \,.\, u = S(u, K'-a+b).$$

Est vero $ne = \frac{e}{2g} \cdot \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\sqrt{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)}}$ et $\frac{n(h^2-e)}{\sin^2\alpha} = \frac{h^2-e}{2g\sin^2\alpha} \cdot \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\sqrt{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma}}$, quare, quia $\frac{e}{2g} + \frac{h^2-e}{2g\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$ reducendo invenitur, est tandem

$$x' = \frac{\sin\gamma \,.\, u}{\operatorname{tang}\alpha\sqrt{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)}} - S(u, K'-a+b).$$

Quia integrale $S(u, K'-a+b) = \frac{snc'(a-b)}{sn(a-b)} u - D(u, K'-a+b)$, et quia e formulis articuli (10.) componis $\frac{snc'(a-b)}{sn'(a-b)} = \frac{\sin\beta}{\operatorname{tang}\alpha\sqrt{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)}}$, adhibita relatione $\sin\gamma - \sin\beta = \frac{\sin\alpha\cos^2\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}$ invenis

$$3. \qquad x' = mhu + D(u, K-a+b).$$

qua in formula signi m idem est valor, qui in articulo (8.), scilicet $m = \sqrt{\frac{\sin\gamma}{2g(1+\sin\beta\sin\gamma)}}$, ideoque $mh = \sqrt{\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{1+\sin\beta\sin\gamma}} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{(1+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)}}$, et quantitates a et b eaedem quae in articulis (9. et 10.).

15.

E praeceptis Geometriae sphaericae notissimum est, duabus curvis reciprocis aequalis esse lineas subtangentes ad puncta reciproca pertinentes, et

quadrante non maiores. Quam lineam subtangentem si $= \frac{1}{2}\pi - \Phi$ ponimus, est $\text{tang}\,(\frac{1}{2}\pi - \Phi) = \cot\Phi = \text{tang}\,\Theta\,.\sin\gamma$ et $\cot\Phi = \text{tang}\,\Theta'.\sin\gamma'$, quare invenis

$$1.\quad \cot\Phi = \frac{h\sin y}{\sqrt{[(e+2g\sin y)\cos^2 y - h^2]}},\ \text{et}\ \cot\Phi = \frac{(h^2 - e\sin^2 y')\sin\gamma'}{\sqrt{[4g^2\sin^4 y'\cos^2 y' - (h^2 - e\sin^2 y')^2]}};$$

ideoque

$$2.\quad \cos\Phi = \frac{h\,\text{tang}\,y}{\sqrt{(2g\sin y + e - h^2)}},\ \text{et}\ \cos\Phi = \frac{(h^2 - e\sin^2 y')\,\text{tang}\,y'}{\sqrt{[4g^2\sin^4 y' - (h^2 - e\sin^2 y')^2]}}.$$

Insuper notum est, abscissarum ad puncta reciproca pertinentium differentiam esse complementum lineae subtangentis, sive

$$x' - x = \Phi.$$

Vice versa est $x = x' - \Phi$, ideoque

$$3.\quad x = mh.u + D(u, K' - a + b) - \Phi.$$

Quare praeter formulam $x = 'D(u, a) + D(u, b)$ articuli (9.) aliam invenimus, dummodo argumentum u ex applicata γ computas ope formularum (3. articuli 8.), et parametrum $K' - a + b$, aut ope formularum (1. art. 9.), aut ope formularum articuli (10.).

Arcum auxiliarem Φ etiam computabis e formula

$$4.\quad \cos\Phi = \text{tang}\,\gamma\,.\sqrt{\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma.\sin y - \sin\alpha\sin\beta}}.$$

Quia in verticibus ipsis est $\Phi = 0$ et $\cos\Phi = 1$, formula fit

$$5.\quad X = mh.K + D(K, K' - a + b),$$

in qua, uti in articulo (9.), est X abscissa verticis B, abscissarum initio ita sumta, ut abscissa verticis A sit $= 0$. Vides ergo esse abscissam $X = X'$, si X' est abscissa applicatis punctorum A' et B' intercepta.

16.

Si arcus curvae reciprocae $A'M' = s'$ ponitur, nota formula $\partial s' = \sqrt{(\partial y'^2 + \cos^2 y'.\partial x'^2)}$ praebet $\partial s = \frac{-2g.\sin^2 y'.\partial\sin y'}{\sqrt{[4g^2\sin^4 y'\cos^2 y' - (h^2 - e\sin^2 y')^2]}}$, sive simpliciorem

$$\partial s' = 2ng.\sin^2 y'.\partial u,$$

quae substituto eodem valore, quo in articulo (14.) usi sumus, functionis $\sin^2 y'$ abit in

$$\partial s' = 2ng \cdot \frac{(1-\sin^2\beta\sin^2\gamma)\cos^2\alpha-(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)\cdot\cos^2\gamma\cdot sn^2u}{1-\sin^2\beta\sin^2\gamma+(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)\sin^2\gamma\, sn^2u},$$

quare decomponendo fit

$$s' = 2ng\cos^2\alpha\cdot u - M\cdot\int_0 \frac{sn^2u\,\partial u}{1+\frac{\sin^2\gamma(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)}{1-\sin^2\beta\sin^2\gamma}\cdot sn^2u},$$

si brevitatis causa intelligitur $M = \frac{2ng(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)}{1-\sin^2\beta\sin^2\gamma}$. Integrale si comparatur cum integrali $S(u, b') = \int_0 \frac{k^2tn'b'dn'b'\cdot sn^2u\cdot\partial u}{cn'^2b'(1+k^2tn'^2b'\cdot sn^2u)}$, ponendum est $k^2tn'^2b' = \frac{\sin^2\gamma(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)}{1-\sin^2\beta\sin^2\gamma}$, sive $tnc'b' = \sqrt{\frac{1-\sin^2b\sin^2\gamma}{(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)\sin^2\gamma}}$, et cum idem radicale est valor functionis $tn'(a+b)$ in articulo (**10.**) inventus, est $K'-b' = a+b$, ideoque

$$b' = K' - a - b.$$

Quum porro productum $\frac{k^2tn'b'\,dn'b'}{cn'^2b'} = \frac{k^2tnc'(a+b)dnc'(a+b)}{cnc'^2(a+b)}$ compositum e valoribus in articulo (**10.**) functionum modularium inventis reperitur $= M$, patet formula simplicior

$$s' = 2ng\cos^2\alpha\cdot u - S(u, K'-a-b),$$

et cum insuper $\frac{snc'(a+b)}{sn'(a+b)} = 2ng\cos^2\alpha$ esse levi negotio monstrabis, formula fit

1. arcus $A'M' = s' = D(u, K'-a-b)$,

in qua functiones argumenti u sunt eaedem, quae in formulis (**1.** art. **14.**), parameter vero $K'-a-b$ computatur aut e formulis (**1.** articuli **9.**), aut e formulis articuli (**10.**).

Si arcum $A'M'$ inde a vertice A' usque ad verticem proxime sequentem B' vis extendere, argumentum $u = K$ sumendum est, quare est

$$\text{arcus } A'B' = D(K, K'-a-b).$$

Quia vero arcus $B'M' = A'B' - A'M' = D(K, K'-a-b) - D(u, K'-a-b)$, est

2. arcus $B'M' = {}'C(K-u, a+b)$.

Arcu $A'M' = s'$ etiam uti possumus in invenda quadratura sive area f curvae primitivae. E praeceptis Geometriae sphaericae generalibus circa areas figurarum sphaericarum, quarum latera sunt arcus curvarum qualiumcunque, applicatis ad inveniendam aream quadrigoni f, quod praeter angulos tres rectos continet angulum Θ formulis (**1.** articuli 4.) determinatum, et cuius lateris

AM versus quadrigoni aream convexi arcus reciprocus est s', patet formula $f = \Theta + s' - \frac{1}{2}\pi$, sive

$$f = D(u, K' - a - b) - (\tfrac{1}{2}\pi - \Theta),$$

et quia $\cos(\frac{1}{2}\pi - \Theta) = \sin\Theta = \frac{h}{\cos y \sqrt{(e + 2g\sin y)}}$, est

$$3. \qquad \text{area } f = D(u, K' - a - b) - \text{arc cos}\left(\frac{h}{\cos y\sqrt{(e+2g\sin y)}}\right).$$

Quia in verticibus ipsis est $\frac{1}{2}\pi - \Theta = 0$, invenis aream

$$4. \qquad F = D(K, K' - a - b),$$

ideoque arcui $A'B'$ aequalem.

17.

Integratione eruenda superest quadratura curvae reciprocae; si f' est quadrigonum, cuius latera sunt abscissa x', arcus $AM = s'$ et applicatae punctorum A' et M', est $\partial f' = \sin y' . \partial x'$, ideoque

$$\partial f' = \frac{-(h^2 - e\sin^2 y') . \sin y' . \partial \sin y'}{\cos^2 y' \sqrt{(4g^2 \sin^4 y' \cos^2 y' - (h^2 - e\sin^2 y')^2]}}.$$

Ut integratio huius formulae differentialis succedat, adhibendae sunt functiones modulares argumenti v, relatae ad modulum

$$\lambda = \sqrt{\frac{(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)\sin^2\gamma}{1 - \sin^2\alpha\sin^2\gamma}}, \quad \text{cuius complementarius est}$$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1 - \sin^2\beta\sin^2\gamma}{1 - \sin^2\alpha\sin^2\gamma}}.$$

E formula $\sin y' = \sqrt{(\cos^2\alpha . cn^2 v + \cos^2\beta . \sin^2 v)}$ derivabis sequentes:

$$1. \qquad \begin{cases} sn\, v = \sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2 y'}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}}, \\ cn\, v = \sqrt{\dfrac{\sin^2 y' - \cos^2\beta}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}}, \\ tn\, v = \sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2 y'}{\sin^2 y' - \cos^2\beta}}, \\ dn\, v = \sqrt{\dfrac{\cos^2\gamma + \sin^2\gamma . \sin^2 y'}{1 - \sin^2\alpha\sin^2\gamma}}, \end{cases}$$

e quibus differentiando obtinebis

$\partial v = \frac{-\sin y' \partial \sin y' . \sqrt{(1 - \sin^2\alpha\sin^2\gamma)}}{\sqrt{[(\cos^2\alpha - \sin^2 y')(\sin^2 y' - \cos^2\gamma)(\cos^2\gamma + \sin^2 y')]}}$. Si nunc brevitatis causa sumis

$$n = \frac{\sin\gamma}{2g\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)}}, \quad \text{est}$$

$$\frac{-\sin y'.\partial\sin y'}{\sqrt{[4g^2\sin^4 y'\cos^2 y' - (h^2-e\sin^2 y')^2]}} = n.\partial v, \quad \text{ideoque}$$

$$\partial f = \frac{n(h^2-e\sin^2 y').\partial v}{\cos^2 y'}, \quad \text{sive} \quad f' = ne.v + \int_0 \frac{n(h^2-e)}{\cos^2 y'}.\partial v.$$

Si in hac formula substituis $\cos^2 y' = \sin^2\alpha + (\sin^2\beta - \sin^2\alpha).sn^2 v$, habes integrandam

$$f' = nev + \frac{n(h^2-e)}{\sin^2\alpha}.\int_0 \frac{\partial v}{1+\frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}.sn^2 v}.$$

Quia vero $\int_0 \frac{\partial v}{sn' q\, snc' q(1+\lambda^2 tn'^2 q.sn^2 v)} = \frac{u}{sn' q\, snc' q} - S(v, q) = \frac{v}{tn' q\, dn' q} + C(v, q)$ $= \frac{dn' q}{tn' q}v + D(v, q)$, si functiones argumenti v ad modulum λ et parametri q ad modulum λ' referuntur, ponamus $\lambda^2 tn'^2 q = \frac{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$, sive

$$2. \quad \begin{cases} tnc' q = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}}, & \text{quare} \\ snc' q = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \\ dn' q = \sin\beta\sin\gamma, \\ cn' q = \sin\alpha\sin\gamma, \\ sn' q = \sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)}, \end{cases}$$

e quibus componis $\frac{1}{sn' q\, snc' q} = \frac{n(h^2-e)}{\sin^2\alpha}$. Patet igitur primo formula

$$f' = nev + \frac{dn' q}{tn' q}.v + D(v, q).$$

Quia vero $\frac{dn' q}{tn' q} = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)}}$ et $ne = \frac{1-(\sin\alpha+\sin\beta)\sin\gamma}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\beta)}}$, summa $ne + \frac{dn' q}{tn' q} = \frac{(1-\sin\alpha\sin\gamma)(1-\sin\beta\sin\gamma)}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)}} = \frac{\cos^2\gamma}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)}}$ invenitur, ideoque area

$$3. \quad f' = \frac{\cos^2\gamma.v}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\gamma)}} + D(v, q).$$

Si formulas (2.) comparas cum formulis (12. art. 11.), videbis esse

$$2L' - 2p = q, \quad \text{ideoque}$$

$$4. \quad \tfrac{1}{2}q = L' - p, \quad \text{et} \quad p = L' - \tfrac{1}{2}q.$$

Eadem relatio etiam hoc modo patefit. Quia $dn'\frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{dn'q+cn'q}{1+cn'q}}$, est $dn'\frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{(\sin\alpha+\sin\beta)\sin\gamma}{1+\sin\alpha\sin\gamma}} = dnc'p$, quare $\frac{1}{2}q = L' - p$, ut antea.

Eadem area f' e praeceptis Geometriae sphaericae generalibus alio etiam modo computatur. Quadrigonum f' praeter angulos tres rectos continet angulum quartum angulo Θ' deinceps positum, et quia lateris s' versus quadrigoni aream f' convexi arcus reciprocus est $AB = s = 2.'C(\varphi, p)$ in articulo (11.) inventus, valet formula

$$f' = s + \tfrac{1}{2}\pi - \Theta', \quad \text{sive}$$

$$5. \qquad f' = 2.'C(\varphi, p) + \arccos\left(\frac{h^2 - e\sin^2 y'}{2g\sin^2 y'\cos y'}\right),$$

in qua argumentum φ determinatur formulis modo inventis (1.), parameter p vero formulis (8. art. 11.).

Scriptum anno 1846, m. Januarii.

13.

Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Freyburg im Br.)

(Schluss der Abhandlung No. 1., 7., 11. und 17., Bd. 33., No. 3., Bd. 35. und No. 11., Bd. 38.)

§. 47.

Wir benutzen jetzt den Ausdruck (6. §. 46.) und setzen darin $f(y) = x^{p-1}$, $f(z) = (1-x^q)^n$. Dies giebt

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n fx\,\partial x$$

$$= a_0\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\partial x + a_1\int_0^1 x^p(1-x^q)^n\partial x + a_2\int_0^1 x^{p+1}(1-x^q)^n\partial x \ldots.$$

Integrirt man rechts vom Gleichheitszeichens nach (3. §. 33.), so erhält man

$$1. \qquad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n fx\,\partial x$$

$$a_0\frac{1^{\frac{p}{q}|1}\,1^{n|1}}{1^{\frac{p}{q}+n|1}} + a_1\frac{1^{\frac{p+1}{q}|1}.1^{n|1}}{(p+1)1^{\frac{p+1}{q}+n|1}} + a_2\frac{1^{\frac{p+2}{q}|1}\,1^{n|1}}{(p+2)1^{\frac{p+2}{q}+n|1}} + \ldots.$$

Die Reihe in dieser Formel folgt einem ziemlich verwickelten Gesetze. Um sie zu vereinfachen, sei $q = 1$. Dann geht (1.) in

$$2. \qquad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^n fx\,\partial x$$

$$= \frac{1^{p-1|1}.1^{n|1}}{1^{p+n|1}}\left(a_0 + a_1\frac{p}{p+n+1} + a_2\frac{p^{2|1}}{(p+n+1)^{2|1}} + a_3\frac{p^{3|1}}{(p+n+1)^{3|1}}\ldots.\right)$$

über. Um diese Gleichung zu benutzen, ist

$$fx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^2 + a_4x^4 + \ldots.$$

so anzunehmen, dass sie für sich und mit der Formel (2.) summirbar wird. Geschieht dies, so lässt sich das Integral (20.) darstellen. Berücksichtigt man die bekannte Formel

$$3. \qquad \cos(2n \text{ arc.sin } \sqrt{u})$$

$$= 1 - \frac{n^2}{1^{2|1}}.2^2u + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.3.4}.2^4u^2 - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)}{1.2.3.4.5.6}2^6u^3 + \ldots.$$

und setzt arc sin $\sqrt{u} = x$, so ergiebt sich

4. $\cos 2nx = 1 - n \cdot \frac{n}{\frac{1}{2}} (\sin x)^2 + (n)_2 \frac{n^{2|1}}{(\frac{1}{2})^{2|1}} (\sin x)^4 - (n)_3 \frac{n^{3|1}}{(\frac{1}{2})^{3|1}} (\sin x)^6 + \ldots.$

Setzt man nun in (2.) $n - p - 1$ statt n, und dann statt $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots.$ die Vorzahlen aus (4. oder 3.) in die so umgeformte Reihe, so erhält man

$$5. \quad \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{n-p-1} fx\, \partial x$$
$$= \frac{1^{p-1|1}\, 1^{n-p-1|1}}{1^{n-1|1}} \left(1 - n \cdot \frac{p}{\frac{1}{2}} x + (n)_2 \cdot \frac{p^{2|1}}{(\frac{1}{2})^{2|1}} x^2 - (n)_3 \frac{p^{3|1}}{(\frac{1}{2})^{3|1}} x^3 + \ldots.\right).$$

Wird nach dem Obigen $fx = \cos 2nx$ gesetzt, so geht x in $(\sin x)^2$ über. Man hat also $x = \sin x$, $1 - x = (\cos x)^2$ und $\partial x = 2 \sin x \cos x \partial x$ in (5.) einzuführen. Dies giebt aus (5.), wenn man zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ integrirt:

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2n-2p-1} \cos 2nx$$
$$= \frac{1^{p-1|1} \cdot 1^{n-p-1|1}}{2 \cdot 1^{n-1|1}} \left(1 - \frac{np}{\frac{1}{2}} + (n)_2 \frac{p^{2|1}}{(\frac{1}{2})^{2|1}} - (n)_3 \frac{p^{3|1}}{(\frac{1}{2})^{3|1}} + \ldots.\right).$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe führt nach (10. §. 32.), wenn $b = p$, und $a = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, und nach (13. §. 11.), zu folgendem Ausdrucke:

$$\frac{(\frac{1}{2} - p)^{n|1}}{(\frac{1}{2})^{n|1}} = \frac{1^{n-p-\frac{1}{2}|1} \cdot 1^{-\frac{1}{2}|1}}{1^{-p-\frac{1}{2}|1} \cdot 1^{n-\frac{1}{2}|1}}.$$

Demnach erhält man aus der obigen Formel:

$$6. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2n-2p-1} \cos 2nx\, \partial x = \frac{1^{p-1|1} \cdot 1^{n-p-1|1} \cdot 1^{n-p-\frac{1}{2}|1} \cdot 1^{-\frac{1}{2}|1}}{2 \cdot 1^{n-1|1} \cdot 1^{-p-\frac{1}{2}|1} \cdot 1^{n-\frac{1}{2}|1}}.$$

Diese Gleichung gilt unbeschränkt für alle Werthe von n und p, welche die Natur der Facultäten zulässt. Im vorliegenden Falle wurde $n > p$ angenommen. Bedeuten nun, wie hier vorausgesetzt wurde, n und p ganze Zahlen, so lässt sich der Ausdruck (6.) rechts auf folgende Weise umformen. Nach (§. 13.) ist

$$1^{-\frac{1}{2}|1} = \sqrt{\pi}, \quad 1^{n-p-\frac{1}{2}|1} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1^{n-p|2}}{2^{n-p}}, \quad 1^{n-\frac{1}{2}|1} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1^{n|2}}{2^n}, \quad 1^{-p-\frac{1}{2}|1} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 2^p}{(-1)^p \cdot 1^{p|2}}.$$

Werden diese Werthe in (6.) substituirt, und gehörig geordnet, so geht (6.) in

$$7. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2n-2p-1} \cos 2nx\, \partial x = (-1)^p \frac{1^{2p-1|1} \cdot 1^{2n-2p-1}}{1^{2n-1|1}}$$

über. Setzt man hierin $n - p$ statt p, so folgt aus (7.)

$$8. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2n-2p-1} (\cos x)^{2p-1} \cos 2nx\, \partial x = (-1)^{n-p} \frac{1^{2n-2p-1|1} \cdot 1^{2p-1|1}}{1^{2n-1|1}}.$$

Hieraus folgt

$$9. \quad (-1)^{n-p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{2p-1}(\cos x)^{2n-2p-1}\cos 2nx\,\partial x$$
$$=(-1)^p.\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{2n-2p-1}(\cos x)^{2p-1}\cos 2nx\,\partial x.$$

Man kann in (7. und 8.) $n-p=q$ setzen. Dann wird $n=p+q$ und man erhält

$$10. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{2p-1}(\cos x)^{2q-1}\cos 2(p+q)x\,\partial x=(-1)^p\,\frac{1^{2p-1|1}1^{2q-1|1}}{1^{2p+2q-1|1}},$$

$$11. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{2q-1}(\cos x)^{2p-1}\cos 2(p+q)x\,\partial x=(-1)^q.\frac{1^{2p-1|1}.1^{2p-1|1}}{1^{2q+2p-1|1}},$$

$$12. \quad (-1)^q\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{2p-1}(\cos x)^{2q-1}\cos 2(p+q)x\,\partial x$$
$$=(-1)^p\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{2q-1}(\cos x)^{2p-1}\cos 2(p+q)x\,\partial x.$$

Setzt man in (6.) für p eine gebrochene Zahl und $\frac{p}{q}$ statt p, so geht die Gleichung (6.) in

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{\frac{2p}{q}-1}(\cos x)^{2n-\frac{2p}{q}-1}\cos 2nx\,\partial x=\frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}.1^{n-\frac{p}{q}-1|1}.1^{n-\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{2.1^{n-1|1}.1^{-\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}.1^{n-\frac{1}{2}|1}}$$

über. Nun ist

$$1^{n-\frac{p}{q}-1|1}=1^{-\frac{p}{q}|1}(1-\frac{p}{q})^{n-1|1}=1^{-\frac{p}{q}|1}.\frac{2^{n-1}(q-p)^{n-1|q}}{(2q)^{n-1}}=1^{-\frac{p}{q}|1}\frac{(-2p+2q)^{n-1|2q}}{(2q)^{n-1}},$$

$$1^{n-\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}=1^{-\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}(\tfrac{1}{2}-\frac{p}{q})^{n|1}=1^{-\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}\,\frac{(q-2p)^{n|2q}}{(2q)^n},$$

$$1^{n-\frac{1}{2}|1}=1^{-\frac{1}{2}|1}\,\frac{1^{n|2}}{2^n}.$$

Werden diese Werthe eingeführt, so erhält man nach den nöthigen Reductionen:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{\frac{2p}{q}-1}(\cos x)^{2n-\frac{2p}{q}-1}\cos 2nx\,\partial x=\tfrac{1}{2}.1^{\frac{p}{q}-1|1}1^{-\frac{p}{q}|1}.\frac{(-2p+q)^{2n-1|q}}{1^{2n-1|1}.q^{2n-1}}.$$

Diese Gleichung geht nach (**20.** §. **26** und **13.** §. **11.**) in

$$13. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{\frac{2p}{q}-1}(\cos x)^{2n-\frac{2p}{q}-1}\cos 2nx\,\partial x$$
$$=\frac{\pi}{2\sin\frac{p}{q}\pi}\,\frac{(-2p+q)^{2n-1|q}}{1^{2n-1|1}q^{2n-1}}=\frac{\pi}{2\sin\frac{p}{q}\pi}.\frac{1^{2n-\frac{2p}{q}-1|1}}{1^{2n-1|1}1^{-\frac{2p}{q}|1}}$$

über. In dieser Gleichung kann auch n eine gebrochene Zahl sein. Setzt man $\frac{1}{2}n$ statt n und $\frac{1}{2}p$ statt p, so erhält man

14. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{\frac{p}{q}-1} (\cos x)^{n-\frac{p}{q}-1} \cos nx\, \partial x = \frac{\pi}{2\sin\frac{p}{q}.\frac{1}{2}\pi} \cdot \frac{\mathbf{1}^{n-\frac{p}{q}-1|1}}{\mathbf{1}^{n-1|1}\mathbf{1}^{-\frac{p}{q}|1}}$$

Für $n = 1$ erhält man

15. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{\frac{p}{q}-1} (\cos x)^{1-\frac{p}{q}}\, \partial x = \frac{\pi}{2\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Es ist noch der Fall erörtern, wenn n und p gleichzeitig echte Brüche sind. Für diesen Fall sind folgende Sätze aus (§. 11.) zu Hülfe zu nehmen, die sich leicht rechtfertigen lassen:

16. $$a^{n|2d}(a+d)^{n|2d} = a^{2n|d}, \qquad a^{n|2d}(a+2d)^{n-1|2d} = a^{2n-1|d}.$$

Da diese Gleichungen für jeden Werth von n gelten, so ist auch

17. $$a^{\frac{n}{m}|2d}(a+d)^{\frac{n}{m}|2d} = a^{\frac{2n}{m}|d} \quad \text{und} \quad a^{\frac{n}{m}|2d} a^{\frac{n}{m}-1|2d} = a^{\frac{2n}{m}-1|d}.$$

Eben so ist aus (3. §. 11.)

18. $$d^{\frac{n}{m}}\mathbf{1}^{\frac{n}{m}|1} = d^{\frac{n}{m}|d}.$$

Ausser diesen Sätzen ist noch (4. §. 11.) zu benutzen. Setzt man in (6.) $\frac{n}{m}$ statt n und $\frac{p}{q}$ statt p und multiplicirt Zähler und Nenner mit $\mathbf{1}^{\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}$, so ergiebt sich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{\frac{2p}{q}-1} (\cos x)^{\frac{2n}{m}-\frac{2p}{q}-1} (\cos \frac{2n}{m}x)\, \partial x = \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}-1|1}\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}-1|1}.\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}\mathbf{1}^{\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}.\mathbf{1}^{-\frac{1}{2}|1}}{2.\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-1|1}\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}\mathbf{1}^{\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}.\mathbf{1}^{-\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}}.$$

Nun ist $\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1} = \mathbf{1}^{-\frac{1}{2}|1}\frac{\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}|2}}{2^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}}}$, $\mathbf{1}^{\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1} = \sqrt{\pi}.\frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}|2}}{2^{\frac{p}{q}}}$, $\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1} = \sqrt{\pi}.\frac{\mathbf{1}^{\frac{n}{m}|2}}{2^{\frac{n}{m}}}$

und $\mathbf{1}^{\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1}\mathbf{1}^{-\frac{p}{q}-\frac{1}{2}|1} = \frac{\pi}{\cos\frac{p}{q}\pi}$. Werden diese Werthe eingeführt, geordnet und nach den Gleichungen (18. und 17.) behandelt, so ergiebt sich der Ausdruck

19. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{\frac{2p}{q}-1}(\cos x)^{\frac{2n}{m}-\frac{2p}{q}-1} \cos\frac{2n}{m}x\, \partial x = \cos\frac{p}{q}\pi.\frac{\mathbf{1}^{\frac{2p}{q}-1|1}\mathbf{1}^{\frac{2n}{m}-\frac{2p}{q}-1|1}}{\mathbf{1}^{\frac{2n}{m}-1|1}}.$$

Wird hierin $\frac{1}{2}p$ statt p und $\frac{1}{2}n$ statt n gesetzt, so ergiebt sich

20. $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{\frac{p}{q}-1}(\cos x)^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}-1} \cos\frac{n}{m}x\, \partial x = \cos\frac{p\pi}{2q} \cdot \frac{\mathbf{1}^{\frac{p}{q}-1|1}\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}-1|1}}{\mathbf{1}^{\frac{n}{m}-1|1}}.$$

Vergleicht man (19.) mit (7.) und bemerkt, dass $\cos p\pi = (-1)^p$ ist,

wenn p eine ganze Zahl bedeutet, so erkennt man aus der Uebereinstimmung beider Gleichungen, dass (19.) auch gilt, wenn $\frac{p}{q}$ und $\frac{n}{m}$ in ganze Zahlen übergehen, oder wenn $q = m = 1$ gesetzt wird. Dies gilt nicht von (20.). Diese Gleichung stimmt nicht mit (7.) überein. Die hier gemachten Unterscheidungen, welche in den hierher bezüglichen Schriften nicht gedacht wurden, scheinen nöthig, um die Bedeutung der vorstehenden Gleichungen zu fixiren. Man kann nun allerdings der Kürze wegen in (20.) p statt $\frac{p}{q}$ und n statt $\frac{n}{m}$ schreiben; dann geht diese Gleichung in

$$21. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{p-1} (\cos x)^{n-p-1} \cos nx \, \partial x = \cos \tfrac{1}{2} p\pi \times \frac{\mathbf{1}^{p-1|1} \mathbf{1}^{n-p-1|1}}{\mathbf{1}^{n+p-1|1}}$$

über. Für $n + p$ statt n erhält man hieraus

$$22. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{p-1} (\cos x)^{n-1} \cos (n+p) x \, \partial x = \cos \tfrac{1}{2} p\pi \cdot \frac{\mathbf{1}^{p-1|1} . \mathbf{1}^{n-1|1}}{\mathbf{1}^{n+p-1|1}}$$

u. s. w. Diese Gleichungen gelten jedoch nur unter der Voraussetzung, dass n und p gebrochene Zahlen sind. Vertauscht man in (22.) p und n, so folgt

$$23. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{n-1} (\cos x)^{p-1} \cos (n+p) x \, \partial x = \cos \tfrac{1}{2} n\pi \cdot \frac{\mathbf{1}^{n-1|1} . \mathbf{1}^{n-1|1}}{\mathbf{1}^{p+n-1|1}}.$$

Aus (22. und 23.) erhält man

$$24. \quad \cos \tfrac{1}{2} n\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{p-1} (\cos x)^{n-1} \cos (n+p) x \, \partial x$$
$$= \cos \tfrac{1}{2} p\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{n-1} (\cos x)^{p-1} \cos (n+p) x \, \partial x.$$

Multiplicirt und dividirt man unter der Voraussetzung, dass p und n Brüche sind, die Gleichung (6.) mit $\mathbf{1}^{-p|1}$ und $\mathbf{1}^{p-\frac{1}{2}|1}$, so ergiebt sich auf ganz einfache Weise:

$$25. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2n-2p-1} \cos 2nx \, \partial x = \frac{\mathbf{2}^{2n-2}}{\operatorname{tang} p\pi} \cdot \frac{\mathbf{1}^{n-p-1|1} \mathbf{1}^{n-p-\frac{1}{2}|1} \mathbf{1}^{p-\frac{1}{2}|1}}{\mathbf{1}^{2n-1|1} \mathbf{1}^{-p|1}}.$$

Diese Gleichung lässt sich auf die Form

$$26. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2n-2p-1} \cos 2nx \, \partial x = \frac{\pi}{2 \operatorname{tang} p\pi} \cdot \frac{(\mathbf{2-2}p)^{n-1|2} . \mathbf{1}^{n-p|2} \mathbf{1}^{p|2}}{\mathbf{1}^{2n-1|1}}$$

bringen. Für $n + p$ statt n wird daraus

$$27. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2n-1} \cos 2(n+p) x \, \partial x = \frac{\pi}{2 \operatorname{tang} p\pi} \cdot \frac{(\mathbf{2-2}p)^{n+p-1|2} . \mathbf{1}^{n|2} \mathbf{1}^{p|2}}{\mathbf{1}^{2n+2p-1|1}}.$$

Es lassen sich aus der Gleichung (2.) noch andere Ableitungen machen. Wird nämlich in (2.) $p = \frac{1}{2}$, $n - \frac{1}{2} - 1$ statt n gesetzt, so erhält man

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-\frac{3}{2}} fx\,\partial x = \frac{\mathbf{1}^{-\frac{1}{2}|1}\mathbf{1}^{n-\frac{3}{2}|1}}{\mathbf{1}^{n-1|1}}\left(a_0 + \frac{a_1\frac{1}{2}}{n} + \frac{a_2(\frac{1}{2})^{3|1}}{n^{2\,1}} + \frac{a_3(\frac{1}{2})^{3|1}}{n^{3|1}} + \ldots.\right)$$

Wird nun wieder die Reihe (4.) benutzt und r statt n gesetzt, so ergiebt sich

$$\int \frac{(1-x)^{n-\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} fx\,\partial x = \frac{\sqrt{\pi}.\mathbf{1}^{n-\frac{3}{2}|1}}{\mathbf{1}^{n-1|1}}\left(1 - \frac{r.r}{n}x + (r)_2\frac{r^{2|1}}{n^{2|1}}x^2 - (r)_3\frac{r^{3|1}}{n^{3|1}}x^3 + \ldots.\right),$$

wenn die Grenzen dieses Integrals zwischen 0 und 1 genommen werden. Wird hierein $fx = \cos 2rx$ eingeführt, so erhält man nach (10. §. 32.):

$$28.\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos x)^{2n-2}\cos(2rx)\,\partial x = \frac{\sqrt{\pi}.\mathbf{1}^{n-\frac{1}{2}|1}(n-r)^{r|1}}{2.\mathbf{1}^{n-1|1}n^{r|1}}.$$

Die Gleichung geht, wenn Zähler und Nenner mit $\mathbf{1}^{n-r-1|1}$ multiplicirt werden und dann $n+1$ statt n gesetzt wird, in folgende über:

$$29.\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos x)^{2n}\cos 2rx\,\partial x = \frac{\pi.\mathbf{1}^{2n|1}}{2^{2n+1}.\mathbf{1}^{n+r|1}\mathbf{1}^{n-r|1}}.$$

In dieser Gleichung sind n und r von einander unabhängig. Setzt man $2r = p - q$ und $2n = p + q$, so ist $n + r = p$ und $n - r = q$ und man erhält aus (29.):

$$30.\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos x)^{p+q}\cos(p-q)x\,\partial x = \frac{\pi.\mathbf{1}^{p+q|1}}{2^{p+q+1}.\mathbf{1}^{p|1}.\mathbf{1}^{q|1}}.$$

Geht n in k über, so ergiebt sich leicht folgende Reductionsformel:

$$31.\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos x)^{2n+2k}\cos(2rx)\,\partial x = \frac{(2n+1)^{2k|1}}{2^{2k}(n+r)^{k|1}(n-r)^{k|1}}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos x)^{2n}(\cos 2rx)\partial x.$$

Diese Ausdrücke lassen sich auch umformen. Setzt man nämlich in (2.) $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x und entwickelt $\cos n(\frac{1}{2}\pi - x)$, so ergiebt sich

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos x)^{p-1}(\sin x)^{n-p-1}(\sin nx)\,\partial x = -\frac{\cos\frac{1}{2}n\pi}{\sin\frac{1}{2}n\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos x^{p-1}(\sin x)^{n-p-1}(\cos nx)\,\partial x$$
$$+ \frac{\cos\frac{1}{2}p\pi}{\sin\frac{1}{2}n\pi}\cdot\frac{\mathbf{1}^{p-1|1}\mathbf{1}^{n-p-1|1}}{\mathbf{1}^{n-1|1}}.$$

Aus (21.) findet sich, wenn man $n - p$ statt p schreibt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{n-p-1}(\cos x)^{p-1}\cos nx\,\partial x = \cos\tfrac{1}{2}(n-p)\pi\cdot\frac{\mathbf{1}^{n-p-1|1}\mathbf{1}^{p-1|1}}{\mathbf{1}^{n-1|1}}.$$

Wird dieser Werth in die vorstehende Gleichung eingeführt, so erhält man

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos x)^{p-1}(\sin x)^{n-p-1}(\sin x)\,\partial x = \frac{\cos\frac{1}{2}p\pi - \cos\frac{1}{2}n\pi.\cos\frac{1}{2}(n-p)\pi}{\sin\frac{1}{2}n\pi}\cdot\frac{\mathbf{1}^{p-1|1}\mathbf{1}^{n-p-1|1}}{\mathbf{1}^{n-1|1}}.$$

Wird nun $\cos\frac{1}{2}(n-p)\pi$ entwickelt und eingeführt, so erhält man

$$\frac{\cos\frac{1}{2}p\pi - \cos\frac{1}{2}n\pi.\cos\frac{1}{2}(n-p)\pi}{\sin\frac{1}{2}n\pi} = \sin\tfrac{1}{2}(n-p)\pi.$$

Dies giebt

$$32.\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos x)^{p-1}(\sin x)^{n-p-1}\sin nx\,\partial x = \sin(n-p)\tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{\mathbf{1}^{p-1|1}\mathbf{1}^{n-p-1|1}}{\mathbf{1}^{n-1|1}}.$$

Diese Gleichung gilt, wenn n und p gebrochene Zahlen sind; wie schon oben bemerkt.

Die Gleichung (30.) ist von *Cauchy* (Exerc. d. Mathém. Vol. II. pg. 368.) und von *Binet* (Journ. d. l'écol. polyt. Tom. XVI. pg. 164.) und die Gleichungen (7., 22., 29. und 32.) sind von *Kummer* (s. d. Journ. 17ter Bd. Seite 215. u. s. w.) aufgestellt, welcher Letztere die hier benutzte Methode dort zu noch anderweitigen Entwicklungen angewendet hat.

§. 48.

Auf gleiche Weise lässt sich das Integral

$$\int_0^\infty x^{p-1}.\sin bx.e^{-(ax)^q}\partial x$$

behandeln. Es ist nämlich

$$\sin bx = bx - \frac{b^3x^3}{1.2.3} + \frac{b^5x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{b^7.x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots.$$

Hiernach ist

$$1. \quad \int_0^\infty x^{p-1}\sin bx\, e^{-(ax)^q}\partial x$$

$$= b\int_0^\infty x^p e^{-(ax)^q}\partial x - \frac{b^3}{1^{3|1}}\int_0^\infty x^{p+2}e^{-(ax)^q}\partial x + \frac{b^5}{1^{5|1}}\int_0^\infty x^{p+n}e^{-(ax)^q}\partial x \ldots.$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{b^{2r-1}}{1^{2r-1|1}}\int_0^\infty x^{p+2r-2}\,e^{-(ax)^q}\partial x.$$

Nun ist nach (6. §. 36.)

$$2. \quad \frac{b^{2r-1}}{1^{2r-1|1}}\int_0^\infty x^{p+2r-2}\,e^{-(ax)^q}\partial x = \frac{b^{2r-1}}{1^{2r-1|1}}\cdot\frac{1^{\frac{p+2r-1}{q}|1}}{(p+2r-1)\,a^{p+2r-1}}.$$

Wird hier allmälig 1, 2, 3, ... statt r gesetzt, und werden dann die dadurch erhaltenen Werthe in (1.) eingeführt, so ergiebt sich

$$3. \quad \int_0^\infty x^{p-1}\sin bx\, e^{-(ax)^q}\partial x$$

$$= \frac{1^{\frac{p+1}{q}|1}\,b}{(p+1)a^{p+1}} - \frac{b^3}{1^{3|1}}\cdot\frac{1^{\frac{p+3}{q}|1}}{(p+3)a^{p+3}} - \frac{b^5}{1^{5|1}}\cdot\frac{1^{\frac{p+5}{q}|1}}{(p+5)a^{p+5}} + \ldots.$$

In dieser Reihe sind p, q, b, a von einander unabhängig und können also willkürlich angenommen werden. Von ihrer Annahme hängt die stärkere oder geringere Convergenz der Reihe ab. Behält man q als eine besondere Grösse bei, so ist leicht zu sehen, dass die Reihe um so weniger convergirt, je grösser p im Verhältniss zu q ist. Die Reihe wird immer convergiren, wenn $q>p$, $a>b$ ist. Stösst man die Grösse q aus und setzt $q=1$, so geht (3.) in

$$4. \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \sin bx \,.\, \partial x$$
$$= \frac{1^{p|1} b}{a^{p+1}} \left(1 - \frac{b^2}{1^{3|1}} \frac{(p+1)^{2|1}}{a^2} + \frac{b^4}{1^{5|1}} \frac{(p+1)^{4|1}}{a^4} - \frac{(p+1)^{6|1} b^6}{1^{7|1} a^6} \ldots.\right)$$

über. Diese Reihe convergirt, wenn $p \gtrless 1$ und $a > 1$ ist.

Es dürfte der Mühe werth sein, einige Fälle dieser Reihen näher zu betrachten. Setzt man $p = 0$ und $q = 1$, so giebt (3.):

$$5. \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} e^{-ax} \partial x = \frac{b}{a} - \frac{b^3}{3a^3} + \frac{b^5}{5a^5} - \frac{b^7}{7.a^7} + \ldots.$$

Da die Reihe rechts auf bekannte Ausdrücke führt, so erhält man

$$6. \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} e^{-ax} \partial x = \text{arc tang} \frac{b}{a} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-1} \lg \frac{a+b\sqrt{-1}}{a-b\sqrt{-1}}.$$

Für $b = a$ ergiebt sich

$$7. \quad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} e^{-ax} \partial x = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Wird in (6.) $a = 0$ gesetzt, so erhält man

$$8. \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} \partial x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Die Gleichung (7.) gilt für jedes a; also auch für $a = 0$. Für $b = 0$ geht (8.) in (7.) über. Setzt man $p = 1$ und $q = 1$, so ergiebt sich aus (3.), oder aus (4.):

$$\int_0^\infty \sin bx \,.\, e^{-ax} \partial x = \frac{b}{a^2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^6}{a^6} + \ldots.\right),$$

oder

$$9. \quad \int_0^\infty \sin bx \,.\, e^{-ax} \,.\, \partial x = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Es ist daher

$$10. \quad \int_0^\infty \sin x \,.\, e^{-x} \partial x = \tfrac{1}{2}.$$

Wird in (3.) $p = 0$ und $q = 2$ gesetzt, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} e^{-a^2x^2} \partial x = \frac{1^{\frac{1}{2}|1} b}{a} \left(1 - \frac{1}{1^{3|1}} \cdot \frac{(\frac{3}{2})^{1|1} . b^2}{3.a^2} + \frac{b^4 (\frac{3}{2})^{2|1}}{1^{5|1} 5a^4} - \frac{b_6 (\frac{3}{2})^{3|1}}{1^{7|1} 7a^6} + \ldots.\right)$$

Werden die an den Gliedern dieser Reihe nöthigen Veränderungen gemacht, so findet sich

$$11. \quad \int^\infty \frac{\sin bx}{x} e^{-a^2x^2} \partial x = \frac{b\sqrt{\pi}}{2a} \left(1 - \frac{b^2}{3(2a)^2} + \frac{b^4}{1.2.5(2a)^4} - \frac{b^6}{1.2.3.7(2a)^6} + \ldots.\right).$$

Hieraus erhält man folgenden Ausdruck:

$$12. \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} e^{-a^2x^2} \partial x = \frac{b}{2a}\sqrt{\pi} \int_0^1 e^{-(\frac{bx}{2a})^2} \partial x = \frac{b}{a}\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-(\frac{bx}{a})^2} \partial x.$$

Wird in (3.) $p = 1$ und $q = 2$ gesetzt, so erhält man

$$13. \quad \int_0^\infty \sin bx \,.\, e^{-(ax)^2} \partial x = \frac{b}{a^2}\left(\tfrac{1}{2} - \frac{b^2}{3.4a^2} + \frac{b^4}{4.5.6a^4} - \frac{b^6}{5.6.7.8a^6} + \ldots.\right)$$

Für $b = a$ wird hieraus

$$14. \quad \int_0^\infty \sin ax \,.\, e^{-(ax)^2} \partial x = \frac{1}{a}\left(\tfrac{1}{2} - \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5.6} - \frac{1}{5.6.7.8} + \ldots.\right).$$

Setzt man in (3.) $p = 2$ und $q = 2$, so ergiebt sich nach den nöthigen Reductionen:

$$\int_0^\infty x \sin bx\, e^{-(ax)^2} \partial x = \frac{b}{4a^3}\sqrt{\pi}\left(1 - \frac{b^2}{(2a)^2} + \frac{1}{1.2}\frac{b^4}{(2a)^4} - \frac{b^6}{1.2.3(2a^6} \ldots.\right)$$

oder

$$15. \quad \int_0^\infty x \sin bx\, e^{-(ax)^2} \partial x = \frac{b\sqrt{\pi}}{4a^3 e^{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}}.$$

Wird $\frac{1}{2}a$ statt a und a statt b gesetzt, so entsteht

$$16. \quad \int_0^\infty x \sin ax\, e^{\frac{-a^2x^2}{2.2}} \partial x = \frac{2\sqrt{\pi}}{e.a}.$$

Nimmt man nun $q = 3$ an, so können statt p die Werthe **0, 1, 2,** .... gesetzt werden. Führt man diese Werthe in (3.) ein und scheidet und ordnet die dadurch erhaltenen Glieder, so ergeben sich folgende Formeln:

$$17. \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} e^{-(ax)^3} \partial x = \frac{1^{\frac{1}{3}|1} b}{a}\left(1 - \frac{4^{2|3}}{1^{7|1}.7.3^2}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \frac{4^{4|3}}{1^{13|1}.13.3^4}\left(\frac{b}{a}\right)^{12} - \ldots.\right)$$
$$- \frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1}{1^{3|1}.3} - \frac{1^{3|1}}{1^{9|1}.9}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \frac{1^{5|1}}{1^{15|1}.15}\left(\frac{b}{a}\right)^{12} - \ldots.\right)$$
$$+ \frac{1^{\frac{2}{3}|1}.b^5}{a^5}\left(\frac{5}{3} - \frac{5^{3|3}}{1^{11|1}11.3^3}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \frac{5^{5|3}}{1^{17|1}.17.3^5}\left(\frac{b}{a}\right)^{12} - \ldots.\right),$$

$$18. \quad \int_0^\infty \sin bx\, e^{-(ax)^3} \partial x = \frac{1^{\frac{2}{3}|1}.b}{a^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{5^{2|3}}{1^{8|1}3^2}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \frac{5^{4|3}}{1^{14|1}3^4}\left(\frac{b}{a}\right)^{12} - \ldots.\right)$$
$$- \frac{1^{\frac{1}{3}|1}.b^3}{a^4}\left(\frac{4}{1^{4|1}} - \frac{4^{3|3}}{1^{10|1}3^3}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \frac{4^{5|3}}{1^{16|1}3^5}\left(\frac{b}{a}\right)^{12} - \ldots.\right)$$
$$+ \frac{b^5}{a^6}\left(\frac{1^{2|1}}{1^{6|1}} - \frac{1^{4|1}}{1^{12|1}}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \frac{1^{8|1}}{1^{18|1}}\left(\frac{b}{a}\right)^{12} - \ldots.\right)$$

$$19. \quad \int_0^\infty x \sin x\, e^{-(ax)^3} \partial x = \frac{b}{a^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1^{3|1}}{1^{7|1}9}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \frac{1^{5|1}}{1^{13|1}.15}\left(\frac{b}{a}\right)^{12} - \ldots.\right)$$
$$- \frac{1^{\frac{2}{3}|1}b^3}{a^5}\left(\frac{1}{3} - \frac{5^{3|3}}{1^{9|1}.11.3^3}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \frac{5^{5|3}}{1^{15|1}17.3^5}\left(\frac{b}{a}\right)^{12} - \ldots.\right)$$
$$+ \frac{1^{\frac{1}{3}|1}.b^5}{a^7}\left(\frac{4^{2|3}}{1^{5|1}.7.3^2} - \frac{4^{4|3}}{1^{11|1}.13.3^4}\left(\frac{b}{a}\right)^6 + \frac{4^{6|3}}{1^{17|1}.19.3^6}\left(\frac{b}{a}\right) - \ldots.\right)$$

u. s. w. Die Reihen convergiren, wenn $\frac{b}{a} \gtreqless 1$ ist.

Das hier angezeigte Verfahren lässt sich weiter fortsetzen, und man sieht, dass sich das Integral

$$\int_0^\infty x^{p-1} \sin x\, e^{-(ax)^q} \partial x$$

durch q Reihen darstellen lässt, welche mit den Grössen $1^{\frac{1}{q}|1}$, $1^{\frac{2}{q}|1}$, $1^{\frac{3}{q}|1}$, ... $1^{\frac{q-1}{q}|1}$, $1^{\frac{q}{q}|1}$ verbunden sind und unter der angegebenen Bedingung convergiren.

Sehr zweckmässig lässt sich die Reihe (4.) benutzen, weil sie sich auf das Binomium zurückbringen lässt. Zu dem Ende geben wir ihr folgende Gestalt:

$$\textbf{20.} \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \sin bx \,\partial x$$
$$= \frac{1^{p-1|1}}{a^p}\left(\frac{pb}{a} - [p]_3 \frac{b^3}{a^3} + [p]_5 \frac{b^5}{a^5} - [p]_7 \frac{b^7}{a^7} + \ldots.\right)$$

Nun ist

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[(a-b\sqrt{-1})^{-p} - (a+b\sqrt{-1})^{-p}\right]$$
$$= \frac{1}{a^p}\left(\frac{p.b}{a} - [p]_3 \frac{b^3}{a^3} + [p]_5 \frac{b^5}{a^5} - [p]_7 \frac{b^7}{a^7} + \ldots.\right)$$

Wird $\sqrt{-1}$ durch Quadriren entfernt, so erhält man

$$\frac{1}{(a^2+b^2)^p \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\left[(a^2+b^2)^p - a^{2p} + (2p)_2 a^{2p-1} b^2 - (2p)_4 a^{2p-4} b^4 + \ldots.\right]}$$
$$= \frac{1}{p}\left[\frac{pb}{a} - [p]_3 \frac{b^3}{a^3} + [p]_5 \frac{b^5}{a^5} - [p]_7 \frac{b^7}{a^7} + \ldots.\right]$$

Es ergiebt sich nun aus (20.)

$$\textbf{21.} \quad \int_0^\infty x^{p-1} \sin bx \,.\, e^{-ax} \partial x$$
$$= \frac{1^{p-1|1}}{(a^2+b^2)^p \sqrt{2}} \sqrt{\left[(a^2+b^2)^p - a^{2p} + (2p)_2 a^{2p-2} b - (2p)_4 a^{2p-4} b^4 \ldots.\right]}$$

Die Reihe unter dem Wurzelzeichen bricht ab, so oft ein Coefficient in **0** übergeht. Sobald dies geschieht, giebt (21.) einen geschlossenen Ausdruck. Wenn nun p eine ganze Zahl oder einer der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots.$ ist, so tritt dieser Fall ein. Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich folgende besondere Fälle aus (21.):

22. $$\int_0^x \sin bx \,.\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{b}{a^2+b^2},$$
$$\int_0^\infty x \sin bx\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2},$$
$$\int_0^\infty x^2 \sin bx\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1.2.b\sqrt{(9a^4-6a^2b^2+b^4)}}{(a^2+b^2)^3} = \frac{1.2.(3ba^2-b^3)}{(a^2+b^2)^3},$$
$$\int_0^\infty x^3 \sin bx\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1.2.3.4.ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^4}$$
. . . . . .

u. s. w. Setzt man $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, so erhält man

23. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x}} e^{-ax}\,\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a^2+b^2}(-a+\sqrt{(a^2+b^2)})\right)},$$
$$\int_0^\infty \sqrt{x} \sin bx\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1}{4}\sqrt{\left(2\pi.\frac{3ab^2-a^3+\sqrt{((a^2+b^2)^3)}}{(a^2+b^2)^3}\right)},$$
$$\int_0^\infty \sqrt{x^3} \sin bx\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1.3}{8}\sqrt{\left[\frac{2\pi}{(a^2+b^2)^5}\left(-a^5+10a^3b^2-5ab^4+\sqrt{((a^2+b^2)^5)}\right)\right]}$$

u. s. w.

Die Gleichung (21.) gilt zwar für jedes positive p, sie führt aber auf unendliche Reihen, wenn p eine gebrochene Zahl ist, deren Nenner nicht $= 2$, und lässt sich für diese Fälle nicht gut gebrauchen. Man kann aber auch aus (20.) eine Gleichung ableiten, die auch für ein negatives p gilt. Zu dem Ende ist $-p$ statt $+p$ zu setzen. Dies giebt

24. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx\, e^{-ax}}{x^{p+1}}\,\partial x = \frac{1^{-p-1|1}}{2\sqrt{-1}}\left[(a-b\sqrt{-1})^p - (a+b\sqrt{-1})^p\right).$$

Wird die Grösse $\sqrt{-1}$ ausgestossen, so erhält man folgende Gleichung:

25. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx\, e^{-ax}}{x^{p+1}}\,\partial x$$
$$= \frac{1^{-p-1|1}}{\sqrt{2}}\sqrt{\left[(a^2+b^2)^p - a^{2p} + (2p)_2 a^{2p-2}b^2 - (2p)_4 a^{2p-4}b^4 \ldots\right]}.$$

Für diese Gleichung gelten die nämlichen Bemerkungen über ihre Benutzung, welche zu (21.) gemacht wurden. Man sieht jedoch leicht, dass sie für ein ganzes p auf unendlich grosse Werthe führt. Setzt man aber $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, so erhält man folgende Ausdrücke:

26. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x^3}} e^{-ax}\,\partial x = -\sqrt{[2\pi(-a+\sqrt{(a^2+b^2)})]},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x^5}} e^{-ax}\,\partial x = \frac{2}{1.3}\sqrt{[2\pi(-a^3+3ab^2+\sqrt{((a^2+b^2)^3)})]},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x^7}} e^{-ax}\,\partial x = -\frac{4}{1.3.5}\sqrt{[2\pi(-a^5+10a^3b^2-5ab^4+\sqrt{((a^2+b^2)^5)})]}$$

. . . . . .

u. s. w. In diesen Gleichungen sind a und b von einander unabhängig. Wird $a = b$ gesetzt, so giebt (22.)

27. $$\int_0^\infty \sin ax \,.\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1}{2a},$$

$$\int_0^\infty x \sin ax\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1}{2a^2},$$

$$\int_0^\infty x^2 \sin ax\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1.2}{2^2 a^3},$$

$$\int_0^\infty x^3 \sin ax\, e^{-ax}\,\partial x = 0,$$

$$\int_0^\infty x^4 \sin ax\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1.2.3.4}{2^4 a^5}.3,$$

$$\int_0^\infty x^5 \sin ax\, e^{-ax}\,\partial x = -\frac{1.2.3.4.5}{2^5 a^5}.4$$

u. s. w. Ist $a = 0$, so folgt aus (22., 23. und 26.):

28. $$\int_0^\infty \sin bx\,\partial x = \frac{1}{b},$$

$$\int_0^\infty x^3 \sin bx\,\partial x = \frac{1.2}{b^3},$$

$$\int_0^\infty x^4 \sin bx\,\partial x = \frac{1.2.3.4}{b^5}$$

. . . . . .

29. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx\,\partial x}{\sqrt{x}} \,.\, \partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x} \sin bx\,\partial x = \frac{1}{4b}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$

$$\int_0^\infty \sqrt{(x^3)} \sin bx\,\partial x = \frac{3}{8b^2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$

. . . . . .

$$30. \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx\,\partial x}{V(x^3)} = -V(2\pi b),$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx\,\partial x}{V(x^5)} = \frac{2b}{1.3}V(2\pi b),$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx\,\partial x}{V(x^7)} = -\frac{4b^2}{1.3.5}V(2\pi b)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
u. s. w.

§. 49.

Geht man von der Reihe

$$\cos bx = 1 - \frac{b^2x^2}{1.2} + \frac{b^4x^4}{1.2.3.4} - \frac{b^6.x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots.$$

aus, so ist

$$1. \quad \int_0^\infty x^{p-1}\cos bx\, e^{-(ax)^q}\partial x$$
$$= \int_0^\infty x^{p-1}e^{-(ax)^q}\partial x - \frac{b^2}{1.2}\int_0^\infty x^{p+1}e^{-(ax)^q}\partial x + \frac{b^4}{1.2.3.4}\int_0^\infty x^{p+3}e^{-(ax)^q}\partial x - \cdots.$$

Nun ist nach (6. §. 38.):

$$2. \quad \frac{b^{2r-2}}{1^{2r-2|1}}\int_0^\infty x^{p+2r-3}e^{-(ax)^q}\partial x = \frac{b^{2r-2}.1^{\frac{p+2r-2}{q}|1}}{1^{2r-2|1}(p+2r-2)^{p+2r-2}},$$

Wird hierin der Reihe nach 1, 2, 3, ... statt r gesetzt, so erhält man

$$3. \quad \int_0^\infty x^{p-1}\cos bx\, e^{-(ax)^q}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{pa^p} - \frac{b^2 1^{\frac{p+2}{q}|1}}{1.2.(p+2)a^{p+2}} + \frac{b^4 1^{\frac{p+4}{q}|1}}{1.2.3.4(p+2)a^{p+4}} - \cdots.$$

Die Bemerkungen zu (3.) im vorigen Paragraph finden auch hier Anwendung, Setzt man $q = 1$, so geht der Ausdruck in

$$4. \quad \int_0^\infty x^{p-1}\cos bx\, e^{-(ax)}\partial x$$
$$= \frac{1^{p-1|1}}{a^p}\left(1 - [p]_2\frac{b^2}{a^2} + [p]_4\frac{b^4}{a^4} - [p]_6\frac{b^6}{a^6} + \cdots.\right) \quad \text{über.}$$

Auch aus diesen Ausdrücken lassen sich weitere Ableitungen ziehen. Wird nämlich in (3.) $q = 1$, $p = 1$ gesetzt, so erhält man

$$\int_0^\infty \cos bx\, e^{-ax}\partial x = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^6}{a^6} - \cdots.\right),$$

oder

$$5. \quad \int_0^\infty \cos bx\, e^{-ax}\partial x = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Diese Gleichung gilt für jedes a und b. Ist $a = b$, so erhält man

$$6. \quad \int_0^\infty \cos ax\, e^{-ax}\, \partial x = \frac{1}{2a}.$$

Ist $p = 1$, $q = 2$, so giebt (3.) nach den nöthigen Reductionen:

$$7. \quad \int_0^\infty \cos bx\, e^{-a^2x^2}\, \partial x$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left(1 - \frac{b^2}{(2a)^2} + \frac{b^4}{1.2(2a)^4} - \frac{b^6}{1.2.3(2a)^6} + \frac{b^8}{1.2.3.4(2a)^8} - \ldots.\right),$$

oder

$$8. \quad \int_0^\infty \cos bx\, e^{-a^2x^2}\, \partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)}.$$

Setzt man $\frac{1}{2}a$ statt a und $b = a$, so wird hieraus

$$9. \quad \int_0^\infty \cos ax\, e^{-\frac{a^2x^2}{2.2}}\, \partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{a.e}.$$

Wird $p = 2$ und $q = 2$ gesetzt, so giebt (3.):

$$10. \quad \int_0^\infty x \cos bx\, e^{-(ax)^2}\, \partial x$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left(1 - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^4}{3.4a^2} - \frac{b^6}{4.5.6a^6} + \frac{b^8}{5.6.7.8a^8} - \ldots.\right)$$

Diese Reihe convergirt, wenn $a \gtrless b$ ist und man kann die so eben benutzte Methode eben so anwenden wie in (§. 48., 18. und 19.). Es wird sich dadurch das Integral

$$\int_0^\infty x^{p-1} \cos bx\, e^{-(ax)^q}\, \partial x$$

durch q Reihen darstellen lassen, welche convergiren, wenn $p \gtrless q$ und $a \gtrless b$ ist.

Die Gleichung (4.) lässt sich zweckmässig benutzen, weil sie auf das Binomium zurückgebracht werden kann. Es ist nach den Bemerkungen zu (20. §. 48.):

$$\tfrac{1}{2}\left[(a + b\sqrt{-1})^{-p} + (a - b\sqrt{-1})^{-p}\right]$$

$$= \frac{1}{a^p}\left(1 - [p]_2 \frac{b^2}{a^2} + [p]_4 \frac{b^4}{a^4} - [p]_6 \frac{b^6}{a^6} + \ldots.\right)$$

Wird dieser Werth in (4.) eingeführt, so ergiebt sich

$$11. \quad \int_0^\infty x^{p-1} \cos bx\, e^{-ax}\, \partial x = \tfrac{1}{2}.1^{p-1|1}\left[(a+b\sqrt{-1})^{-p} + (a-b\sqrt{-1})^{-p}\right].$$

Hier lässt sich $\sqrt{-1}$ ausstossen. Geschieht es, so erhält man

$$12. \quad \int_0^\infty x^{p-1} \cos bx\, e^{-ax}\, \partial x$$

$$= \frac{1^{p-1|1}}{(a^2+b^2)^p\sqrt{2}}\sqrt{\left[(a^2+b^2)^p + a^{2p} - (2p)_2 a^{2p-2}b^2 + (2p)_4 a^{2p-4}b^4 - \ldots.\right]}$$

$$= 1^{p-1|1}\sqrt{\left[\frac{(a^2+b^2)^p + a^{2p} - (2p)_2 a^{2p-2}b^2 + (2p)_4 a^{2p-4}b^4 - \ldots.}{2(a^2+b^2)^{2p}}\right]}.$$

Diese Formel giebt geschlossene Ausdrücke, wenn p eine positive ganze

Zahl, oder einer der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ ist. Die Gleichung (11.) führt, wenn man $-p$ statt p schreibt und die nöthigen Entwicklungen macht, zu folgender Gleichung:

$$13. \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^{p+1}} \cdot e^{-ax}\,\partial x = \frac{1^{-p-1|1}}{\sqrt{2}} \sqrt{[a^{2p} - (2p)_2 a^{2p-2} b^2 + (2p)_4 a^{2p-4} b^4 - \ldots + (a^2+b^2)^p]}.$$

Für ein ganzes p giebt diese Gleichung unendlich grosse Werthe. Setzt man in (12.) $p = 1, 2, 3, \ldots$, $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ und $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ in (13.), so erhält man

$$14. \quad \int_0^\infty \cos bx\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{a}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty x \cos bx\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2},$$

$$\int_0^\infty x^2 \cos bx\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1.2.a\sqrt{(a^4-6a^2b^2+9b^4)}}{(a^2+b^2)^3} = \frac{1.2.(a^3-3ab^2)}{(a^2+b^2)^3},$$

$$\int_0^\infty x^3 \cos bx\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1.2.3.\sqrt{(a^8-12a^6b^2+38a^4b^4-12a^2b^6+b^8)}}{(a^2+b^2)^4}$$

$$= \frac{1.2.3(a^4-6a^2b^2+b^4)}{(a^2+b^2)^4},$$

. . . . . .

$$15. \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx\, e^{-ax}\,\partial x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a^2+b^2}(a+\sqrt{(a^2+b^2)})\right)},$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x} \cos bx\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{(a^2+b^2)^3}[a^3-3ab^2+\sqrt{((a^2+b^2)^3)}]\right)},$$

$$\int_0^\infty \sqrt{(x^3)} \cos bx\, e^{-ax} = \frac{3}{8}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{(a^2+b^2)^5}[a^5-10a^3b^2+5ab^4+\sqrt{((a^2+b^2)^5)}]\right)},$$

$$\int_0^\infty \sqrt{(x^3)} \cos bx\, e^{-ax}\,\partial x$$

$$= \frac{1.3.5}{16}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{(a^2+b^2)^7}[a^7-21a^5b^2+35a^3b^4-7ab^6+\sqrt{((a^2+b^2)^7)}]\right)},$$

. . . . . .

$$16. \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{(x^3)}} e^{-ax}\,\partial x = -\sqrt{[2\pi(a+\sqrt{(a^2+b^2)})]},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{(x^5)}} e^{-ax}\,\partial x = \frac{2.2}{1.3}\sqrt{\{\tfrac{1}{2}\pi[a^3-3a^2b+\sqrt{((a^2+b^2)^3)}]\}},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{(x^7)}} e^{-ax}\,\partial x = \frac{2^3}{1.3.5}\sqrt{\{\tfrac{1}{2}\pi[a^5-10a^3b^2+5ab^4+\sqrt{((a^2+b^2)^5)}]\}},$$

. . . . . .

u. s. w. Für $b = a$ erhält man

17. $$\int_0^\infty \cos ax\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1}{2a},$$
$$\int_0^\infty x^2 \cos ax\, e^{-ax}\,\partial x = -\frac{1.2}{2^2 a^3},$$
$$\int_0^\infty x^3 \cos ax\, e^{-ax}\,\partial x = -\frac{1.2.3}{4a^4},$$
$$\int_0^\infty x^4 \cos ax\, e^{-ax}\,\partial x = -\frac{1.2.3.4}{8.a^5},$$
. . . . . .

18. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\sqrt{x}} e^{-ax}\,\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}(1+\sqrt{2})\right)},$$
$$\int_0^\infty \sqrt{x} \cos ax\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1}{4a}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2a}(-1+\sqrt{2})\right)},$$
$$\int_0^\infty \sqrt{(x^3)} \cos ax\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{3}{16a^2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}(-1+\sqrt{2})\right)},$$
$$\int_0^\infty \sqrt{(x^5)} \cos ax\, e^{-ax}\,\partial x = \frac{1.3.5}{32.a^3}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2a}(1+\sqrt{2})\right)},$$
. . . . . .

19. $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\sqrt{(x^3)}} e^{-ax}\,\partial x = -\sqrt{(2\pi a(1+\sqrt{2}))},$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\sqrt{(x^5)}} e^{-ax}\,\partial x = \frac{2.2}{1.3} a\sqrt{(a\pi(-1+\sqrt{2}))},$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\sqrt{(x^7)}} e^{-ax}\,\partial x = \frac{2.2.2}{1.3.5} a^2\sqrt{(a^2\pi(-1+\sqrt{2}))},$$

Setzt man $a = 0$, so giebt (14., 15. und 16.):

20. $$\int_0^\infty x \cos bx\,\partial x = -\frac{1}{b^2},$$
$$\int_0^\infty x^3 \cos bx\,\partial x = \frac{1.2.3}{b^4},$$
$$\int_0^\infty x^5 \cos bx\,\partial x = -\frac{1.2.3.4.5}{b^6},$$
. . . . . .

21. $$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{x}}\,\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$
$$\int_0^\infty \sqrt{x} \cos bx\,\partial x = \frac{1}{4b}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$
$$\int_0^\infty \sqrt{(x^3)} \cos bx\,\partial x = \frac{3}{8b^2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$
$$\int_0^\infty \sqrt{(x^5)} \cos bx\,\partial x = \frac{15}{16.b^3}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$
. . . . . .

22. $$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{(x^3)}}\,\partial x = -\sqrt{(2\pi b)},$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{(x^5)}}\,\partial x = \frac{2.2\,b}{1.3}\sqrt{(\tfrac{1}{2}(b\pi))},$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{(x^7)}}\,\partial x = -\frac{2.2.2}{1.3.5}b^2\sqrt{(\tfrac{1}{2}(b\pi))},$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{\sqrt{(x^9)}}\,\partial x = \frac{2^4}{1.3.5.7}b^3\sqrt{(\tfrac{1}{2}(b\pi))},$$
. . . . . .

u. s. w.

§. 50.

Die in (§. 48. und 49.) gefundenen Resultate lassen sich noch auf andere Formen bringen. Setzt man nämlich

1. $$a \pm b\sqrt{-1} = r(\cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1}),$$

so ist

2. $$r = \sqrt{(a^2+b^2)}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

3. $$\alpha = \arcsin\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \arccos\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}.$$

Nun folgen aus den Gleichungen

$$\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1} = e^{a\sqrt{-1}},$$
$$\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{-1} = e^{-a\sqrt{-1}}$$

die Ausdrücke

4. $$(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})^m = \cos m\alpha + \sin m\alpha\sqrt{-1},$$

5. $$(\cos\alpha-\sin\alpha\sqrt{-1})^m = \cos m\alpha - \sin m\alpha\sqrt{-1},$$

6. $$\frac{1}{(\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})^m} = (\cos\alpha-\sin\alpha\sqrt{-1})^m = \cos m\alpha - \sin m\alpha\sqrt{-1},$$

7. $$\frac{1}{(\cos\alpha-\sin\alpha\sqrt{-1})^m} = (\cos\alpha+\sin\alpha\sqrt{-1})^m = \cos m\alpha + \sin m\alpha\sqrt{-1},$$

Aus (20. §. 48.) ist

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\sin bx\,\partial x = \frac{1^{p-1|1}}{2\sqrt{-1}}[(a-b\sqrt{-1})^{-p} - (a+b\sqrt{-1})^{-p}].$$

Werden nun die vorstehenden Werthe aus (1. bis 7.) benutzt, so erhält man die Gleichung

8. $$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\sin bx\,\partial x = \frac{1^{p-1|1}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}}\sin p\alpha,$$

oder

$$9.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\sin bx\,\partial x = \frac{1^{p-1|1}}{\sqrt{((a^2+b^2)^p)}}\sin p\,(\text{arc sin}\,\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}),$$
$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\sin bx\,\partial x = \frac{1^{p-1|1}}{\sqrt{((a^2+b^2)^p)}}\sin p\,(\text{arc cos}\,\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}),$$
$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-ax}\sin bx\,\partial x = \frac{1^{p-1|1}}{\sqrt{((a^2+b^2)^p)}}\sin p\,(\text{arc tang}\,\frac{b}{a}).$$

Diese Gleichungen gelten für jedes positive p und sind sehr allgemein; denn a und b sind von einander unabhängig. Für $a=0$ ergiebt sich

$$10.\quad \int_0^\infty x^{p-1}\sin bx\,\partial x = \frac{1^{p-1|1}}{b^p}\sin\tfrac{1}{2}p\pi.$$

Die Gleichung (24. §. 48.)

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx\,.\,e^{-ax}\,\partial x}{x^{p+1}} = \frac{1^{-p-1|1}}{2\sqrt{-1}}\left((a-b\sqrt{-1})^p-(a+b\sqrt{-1})^p\right)$$

führt, wenn (1. bis 7.) benutzt werden, zu

$$11.\quad \int_0^\infty \frac{\sin bx\,.\,e^{-ax}\,\partial x}{x^{p+1}} = -\,1^{-p-1|1}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}\sin p\alpha,$$

oder

$$12.\quad \int_0^\infty \frac{\sin bx\,.\,e^{-ax}\,\partial x}{x^{p+1}} = -\,1^{p-1|1}\sqrt{((a^2+b^2)^p)}\sin p\,(\text{arc}\,.\,\text{sin}\,\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}),$$
$$= -\,1^{p-1|1}\sqrt{((a^2+b^2)^p)}\sin p\,(\text{arc cos}\,\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}),$$
$$= -\,1^{p-1|1}\sqrt{((a^2+b^2)^p)}\sin p\,(\text{arc tang}\,\frac{b}{a}).$$

Wird hierin $a=0$ gesetzt, so erhält man

$$13.\quad \int_0^\infty \frac{\sin bx\,\partial x}{x^{p+1}} = -\,1^{-p-1|1}\,b^p\sin\tfrac{1}{2}p\pi.$$

Die Gleichungen (11. bis 13.) geben reelle Werthe für jedes gebrochene p. Man sieht, dass sich die Gleichungen (11., 12. und 13.) aus (8., 9. und 10.) ergeben, wenn $-p$ statt $+p$ gesetzt wird, und dass also die Gleichungen (8., 9. und 10.) für jedes mögliche p gelten und allgemein sind.

Aus der Gleichung (11. §. 49.) lässt sich mit Hülfe der Ausdrücke (1. bis 7.) folgende Gleichung ableiten:

$$14.\quad \int_0^\infty x^{p-1}\cos bx\,.\,e^{-ax}\,\partial x = \frac{1^{p-1|1}}{\sqrt{((a^2+b^2)^p)}}\cos p\alpha,$$

oder

$$15. \quad \int_0^\infty x^{p-1} \cos bx\, e^{-ax}\, \partial x = \frac{1^{p-1|1}}{\sqrt{((a^2+b^2)^p)}} \cos p\,(\text{arc sin } \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}})$$
$$= \frac{1^{p-1|1}}{\sqrt{((a^2+b^2)^p)}} \cos p\,(\text{arc cos } \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}})$$
$$= \frac{1^{p-1|1}}{\sqrt{((a^2+b^2)^p)}} \cos p\,(\text{arc tang } \frac{b}{a}).$$

Diese Gleichungen gelten für jedes positive p. Setzt man $a=0$, so wird

$$16. \quad \int_0^\infty x^{p-1} \cos bx\, \partial x = \frac{1^{p-1|1}}{b^p} \cos \tfrac{1}{2} p\pi.$$

Aus der Gleichung (11. §. 49.) ergiebt sich folgende:

$$\int_0^\infty x^{-p-1} \cos bx\,.\,e^{-ax}\, \partial x = \tfrac{1}{2}(1^{-p-1})\,((a+b\sqrt{-1})^p + (a-b\sqrt{-1})^p).$$

Wird dieser Ausdruck auf die obige Art behandelt, so ergiebt sich

$$17. \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx\,.\,e^{-ax}\,\partial x}{x^{p+1}} = 1^{-p-1|1}\sqrt{((a^2+b^2)^p)} \cos p\alpha,$$

oder

$$18. \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx\,.\,e^{-ax}\,\partial x}{x^{p+1}} = 1^{-p-1|1}\sqrt{((a^2+b^2)^p)} \cos p\,(\text{arc sin } \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}})$$
$$= 1^{-p-1|1}\sqrt{((a^2+b^2)^p)} \cos p\,(\text{arc cos } \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}})$$
$$= 1^{-p-1|1}\sqrt{((a^2+b^2)^p)} \cos p\,(\text{arc.tang } \frac{b}{a}).$$

Diese Gleichungen führen auf darstellbare Werthe, wenn p eine gebrochene Zahl ist. Für $a=0$ ist aus (18.)

$$19. \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^{p+1}}\,\partial x = 1^{-p-1|1}\, b^p \cos \tfrac{1}{2} p\pi.$$

Man sieht, dass (17., 18. und 19.) aus (14., 15. und 16.) folgen, wenn $-p$ statt p gesetzt wird. Demnach gelten die Gleichungen (14. bis 16.) für jedes mögliche p und sind also allgemein.

Die Gleichungen (9. und 15.) bringen das fragliche Integral auf das Vielfache eines Bogens. Drückt man nun den Sinus und Cosinus des Vielfachen eines Bogens durch den Sinus und Cosinus des einfachen Bogens aus, so gelangt man zu weitern Ableitungen. Es dienen dazu die bekannten Gleichungen

$$20. \quad \sin n\alpha$$
$$= n \sin\alpha (\cos\alpha)^{n-1} - (n)_3 (\sin\alpha)^3 (\cos\alpha)^{n-3} + (n)_5 (\sin\alpha)^5 (\cos\alpha)^{n-5} - \ldots.,$$

$$21. \quad \cos n\alpha = (\cos\alpha)^n - (n)_2 (\sin\alpha)^2 (\cos\alpha)^{n-2} + (n)_4 (\sin\alpha)^4 (\cos\alpha)^{n-4} - \ldots.$$

Werden die Werthe aus (2.) benutzt, so gehen die genannten Gleichungen in folgende über:

$$22. \quad \int_0^\infty x^{p-1} \sin bx \,.\, e^{-ax}\, \partial x$$
$$= \frac{1.2.3....(p-1)}{(a^2+b^2)^p}\left(p\,a^{p-1}b - (p)_3 b^3 a^{p-3} + (p)_5 b^5 a^{p-5} - ....\right),$$

$$23. \quad \int_0^\infty x^{p-1} \cos bx \,.\, e^{-ax}\, \partial x$$
$$= \frac{1.2.3....(p-1)}{(a^2+b^2)^p}\left(a^p - (p)_2 b^2 a^{p-2} + (p)_4 b^4 a^{p-4} - ....\right).$$

Diese zwei Gleichungen umfassen das allgemeine Gesetz, welches den Ausdrücken (22. §. 48. und 14. §. 49.) zum Grunde liegt. Sie gelten für ein ganzes positives p. Setzt man $a = 0$, so geht (22.) in 0 über, sobald p eine gerade Zahl ist; und eben so (23.), wenn p ungerade ist. Hieraus ergiebt sich

$$24. \quad \int_0^\infty x^{2p} \sin bx\, \partial x = (-1)^p \frac{1.2.3....2p}{b^{2p+1}},$$
$$\int_0^\infty x^{2p-1} \sin bx\, \partial x = 0;$$

$$25. \quad \int_0^\infty x^{2p-1} \cos bx\, \partial x = (-1)^p \frac{1.2.3....(2p-1)}{b^{2p}},$$
$$\int_0^\infty x^{2p} \cos bx\, \partial x = 0.$$

Diese Gleichungen enthalten das allgemeine Gesetz von (28. §. 48. und 20. §. 49.). Vergleicht man sie mit (14. §. 33. und 8. §. 37.), so erhält man folgende bemerkenswerthe Relationen:

$$26. \quad (-1)^p \int_0^\infty x^{2p-1} \cos bx\, \partial x = \int_0^\infty x^{2p-1} e^{-bx}\, \partial x = \int_0^1 x^{b-1} \left(\frac{1}{\lg x}\right)^{2p-1} \partial x,$$

$$27. \quad (-1)^p \int_0^\infty x^{2p} \sin bx\, \partial x = \int_0^\infty x^{2p} e^{-bx}\, \partial x = \int_0^1 x^{b-1} \left(\frac{1}{\lg x}\right)^{2p} \partial x.$$

Setzt man in (10.) $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, ...$, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt{x}}\, \partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$
$$\int_0^\infty \sqrt{x} \sin bx\, \partial x = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$
$$\int_0^\infty \frac{x^2 \sin bx}{\sqrt{x}}\, \partial x = -\frac{1.3}{8.b^2}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$
$$\int_0^\infty \frac{x^3 \sin bx}{\sqrt{x}}\, \partial x = -\frac{1.3.5}{2^4 b^3}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$
$$\int_0^\infty \frac{x^4 \sin bx}{\sqrt{x}}\, \partial x = \frac{1.3.5.7}{2^5 b^4}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{b}\right)},$$
. . . . . .

Hieraus erhält man folgendes Gesetz:

28. $$\int_0^\infty \frac{x^{2p}\sin bx}{\sqrt{x}}\partial x = (-1)^p \frac{1^{2p-\frac{1}{2}|1}\sqrt{2}}{2b^{2p}\sqrt{b}} = (-1)^p.\frac{1.3.5....(4p-1)\sqrt{2\pi}}{2^{2p+1}b^{2p}\sqrt{b}},$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{2p+1}\sin bx}{\sqrt{x}}\partial x = (-1)^p \frac{1^{2p+1-\frac{1}{2}|1}\sqrt{2}}{2b^{2p+1}\sqrt{b}} = (-1)^p \frac{1.3.5....(4p+1)\sqrt{2\pi}}{2^{2p+2}b^{2p+1}\sqrt{b}},$$

Setzt man in (13.) $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2\pi b)},$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{2^2 b\sqrt{(2\pi b)}}{1.3.2},$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^3\sqrt{x}} = -\frac{2^3.b^2\sqrt{(2\pi b)}}{1.3.5.2},$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^4\sqrt{x}} = \frac{2^4 b^3\sqrt{(2\pi b)}}{1.3.5.7.2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

u. s. w. Das allgemeine Gesetz hiefür ist

29. $$\int_0^\infty \frac{\sin bx\,\partial x}{x^{2p}\sqrt{x}} = (-1)^p.\frac{2^{2p-1}b^{2p-1}\sqrt{(2\pi b)}}{1.3.5....(4p-1)},$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx\,\partial x}{x^{2p+1}\sqrt{x}} = (-1)^p \frac{2^{2p}b^{2p}\sqrt{(2\pi b)}}{1.3.5....(4p+1)}.$$

Eben so erhält man aus (16. und 19.), wenn $p = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ gesetzt wird,

30. $$\int_0^\infty \frac{x^{2p-1}\cos bx}{\sqrt{x}}\partial x = (-1)^p.\frac{1.3.5....(4p-3)\sqrt{2\pi}}{2^{2p}b^{2p-1}\sqrt{b}},$$
$$\int_0^\infty \frac{x^{2p}\cos bx}{\sqrt{x}}\partial x = (-1)\ \frac{1.3.5....(2p-1)\sqrt{2\pi}}{2^{2p+1}b^{2p}\sqrt{b}},$$

31. $$\int_0^\infty \frac{\cos bx\,\partial x}{x^{2p-1}\sqrt{x}} = (-1)^{p+1}.\frac{2^{2p-1}b^{2p-2}\sqrt{(2\pi b)}}{2.1.3.5....(4p-3)},$$
$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\,\partial x}{x^{2p}\sqrt{x}} = (-1)^{p+1}\ \frac{2^{2p}b^{2p-1}\sqrt{(2\pi b)}}{2.1.3.5....(4p-1)}.$$

Setzt man nun $p = \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$, so ergiebt sich aus (10.):

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{\sqrt[3]{x^2}}\partial x = \frac{3.1^{\frac{1}{3}|1}}{2\sqrt[3]{b}}, \qquad \int_0^\infty \sqrt[3]{x}\sin bx\,\partial x = \frac{1^{\frac{1}{3}|1}\sqrt{3}}{2b\sqrt[3]{b}},$$

$$\int_0^\infty x\sqrt[3]{x}\sin bx\,\partial x = -\frac{4.1^{1|1}}{2.3b^2\sqrt[3]{b}}, \qquad \int_0^\infty x^2\sqrt[3]{x}\sin bx\,\partial x = -\frac{4.7.1^{\frac{1}{3}|1}\sqrt{3}}{2.3^2b^3\sqrt[3]{b}},$$

$$\int_0^\infty x^3\sqrt[3]{x}\sin bx\,\partial x = \frac{4.7.10.1^{\frac{1}{3}|1}}{2.3^3b^4\sqrt[3]{b}}, \qquad \int_0^\infty x^4\sqrt[3]{x}\sin bx\,\partial x = \frac{4.7.10.13.1^{\frac{1}{3}|1}\sqrt{3}}{2.3^4b^5\sqrt[3]{b}},$$

$$\int_0^\infty x^5\sqrt[3]{x}\sin bx\,\partial x = -\frac{4.7.10.13.16.1^{\frac{1}{3}|1}}{2.3^5.b^5\sqrt[3]{b}}, \int_0^\infty x^6\sqrt[6]{x}\sin bx\,\partial x = -\frac{4.7.10.13.16.19.1^{\frac{1}{3}|1}\sqrt{3}}{2.3^6b^7\sqrt[3]{b^5}},$$

. . . . . .

Hieraus ergiebt sich folgendes allgemeine Gesetz:

32.
$$\int_0^\infty x^{2p-1}\sqrt[3]{x}\sin bx\,\partial x = (-1)^p\frac{4^{2p-1|3}1^{\frac{1}{3}|1}}{2.3^{2p-1}b^{2p}\sqrt[3]{b}} = (-1)^p\frac{4.7.10....(6p-2).1^{\frac{1}{3}|1}}{2.3^{2p-1}b^{2p}\sqrt[3]{b}},$$

$$\int_0^\infty x^{2p}\sqrt[3]{x}\sin bx\,\partial x = (-1)^p\frac{4^{2p|3}.1^{\frac{1}{3}|1}\sqrt{3}}{2.3^{2p}b^{2p+1}\sqrt[3]{b}} = (-1)^p\frac{4.7.10....(6p+1).1^{\frac{1}{3}|1}\sqrt{3}}{2.3^{2p}.b^{2p+1}\sqrt[3]{b}},$$

Eben so ergiebt sich aus (**13.**, **16.** und **19.**):

33.
$$\int_0^\infty \frac{\sin bx\,\partial x}{x^{2p+1}\sqrt[3]{x}} = (-1)^p.\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}3^{2p+1}b^{2p}\sqrt[3]{b}}{2.1^{2p+1|3}} = (-1)^p\cdot\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}3^{2p+1}b^{2p}\sqrt[3]{b}}{2.1.4.7.10....(6p+1)},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx\,\partial x}{x^{2p}\sqrt[3]{x}} = (-1)^p\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}3^{2p}b^{2p-1}\sqrt[3]{b}\sqrt{3}}{2.1^{2p|3}} = (-1)^p\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}3^{2p}b^{2p-1}\sqrt[3]{b}\sqrt{3}}{2.1.4.7....(6p-2)};$$

34.
$$\int_0^\infty x^{2p-1}\sqrt[3]{x}\cos bx\,\partial x = (-1)^p\frac{4^{2p-1|3}1^{\frac{1}{3}|1}\sqrt{3}}{2.3^{2p-1}b^{2p}\sqrt[3]{b}} = (-1)^p\frac{4.7.10....(6p-2)\sqrt{3}.1^{\frac{1}{3}|1}}{2.3^{2p-1}b^{2p}\sqrt[3]{b}},$$

$$\int_0^\infty x^{2p}\sqrt[3]{x}\cos bx\,\partial x = (-1)^{p+1}\frac{4^{2p|3}1^{\frac{1}{3}|1}}{2.3^{2p}b^{2p+1}\sqrt[3]{b}} = (-1)^{p+1}\frac{4.7.10....(6p+1).1^{\frac{1}{3}|1}}{2.3^{2p}b^{2p+1}\sqrt[3]{b}};$$

35.
$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\,\partial x}{x^{2p}\sqrt[3]{x}} = (-1)^p\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}.3^{2p}b^{2p-1}\sqrt[3]{b}}{2.1^{2p|3}} = (-1)^p\cdot\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}3^{2p}.b^{2p-1}\sqrt[3]{b}}{2.1.4.7.10....(6p-2)},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\,\partial x}{x^{2p-1}\sqrt[3]{x}} = (-1)^p\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}3^{2p-1}b^{2p-2}\sqrt[3]{b}}{2.1^{2p-1|3}} = (-1)^p\cdot\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}3^{2p}b^{2p-2}\sqrt[3]{b}.\sqrt{3}}{2.1.4.7....(6p-5)}$$

u. s. w.

Die in (**28.** bis **30.**) gefundenen Gleichungen stimmen dem Inhalte nach mit (**29.**, **30.** §. **48.** und **21.**, **22.** §. **49.**) überein; wie leicht zu sehen. Sie unterscheiden sich von jenen Gleichungen durch die Zeichen. Die Verschiedenheit hat ihren Grund in der verschiedenen Entwicklungsweise. Man überzeugt sich davon, weil sich von den in diesem Paragraph gefundenen Ausdrücken

auf die Resultate in den vorhergehenden Paragraphen (22. und 26. §. 48. und 15. und 16. §. 49.), aus welchen jene abgeleitet wurden, übergehen lässt. Dies geschieht, wenn man in den Gleichungen (8., 11., 14. und 17.) $p=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ setzt und die Sinus und Cosinus dieser Bogen auf die Sinus und Cosinus des einfachen Bogens zurückführt; was in dem vorliegenden Falle möglich ist. Demzufolge ergiebt sich aus (8.):

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \,.\, e^{-ax}\partial x}{\sqrt{x}} = \frac{1^{-\frac{1}{2}|1}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}} \,.\, \sin \tfrac{1}{2}a.$$

Aus bekannten Sätzen der Trigonometrie und aus (2.) ist

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1-\cos\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1-\frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}\right)}.$$

Wird dies in die vorstehende Gleichung eingeführt, so erhält man nach den nöthigen Reductionen:

$$36. \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx \,.\, e^{-ax}\partial x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{2\pi(-a+\sqrt{(a^2+b^2)})}{a^2+b^2}\right]}.$$

Aus (1.) ist für $p=\frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx \,.\, e^{-ax}\partial x}{\sqrt{x}} = \frac{1^{-\frac{1}{2}|1}}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}} \,.\, \cos \tfrac{1}{2}a.$$

Nun ist

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+\cos a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1+\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}\right)}.$$

Wird dieser Werth eingeführt, so ergiebt sich nach den gehörigen Reductionen:

$$37. \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx \,.\, e^{-ax}\partial x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{2\pi(a+\sqrt{(a^2+b^2)})}{a^2+b^2}\right]}.$$

Setzt man in (8. und 14.) $\frac{3}{2}$ und macht die nöthigen Reductionen, so ist

$$38. \quad \int_0^\infty \sqrt{x} \,.\, \sin bx \,.\, e^{-ax}\partial x = \frac{1^{\frac{1}{2}|1}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}}\sin\tfrac{3}{2}\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}}(\sin\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left[\frac{2\pi}{(a^2+b^2)^3}[3ab^2-a^3+\sqrt{((a^2+b^2)^3)}]\right]},$$

$$39. \quad \int_0^\infty \sqrt{x} \,.\, \cos bx \,.\, e^{-ax}\partial x = \frac{1^{\frac{1}{2}|1}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}}\cos\tfrac{3}{2}\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}}(\cos\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\alpha\sin\tfrac{1}{2}\alpha)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\left[\frac{2\pi}{(a^2+b^2)^3}[a^3-3ab^2+\sqrt{((a^2+b^2))}]\right]}$$

u. s. w. Man sieht hieraus, dass die auf diese Weise gefundenen Werthe mit den in (§. 48. und 49.) gefundenen stimmen.

Anhang.

Tafel der 18 ersten Potenzen von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$.

Potenz.	$\frac{1}{2} = 0{,}5$.	$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$
1te	0,5	0,333 333 ....
2te	0,25	0,111 111
3te	0,125	0,037 037 037 ....
4te	0,062 5	0,012 345 679 012 345 679 0 ....
5te	0,031 25	0,004 115 226 337 448 559 670 781
6te	0,015 625	0,001 371 742 112 482 853 223 59
7te	0,007 812 5	0,000 457 247 370 827 617 741 19
8te	0,003 906 25	0,000 152 415 790 275 872 580 39
9te	0,001 953 125	0,000 050 805 263 425 290 860 13
10te	0,000 976 562 5	0,000 016 935 087 808 430 286 71
11te	0,000 488 281 25	0,000 005 645 029 269 476 762 23
12te	0,000 244 140 625	0,000 001 881 676 423 158 920 745
13te	0,000 122 070 312 5	0,000 000 627 225 474 386 306 915
14te	0,000 061 035 156 25	0,000 000 209 075 158 128 768 971
15te	0,000 030 517 578 125	0,000 000 069 691 719 376 256 323
16te	0,000 015 258 789 062 5	0,000 000 023 230 573 125 418 774
17te	0,000 007 629 394 531 25	0,000 000 007 743 524 375 139 591
18te	0,000 003 814 697 265 625	0,000 000 002 581 174 791 713 197

Potenz.	$\frac{1}{4} = 0{,}25$.	$\frac{1}{5} = 02$.
1te	0,25	0,2
2te	0,062 5	0,04
3te	0,015 625	0,008
4te	0,003 906 25	0,001 6
5te	0,000 976 562 5	0,000 32
6te	0,000 244 140 625	0,000 064
7te	0,000 061 035 156 25	0,000 012 8
8te	0,000 015 258 789 062 5	0,000 002 56
9te	0,000 003 814 697 265 625	0,000 000 512
10te	0,000 009 953 674 316 406 25	0,000 000 102 4
11te	0,000 000 238 418 579 101 562 5	0,000 000 020 48
12te	0,000 000 059 604 644 775 390 625	0,000 000 004 096
13te	0,000 000 014 901 161 193 847 656 25	0,000 000 000 819 2
14te	0,000 000 003 725 290 298 461 914 062 5	0,000 000 000 163 84
15te	0,000 000 000 931 322 574 615 478 515 625	0,000 000 000 032 768
16te	0,000 000 000 232 830 643 653 869 628 906 25	0,000 000 000 006 553 6
17te	0,000 000 000 058 207 660 913 467 407 226 562 5	0,000 000 000 001 310 72
18te	0,000 000 000 014 551 915 228 366 851 806 640 625	0,000 000 000 000 262 144

Potenz.	$\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots.$	$\frac{1}{7} = 0{,}1428\ldots.$
1te	0,166 66	0,142 857 142 857 ....
2te	0,027 777	0,020 408 163 265 306 122 448 97 ....
3te	0,004 629 629	0,002 915 451 895 043 731 778 422 74 ....
4te	0,000 771 604 938 271 604 938 2	0,000 416 493 127 863 390 254 060 39 ....
5te	0,000 128 600 823 045 267 489 711 9	0,000 059 499 018 266 198 607 722 91 ....
6te	0,000 021 433 470 507 544 581 618 65	0,000 008 499 859 752 314 408 681 755 ....
7te	0,000 003 572 245 084 590 763 603 10	0,000 001 214 265 678 902 012 402 50 ....
8te	0,000 000 595 374 180 765 127 267 18	0,000 000 173 466 525 557 743 034 321 ....
9te	0,000 000 099 229 030 127 521 211 19	0,000 000 024 780 932 222 490 049 03 ....
10te	0,000 000 016 538 171 687 920 201 86	0,000 000 003 540 133 174 641 435 57 ....
11te	0,000 000 002 756 361 947 986 700 31	0,000 000 000 505 733 310 663 062 22 ....
12te	0,000 000 000 459 393 657 997 783 386	0,000 000 000 072 247 615 809 008 88 ....
13te	0,000 000 000 076 558 942 999 630 564	0,000 000 000 010 321 087 972 715 55 ....
14te	0,000 000 000 012 759 982 383 327 176 0	0,000 000 000 001 474 441 138 959 36 ....
15te	0,000 000 000 002 126 637 305 545 293 45	0,000 000 000 000 210 634 448 422 766 ....
16te	0,000 000 000 000 354 439 550 924 215 57	0,000 000 000 000 030 090 635 488 966 ....
17te	0,000 000 000 000 059 073 258 487 369 26	0,000 000 000 000 004 298 662 212 709 ....
18te	0,000 000 000 000 009 845 543 081 228 21	0,000 000 000 000 000 614 094 601 815 ....

Pot.	$\frac{1}{8} = 0{,}125$	$\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots.$
1te	0,125	0,111 111 ....
2te	0,015 625	0,012 345 679 012 345 6790....
3te	0,001 953 125	0,001 371 742 112 482 853 223 59....
4te	0,000 244 140 625	0,000 152 415 790 275 872 580 39....
5te	0,000 030 517 578 125	0,000 016 935 087 808 430 286 71....
6te	0,000 003 814 697 265 625	0,000 001 881 676 423 158 920 745....
7te	0,000 000 476 837 158 203 125	0,000 000 209 075 158 128 768 971....
8te	0,000 000 059 604 644 775 390 625	0,000 000 023 230 573 125 418 774....
9te	0,000 000 007 450 580 596 923 828 125	0,000 000 002 581 174 791 713 197 1....
10te	0,000 000 000 931 322 574 615 478 515 625	0,000 000 000 286 797 199 079 244 1....
11te	0,000 000 000 116 415 321 826 934 814 453 125	0,000 000 000 031 866 355 453 249 3....
12te	0,000 000 000 014 551 915 228 366 851 806 640 625	0,000 000 000 003 540 706 161 472 1....
13te	0,000 000 000 001 818 989 403 545 85....	0,000 000 000 000 393 411 795 719 1....
14te	0,000 000 000 000 227 373 675 443 23....	0,000 000 000 000 043 712 421 746 5....
15te	0,000 000 000 000 028 421 709 430 404 007....	0,000 000 000 000 004 856 935 749 61....
16te	0,000 000 000 000 003 552 713 678 800 500....	0,000 000 000 000 000 539 659 527 71....
17te	0,000 000 000 000 000 444 089 209 850 062....	0,000 000 000 000 000 059 962 169 74....
18te	0,000 000 000 000 000 055 511 151 231 257 8....	0,000 000 000 000 000 006 662 463 30....

Anm. Die hier angegebenen Werthe sind bei wiederholten Prüfungen richtig gefunden worden.

14.

Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung.

(Fortsetzung der Abhandlungen No. 10. und No. 11. im 28ten Bande und No. 12. im 37ten Bande.)

(Von Herrn Professor *Otto Hesse* zu Königsberg i. Pr.)

§. 1.

Wenn man durch u eine homogene Function von den drei Variabeln x_1, x_2, x_3 bezeichnet und durch u_1, u_2, u_3 die ersten, durch $u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{23}, u_{31}, u_{12}$ die zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function nach den Variabeln genommen, so ist bekanntlich

$$1.\quad \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 = (n-1)u_1, \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3 = (n-1)u_2, \\ u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 = (n-1)u_3. \end{cases}$$

welche Gleichungen, nach x_1, x_2, x_3 aufgelöset, insofern diese Grössen explicite in den Theilen der Gleichungen links vorkommen, folgende Ausdrücke geben:

$$2.\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta x_1}{n-1} = U_{11}u_1 + U_{12}u_2 + U_{13}u_3, \\ \dfrac{\Delta x_2}{n-1} = U_{21}u_1 + U_{22}u_2 + U_{23}u_3, \\ \dfrac{\Delta x_3}{n-1} = U_{31}u_1 + U_{32}u_2 + U_{33}u_3; \end{cases}$$

wo die Determinante Δ der Function u und die Grösse U folgende Bedeutung haben:

$$3.\quad \begin{cases} \Delta = u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{23}^2 - u_{22}u_{31}^2 - u_{33}u_{12}^2, \\ U_{11} = u_{22}u_{33} - u_{23}^2, \quad U_{23} = U_{32} = u_{12}u_{13} - u_{11}u_{23}^2, \\ U_{22} = u_{33}u_{11} - u_{31}^2, \quad U_{31} = U_{13} = u_{23}u_{21} - u_{22}u_{31}^2, \\ U_{33} = u_{11}u_{22} - u_{12}^2, \quad U_{12} = U_{21} = u_{31}u_{32} - u_{33}u_{12}^2. \end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (2.) der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3 und addirt die Producte, so erhält man die Gleichung

4. $$\frac{n}{n-1}\Delta . u = U_{11}u_1^2 + U_{22}u_2^2 + U_{33}u_3^2 + 2U_{23}u_2u_3 + 2U_{31}u_3u_1 + 2U_{12}u_1u_2,$$

deren Theil rechts ich der Kürze wegen mit D bezeichne.

Diese Gleichung wird identisch, wenn man in dem Theile derselben links

$$u = \frac{1}{n.(n-1)}\{u_{11}x_1^2 + u_{22}x_2^2 + u_{33}x_3^2 + 2u_{23}x_2x_3 + 2u_{31}x_3x_1 + 2u_{12}x_1x_2\}$$

statt u und in dem Theile rechts die Werthe von u_1, u_2, u_3 aus (1.) setzt, ohne dass man die zweiten Differentialquotienten u zu entwickeln brauchte. Differentiirt man unter dieser Hypothese die vorliegende identische Gleichung (4.) nach den 6 zweiten partiellen Differentialquotienten der Function u, so erhält man folgendes für die Theorie der algebraischen Curven wichtige System von Gleichungen:

5.
$$\begin{cases} D_{11} \equiv u_{22}u_3^2 - 2u_{23}u_2u_3 + u_{33}u_2^2 = \frac{n}{n-1}U_{11}u - \frac{x_1^2}{(n-1)^2}\Delta, \\ D_{22} \equiv u_{33}u_1^2 - 2u_{31}u_3u_1 + u_{11}u_3^2 = \frac{n}{n-1}U_{22}u - \frac{x_2^2}{(n-1)^2}\Delta, \\ D_{33} \equiv u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2 = \frac{n}{n-1}U_{33}u - \frac{x_3^2}{(n-1)^2}\Delta, \\ \frac{1}{2}D_{23} \equiv u_{12}u_1u_3 + u_{13}u_1u_2 - u_{23}u_1^2 - u_{11}u_2u_3 = \frac{n}{n-1}U_{23}u - \frac{x_2x_3}{(n-1)^2}\Delta, \\ \frac{1}{2}D_{31} \equiv u_{23}u_2u_1 + u_{21}u_2u_3 - u_{31}u_2^2 - u_{22}u_3u_1 = \frac{n}{n-1}U_{31}u - \frac{x_3x_1}{(n-1)^2}\Delta, \\ \frac{1}{2}D_{12} \equiv u_{31}u_3u_2 + u_{32}u_3u_1 - u_{12}u_3^2 - u_{33}u_1u_2 = \frac{n}{n-1}U_{12}u - \frac{x_1x_2}{(n-1)^2}\Delta, \end{cases}$$

wo $D_{k\lambda}$ die Differentiation von D nach $u_{k\lambda}$ andeutet, insofern der Differentialquotient $u_{k\lambda}$ nur in den Grössen U_{pq} enthalten ist. Differentiirt man die identische Gleichung (4.) z. B. nach u_{33}, so erhält man

$$\frac{n}{n-1}U_{33}u + \frac{x_3^2}{(n-1)^2}\Delta = D_{33} + \frac{\partial D}{\partial u_3}\frac{x_3}{n-1}.$$

Setzt man in diese Gleichung für $\frac{\partial D}{\partial u_3}$ seinen Werth $\frac{2x_3}{(n-1)^2}\Delta$, so erhält man die dritte von den Gleichungen (5.). Aehnliche Formeln lassen sich auf dem angegebenen Wege für homogene Functionen von mehr als 3 Variabeln entwickeln, von welchen die mit 4 Variabeln in der Theorie der algebraischen Oberflächen Anwendung finden.

Von diesen Formeln dient die dritte zur Transformation des Krümmungshalbmessers und der Coordinaten des Mittelpuncts der Krümmung einer beliebigen Curve $n$ter Ordnung in eine neue Form. Denn wenn man die

rechtwinkligen Coordinaten eines variabeln Puncts durch x_1 und x_2 bezeichnet und $x_3 = 1$ setzt, so ist

$$u = 0$$

die allgemeine Gleichung einer Curve $n$ter Ordnung, deren Krümmungsradius ϱ in dem Puucte $x_1 x_2$ der Curve durch die bekannte Gleichung

$$\varrho = \pm \frac{(u_1^2+u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{u_{11}u_2^2 - 2u_{11}u_1u_2 + u_{22}u_1^2}$$

ausgedrückt und deren Krümmungsmittelpunct durch die Coordinaten X_1, X_2 mittels folgender Gleichungen bestimmt wird:

$$X_1 - x_1 = -u_1 \cdot \frac{u_1^2+u_2^2}{u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2},$$

$$X_2 - x_2 = -u_2 \frac{u_1^2+u_2^2}{u_{11}u_2^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1^2}.$$

Diese Gleichungen gehen aber, wenn man erwägt, dass $u = 0$ und $x_3 = 1$ ist, mittels der dritten Gleichung (5.) in die einfacheren

$$6. \quad \begin{cases} \varrho = \pm \dfrac{(n-1)^2(u_1^2+u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{23}^2 - u_{22}u_{31}^2 - u_{33}u_{12}^2}, \\ X_1 - x_1 = \dfrac{(n-1)^2 u_1(u_1^2+u_2^2)}{u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{23}^2 - u_{22}u_{31}^2 - u_{33}u_{12}^2}, \\ X_1 - x_1 = \dfrac{(n-1)^2 u_2(u_1^2+u_2^2)}{u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{23}^2 - u_{22}u_{31}^2 - u_{33}u_{31}^2} \end{cases}$$

über. Im Anfange der Abhandlung „Ueber die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung" (Bd. 28. No. 11. dieses Journals) ist dieser Transformation von mir Erwähnung gethan.

Ich werde nun den Krümmungsradius ϱ einer beliebigen, durch rechtwinklige Coordinaten x, y analytisch ausgedrückten Curve durch Linien-Coordinaten darstellen. Sind y' und y'' der erste und der zweite Differentialquotient von y, nach x genommen, so ist bekanntlich:

$$\varrho = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Eine beliebige gerade Linie, deren Gleichung von der Form $ax + by + 1 = 0$ ist, wird durch die Coefficienten a, b, welche man die Coordinaten der geraden Linie nennt, vollständig bestimmt. Wenn diese gerade Linie in allen ihren Lagen die Curve berühren soll, so wird sich dieses durch eine Gleichung zwischen den Liniencoordinaten ausdrücken lassen, welche die in Liniencoordinaten dargestellte Gleichung der Curve ist. Die gerade Linie wird aber zur Tangente der Curve unter den Bedingungen:

$$a = -\frac{y'}{xy'-y}, \qquad b = \frac{1}{xy'-y},$$

woraus, wenn man durch b' den ersten und durch b'' den Differentialquotienten von b nach a genommen bezeichnet,

$$y' = -\frac{a}{b}, \qquad y'' = \frac{(ab'-b)^3}{b^4 b^3}$$

folgt. Setzt man diese Werthe in den obigen Ausdruck des Krümmungsradius, so erhält man für den gesuchten Ausdruck:

$$7. \qquad \varrho = \pm \frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} . b''}{(ab'-b)^3}.$$

Es sei nun $u = 0$ die in Liniencoordinaten gegebene Gleichung einer beliebigen Curve. Bezeichnet man dann durch u_1 und u_2 die ersten Differentialquotienten der Function u, nach a und nach b genommen; ferner durch u_{11}, u_{12}, u_{22} die zweiten Differentialquotienten, so erhält man

$$u_1 + u_2 b' = 0, \qquad u_{11} + 2u_{12} b' + u_{22} b'^2 + u_2 b'' = 0;$$

und wenn man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Werthe von b' und b'' in die Gleichung (7.) setzt, so ergiebt sich

$$8. \qquad \varrho = \pm \frac{(u_{11} u_2^2 - 2u_{12} u_1 u_2 + u_{32} u_1^2)(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{(au_1+bu_2)^3}.$$

Nimmt man aber an, dass u eine algebraische ganze Function der Liniencoordinaten a, b sei, so lässt sich dieser Ausdruck für den Krümmungsradius auf ähnliche Art wie oben mit Hülfe der dritten Formel (5.) einfacher darstellen, nämlich:

Wenn u *eine beliebige ganze und homogene Function* n*ten Grades von den Variabeln* a_1, a_2, a_3 *ist und* u_1, u_2, u_3 *die ersten,* $u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{23}, u_{31}, u_{12}$ *die zweiten partiellen Differentialquotienten der Function* u *nach den Variabeln genommen bedeuten; ferner* a_1 *und* a_2 *die auf ein rechtwinkliges System bezogenen Liniencoordinaten sind und* $a_3 = 1$ *ist: so stellt die Gleichung* $u = 0$ *eine beliebige Curve* n*ter Classe dar, für welche der den Coordinaten* a_1, a_2 *der Tangente entsprechende Krümmungsradius*

$$9. \qquad \varrho = \pm \frac{(u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{23}^2 - u_{22}u_{31}^2 - u_{33}u_{12}^2)(a_1^2+a_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(n-1)^2 u_3^3} \quad \text{ist.}$$

Ich werde nun diejenigen Tangenten der Curve $n$ter Classe $u = 0$ betrachten, in deren Tangirungspuncte der Krümmungsradius gleich 0 ist. Der obige Ausdruck des Krümmungsradius kann auf doppelte Weise verschwinden. Setzt man den *zweiten* Factor des Zählers $a_1^2 + a_2^2 = 0$, so erhält man zwei Gleichungen; nämlich die genannte, und die Gleichung der Curve $n$ter Classe

$u = 0$, zur Bestimmung der Coordinaten solcher Tangenten, welche die Curve in Puncten berühren, in welchen der Krümmungsradius $= 0$ ist. Die Tangenten bilden mit der x Axe des rechtwinkligen Coordinatensystems und mit jeder geraden Linie Winkel, deren trigonometrische Tangenten gleich $\pm\sqrt{-1}$ sind. Diese Art von Tangenten der Curve mag hier unberücksichtigt bleiben. Sie entsprechen nach dem Gesetze der Reciprocität den in der Unendlichkeit gelegenen Puncten der reciproken Curven, in welchen Puncten die Curven bekanntlich unendlich grosse Krümmungsradien haben. Setzt man den *ersten* Factor $u_{11}u_{22}u_{33} + 2u_{12}u_{13}u_{23} - u_{11}u_{13}^2 - u_{22}u_{31}^2 - u_{33}u_{12}^2$, die Determinante der Function u, gleich 0, so ergeben sich daraus und aus der Gleichung der Curve die Coordinaten der *Rückkehrtangenten*, welche, mit Ausschluss der vorher genannten, solche Tangenten sind, die die Curve in Puncten berühren, in welchen die Krümmungsradien der Curve verschwinden. Diese Rückkehrtangenten entsprechen in den reciproken Curven den Wendepuncten, in welchen bekanntlich die Krümmungsradien der Curven unendlich gross sind. Aus der Ansicht der die Coordinaten der Rückehrtangenten bestimmenden Gleichungen ergiebt sich nun folgender Lehrsatz:

Eine Curve n*ter Classe hat im Allgemeinen* $3n(n-2)$ *Rückkehrtangenten.*

Zur Bestimmung dieser Rückkehrtangenten dient Folgendes:

Wenn u *eine ganze und homogene Function* n*ten Grades von den Variabeln* a_1, a_2, a_3 *ist;* Δ *die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten der Function* u *zusammengesetzte Determinante bedeutet und* $\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}$ *die rechtwinkligen (oder schiefwinkligen) Coordinaten einer variabeln Linie sind, so bestimmen die Gleichungen*

$$u = 0, \qquad \Delta = 0$$

die Coordinaten der Rückkehrtangenten der Curve n*ter Classe* $u = 0$.

Der Lehrsatz folgt nach dem Gesetze der Reciprocität aus dem entsprechenden, bekannten Satze von den Wendepuncten; allein die darauf folgende Angabe dürfte nicht ohne Weiteres aus diesem Gesetze herzuleiten sein. Sie stimmt mit der Regel zur Bestimmung der Wendepuncte einer Curve $n$ter Ordnung, welche ich im 28ten Bande S. 104. gegeben habe, vollständig überein, wenn man die Punctcoordinaten in Liniencoordinaten verändert.

Ich werde nun, indem ich $n = 3$ setze, um die Natur der Curven dritter Classe darzulegen, in dem folgenden Paragraphen einige Sätze über

diese Curven aufstellen, deren Beweise sich aus den früher mitgetheilten Sätzen über Curven dritter Ordnung mit Hülfe des Reciprocitätsgesetzes ergeben, oder durch Deutung der sie begründenden Gleichungen, nach Umänderung der Punctcoordinaten in Liniencoordinaten.

§. 2.

1. *Alle, dreien gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen harmonischen Polarenpaare berühren eine und dieselbe Curve dritter Classe.*

Harmonische Polaren eines Kegelschnittes sind bekanntlich jede zwei gerade Linien, welche mit dem aus dem Schnittpuncte derselben an den Kegelschnitt gezogenen Tangentenpaare ein harmonisches Bündel bilden.

2. *Wenn eine Curve dritter Classe gegeben ist, so lassen sich drei verschiedene Systeme von Kegelschnitten finden, deren gemeinschaftliche harmonische Polarenpaare die Curve dritter Classe berühren.*

Diese Systeme von Kegelschnitten werden auf folgende Art aus der gegebenen, zwischen a_1, a_2, a_3 homogenen Gleichung $\Phi = 0$ der Curve dritter Classe gefunden, in welcher $\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}$ die Liniencoordinaten der Tangente bedeuten. Wenn F diejenige Function dritten Grades ist, die zur Determinante die Function Φ hat, und man bezeichnet durch F_1, F_2, F_3 die nach den Variabeln genommenen partiellen Differentialquotienten der Function F, so stellt sich das gesuchte System Kegelschnitte in Liniencoordinaten durch die Gleichung

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$$

dar; in welcher Gleichung $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ beliebige Constanten sind. Da sich aber drei verschiedene Functionen F bestimmen lassen, deren Determinanten die gegebene Function Φ ausdrückt, so giebt es auch drei verschiedene Systeme Kegelschnitte von der genannten Art. Den vorhergehenden Satz werde ich kürzer so ausdrücken:

3. *Jede Curve dritter Classe hat drei verschiedene Systeme Polarenpaare.*

4. *Die Verbindungslinie der Tangirungspuncte jedes Polarenpaares der Curve dritter Classe berührt diese Curve.* Und umgekehrt:

5. *Jede Tangente der Curve dritter Classe schneidet die Curve in* 4 *Puncten. Die Tangenten der Curve in irgend zwei von den* 4 *Schnittpuncten bilden ein Polarenpaar.*

6. *Betrachtet man irgend zwei, demselben Systeme zugehörige*

Polarenpaare der Curve dritter Classe als die gegenüberliegenden Seiten eines der Curve umschriebenen Vierecks, so bilden die Diagonalen des Vierecks ein demselben Systeme zugehöriges Polarenpaar.

7. *Jede drei Tangentenpaare der Curve dritter Classe, welche sich in denselben vier Puncten schneiden, bilden drei, demselben Systeme angehörende Polarenpaare.*

8. *Wenn man ein Polarenpaar der Curve dritter Classe mit einer Tangente der Curve durchschneidet und durch die beiden Schnittpuncte ein neues Tangentenpaar an die Curve legt, so wird die Verbindungslinie der Schnittpuncte des Polarenpaares mit dem Tangentenpaare wieder zu einer Tangente der Curve.*

9. *Die Systeme von drei Tangentenpaaren einer Curve dritter Classe, welche sich in denselben vier Puncten schneiden, zerfallen in drei Gattungen. Ein solches System ist demjenigen Systeme zugeordnet, in welchem eines von den drei Tangentenpaaren ein Polarenpaar ist.*

10. *Die der Curve dritter Classe umschriebenen Dreiecke, welche die Eigenschaft haben, dass die von den Ecken derselben an die Curve gezogenen Tangenten sich in einem und demselben Puncte schneiden, lassen sich in drei Systeme von Dreiecken sondern. Ein solches Dreieck gehört demjenigen System an, in welchem eine Seite und die durch die gegenüberliegende Ecke gehende Tangente ein Polarenpaar ist.*

11. *Es lassen sich der Curve dritter Classe nur drei Dreiecke umschreiben, deren Ecken auf den drei, von einem beliebigen Puncte an die Curve gezogenen Tangenten liegen.*

12. *Jede Tangente der Curve dritter Classe schneidet dieselbe in vier Puncten. Von den vier Tangenten in diesen vier Schnittpuncten ist jede die Polare zu den drei andern in verschiedenen Systemen, und irgend drei derselben bilden, zu zweien combinirt, drei Polarenpaare in verschiedenen Systemen.*

13. *Wenn von drei Tangenten der Curve dritter Classe eine Tangente die Polare zu den beiden andern in zwei verschiedenen Systemen ist, so bilden die beiden letzten ein Polarenpaar aus dem dritten Systeme.*

14. *Drei von einem beliebigen Puncte an die Curve dritter Classe gezogene Tangenten haben in verschiedenen Systemen drei Polaren, welche sich in einem und demselben Puncte schneiden.*

15. *Wenn man die Curve dritter Classe mit einer Tangente der-*

selben schneidet, so bilden die Tangenten in den vier Schnittpuncten ein vollständiges Viereck, dessen drei Diagonalen paarweise Polarenpaare aus verschiedenen Systemen sind. Die Tangirungspuncte dieser Diagonalen und der Tangirungspunct der ersten Tangente liegen auf einer und derselben geraden Linie, welche die Curve berührt.

16. *Wenn man von einem beliebigen Puncte an die Curve dritter Classe drei Tangenten zieht, so schneiden dieselben die Curve in* 12 *Puncten. Von den zwölf Tangenten in diesen Puncten schneiden sich sechszehnmal drei Tangenten in einem Puncte.*

17. *Wenn* V *eine beliebig gegebene homogene Function dritten Grades von den Liniencoordinaten* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ *bedeutet, also*

$$V = 0$$

die Gleichung einer beliebig gegebene Curve dritter Classe und

$$\mathfrak{a}_1\alpha_1 + \mathfrak{a}_2\alpha_2 + \mathfrak{a}_3\alpha_3 = 0$$

die Gleichung eines gegebenen Puncts ist, so ist, wenn man die Determinante der Function V, *gebildet aus den zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function durch* W *bezeichnet,*

$$\alpha_1\left(\frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial W}{\partial a_3} - \frac{\partial V}{\partial a_3}\frac{\partial W}{\partial a_2}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial V}{\partial a_3}\frac{\partial W}{\partial a_1} - \frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial W}{\partial a_3}\right) + \alpha_3\left(\frac{\partial V}{\partial a_1}\frac{\partial W}{\partial a_2} - \frac{\partial V}{\partial a_2}\frac{\partial W}{\partial a_1}\right) = 0,$$

die Gleichung einer Curve vierter Classe, welche von den Tangenten berührt wird, die die Curve dritter Classe in denjenigen Puncten berühren, in welchen die drei aus dem gegebenen Puncte an die Curve gezogenen Tangenten die Curve schneiden.

Diese Sätze entsprechen den Sätzen (1. bis 17.) in der vorhergehenden Abhandlung. Ich füge hiezu noch einige Sätze, welche den früher aufgestellten Sätzen über die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung auf gleiche Weise entsprechen.

18. *Jede zwei Rückkehrtangenten einer Curve dritter Classe schneiden sich in einem Puncte, durch welchen auch eine dritte Rückkehrtangente geht.*

19. *Es lassen sich viermal drei Puncte angeben, durch welche die neun Rückkehrtangenten dritter Classe gehen.*

20. *Wenn man die homogene Gleichung einer Curve dritter Classe durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln* $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ *auf die Form*

$$\mathfrak{b}_1^3 + \mathfrak{b}_2^3 + \mathfrak{b}_3^3 + \mathfrak{b}H\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3 = 0$$

bringt, so sind $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$ *die Gleichungen der drei Puncte, in welchen sich die neun Rückkehrtangenten der Curve zu dreie schneiden.*

Von diesen Sätzen werde ich in den folgenden Paragraphen Gebrauch machen.

§. 3.

Eine beliebig gegebene homogene Function φ dritten Grades von den Variabeln x_1, x_2, x_3 lässt sich, wie ich im 28ten Band dieses Journals S. 95. bewiesen habe, durch lineäre Substitutionen von der Form

$$10. \quad \begin{cases} x_1 = x_1^{(1)} y_1 + x_2^{(2)} y_2 + x_1^{(3)} y_3, \\ x_2 = x_2^{(1)} y_1 + x_2^{(2)} y_2 + x_2^{(3)} y_3, \\ x_3 = x_3^{(1)} y_1 + x_3^{(2)} y_2 + x_3^{(3)} y_3 \end{cases}$$

auf die einfache Form

$$11. \quad \varphi = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6x\, y_1 y_2 y_3$$

zurückführen. Wenn man durch $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, oder, kürzer ausgedrückt, durch x_1, x_2, x_3 rechtwinklige Punctcoordinaten bezeichnet, so stellt die Gleichung $\varphi = 0$ eine beliebige Curve dritter Ordnung dar und die Gleichungen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ sind die Gleichungen von drei geraden Linien, welche durch die neun Wendepuncte der Curve gehen (Bd. 28. S. 107.). Ich werde fortan die Variabeln y_1, y_2, y_3, welche als Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2, x_3 durch die Substitutionen (10.) gegeben sind, die neuen Coordinaten des Punctes nennen, welcher durch die rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2, x_3 bestimmt ist.

Die Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$, welche ich hier untersuchen werde, lässt sich als der geometrische Ort der harmonischen Polenpaare dreier zu bestimmender Kegelschnitte oder eines ganzen Systems Kegelschnitte betrachten, unter welchen die drei erwähnten beliebig gewählt werden können (Bd. 28. S. 105.). Die Gleichung dieser Kegelschnitte erhält man (wie an der citirten Stelle bewiesen worden ist) aus derjenigen Function f (deren Determinante die Function φ ist), wenn man die Summe der partiellen Differentialquotienten der Function f, jede mit einer veränderlichen Constante multiplicirt, gleich 0 setzt. Es ist aber die Function f, durch die neuen Coordinaten ausgedrückt, abgesehen von einem constanten Factor, mit welchem dieselbe multiplicirt ist und auf welchen es hier nicht ankommt, folgende:

$$12. \quad f = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6p\, y_1 y_2 y_3;$$

wo p durch die Gleichung dritten Grades

$$13\,\text{a.} \qquad p^3 + 3p^2\pi + \tfrac{1}{2} = 0$$

gegeben ist. Mithin erhält man für die Gleichung des gesuchten Systems von Kegelschnitten:

$$k_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + k_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + k_3\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + \lambda_3\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0.$$

Setzt man nun je zwei von den Grössen λ gleich 0, so erhält man aus dieser Gleichung die Gleichungen

$$14\,\text{a.} \qquad y_1^2 + 2py_2y_3 = 0; \qquad y_2^2 + 2py_1y_3 = 0; \qquad y_3^2 + 2py_1y_2 = 0$$

dreier Kegelschnitte, deren gemeinschaftliche Polenpaare auf der Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$ liegen.

Es seien y_1, y_2, y_3 und Y_1, Y_2, Y_3 die neuen Coordinaten eines beliebigen, diesen drei Kegelschnitten gemeinschaftlichen Polenpaares; welches ich kürzer ein Polenpaar der Curve genannt habe. Alsdann hat man folgende Bedingungsgleichungen:

$$13. \quad \begin{cases} y_1Y_1 + py_3Y_2 + py_2Y_3 = 0, \\ py_3Y_1 + py_2Y_2 + py_1Y_3 = 0, \\ py_2Y_1 + py_1Y_2 + y_3Y_3 = 0; \end{cases}$$

aus welchen sich durch Elimination von y_1, y_2, y_3 oder Y_1, Y_2, Y_3 wiederum die Gleichung der Curve $\varphi = 0$ ergiebt. Durch dieses Polenpaar der Curve lege ich eine gerade Linie, deren Gleichung

$$14. \qquad b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 = 0$$

sei, welche durch Substitution der Werthe von y_1, y_2, y_3, wie sie sich durch Auflösung der lineären Gleichungen (10.) ergeben, in

$$15. \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

übergeht. Zwischen den rechtwinkligen Coordinaten dieser geraden Linie a_1, a_2, a_3 und den neuen Coordinaten derselben geraden Linie, welche ich als die Coefficienten b_1, b_2, b_3 der durch die neuen Punctcoordinaten ausgedrückten Gleichung (14.) der geraden Linie definire, erhält man folgende Relationen:

$$16. \quad \begin{cases} b_1 = x_1^{(1)}a_1 + x_2^{(1)}a_2 + x_3^{(1)}a_3, \\ b_2 = x_1^{(2)}a_1 + x_2^{(2)}a_2 + x_3^{(2)}a_3, \\ b_3 = x_1^{(3)}a_1 + x_2^{(3)}a_2 + x_3^{(3)}a_3, \end{cases}$$

welche die einen bestimmen, wenn die anderen gegeben sind. Damit nun die gerade Linie (14.) durch das erwähnte Polenpaar der Curve hindurchgehe, müssen folgende zwei Gleichungen erfüllt werden:

$$17. \quad \begin{cases} b_1 y + b_2 y_2 + b_3 y_3 = 0, \\ b_1 \mathbf{Y} + b_2 \mathbf{Y}_2 + b_3 \mathbf{Y}_3 = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den fünf Gleichungen (13. und 17.) die Variabeln y_4, y_2, y_3 und $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$, $\mathbf{Y}_3$, welche in diesen Gleichungen die Stelle von vier Unbekannten vertreten, da nur ihre *Verhältnisse* in die Gleichungen eingehen, so erhält man eine Relation $\Phi = 0$ zwischen den neuen Coordinaten b_1, b_2, b_3 der geraden Linie (14.), welche ein Polenpaar der Curve verbindet. Diese Elimination lässt sich am einfachsten dadurch ausführen, dass man den Gleichungen (13. und 17.) die Form

$$-\frac{y_1 \mathbf{Y}_1}{p} = y_2 \mathbf{Y}_3 + y_3 \mathbf{Y}_2, \qquad \rho b_1 = y_2 \mathbf{Y}_3 - y_3 \mathbf{Y}_2,$$
$$-\frac{y_2 \mathbf{Y}_2}{p} = y_3 \mathbf{Y}_1 + y_1 \mathbf{Y}_3, \qquad \rho b_2 = y_3 \mathbf{Y}_1 - y_1 \mathbf{Y}_3,$$
$$-\frac{y_3 \mathbf{Y}_3}{p} = y_1 \mathbf{Y}_2 + y_2 \mathbf{Y}_1, \qquad \rho b_3 = y_1 \mathbf{Y}_2 - y_2 \mathbf{Y}_1$$

giebt und sie paarweise addirt, oder von einander abzieht, wodurch man

$$\rho b_1 - \frac{y_1 \mathbf{Y}_1}{p} = 2 y_2 \mathbf{Y}_3, \qquad -\rho b_1 - \frac{y_1 \mathbf{Y}_1}{p} = 2 y_3 \mathbf{Y}_2,$$
$$\rho b_2 - \frac{y_2 \mathbf{Y}_2}{p} = 2 y_3 \mathbf{Y}_1, \qquad -\rho b_2 - \frac{y_2 \mathbf{Y}_2}{p} = 2 y_1 \mathbf{Y}_3,$$
$$\rho b_3 - \frac{y_3 \mathbf{Y}_3}{p} = 2 y_1 \mathbf{Y}_1, \qquad -\rho b_3 - \frac{y_3 \mathbf{Y}_3}{p} = 2 y_1 \mathbf{Y}_1$$

erhält. Multiplicirt man alsdann die erste Gleichung (17.) nach einander mit $2\mathbf{Y}_1$, $2\mathbf{Y}_2$, $2\mathbf{Y}_3$ und setzt die Werthe der Producte rechts aus den zuletzt abgeleiteten Gleichungen hinein, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$18. \quad \begin{cases} -2p b_1 y_1 \mathbf{Y}_1 + b_3 y_2 \mathbf{Y}_2 + b_2 y_3 \mathbf{Y}_3 = 0, \\ b_3 y_1 \mathbf{Y}_1 - 2p b_2 y_2 \mathbf{Y}_2 + b_1 y_3 \mathbf{Y}_3 = 0, \\ b_2 y_1 \mathbf{Y}_1 + b_1 y_2 \mathbf{Y}_2 - 2p b_3 y_3 \mathbf{Y}_3 = 0, \end{cases}$$

woraus durch Elimination der drei Producte $y_1 \mathbf{Y}_2$; $y_2 \mathbf{Y}_2$; $y_3 \mathbf{Y}_3$ die gesuchte Relation $\Phi = 0$ hervorgeht. Ich bemerke noch, dass, wenn man in (18.)

$$y_1 \mathbf{Y}_1 = \mathbf{B}_1; \qquad y_2 \mathbf{Y}_2 = \mathbf{B}_2; \qquad y_3 \mathbf{Y}_3 = \mathbf{B}_3$$

setzt, b_1, b_2, b_3 und B_1, B_2, B_3 die Coordinaten eines Polarenpaares der Curve dritter Classe $\Phi = 0$ sind.

Auf dem angegebenen Wege findet man für die Function Φ:

$$19. \quad \Phi = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + 6\pi b_1 b_2 b_3,$$

wo die Constante π durch die lineäre Gleichung

$$\mathbf{20.} \qquad p^3 + \tfrac{3}{2}p\pi - \tfrac{1}{4} = 0$$

bestimmt wird, und nun p eine der drei Wurzeln der Gleichung (**13.**) ist.

Aus dem Grade der Gleichung $\Phi = 0$ lässt sich nun folgender Lehrsatz schliessen, welchem ich zugleich seinen entsprechenden beifüge:

21. Die geraden Linien, welche Polenpaare einer Curve dritter Ordnung aus einem und demselben Systeme verbinden, berühren eine Curve dritter Classe.

Die Puncte, in welchen sich Polarenpaare einer Curve dritter Classe aus einem und demselben Systeme schneiden, liegen auf einer Curve dritter Ordnung.

Da eine Curve dritter Ordnung drei Systeme Polenpaare und eine Curve dritter Classe drei Systeme Polarenpaare hat, so lassen sich die beiden genannten Sätze, mit Berücksichtigung der früher angegebenen, auch so ausdrücken:

22. Wenn man von einem variabeln Puncte einer gegebenen Curve dritter Ordnung Tangenten an die Curve zieht und durch die vier Tangirungspuncte drei Linienpaare legt, so berührt jedes dieser drei Linienpaare eine andere Curve dritter Classe.

Wenn man eine gegebene Curve dritter Classe mit einer variablen Tangente durchschneidet, so bilden die Tangenten in den vier Schnittpuncten ein vollständiges Viereck, in welchem jede von den drei Diagonalen von einem Punctenpaare begrenzt wird, welches eine andere Curve dritter Ordnung beschreibt.

Aus der Form der Function Φ lässt sich Folgendes schliessen, was zur Vervollständigung des vorhergehenden Satzes dient:

23. Durch die neun Wendepuncte der gegebenen Curve dritter Ordnung lassen sich viermal drei gerade Linien legen. Diese drei geraden Linien bilden ein Dreieck, in dessen Ecken sich die neun Rückkehrtangenten jeder der drei Curven dritter Classe zu dreien schneiden.

Die neun Rückkehrtangenten der gegebenen Curve dritter Classe gehen viermal durch drei Puncte. Diese drei Puncte bilden die Ecken eines Dreiecks, dessen Seiten durch die neun Wendepuncte jeder der drei Curven dritter Ordnung gehen.

Ich werde in dem folgenden Paragraphen die oben durchgeführte Untersuchung, aus einem anderen Gesichtspuncte betrachtet, wieder aufnehmen; einer nicht unwichtigen Bemerkung wegen, die sich auf dem eingeschlagenen Wege schwerer begründen lässt.

§. 4.

Es seien z_1, z_2, z_3 die neuen Coordinaten eines beliebigen Punctes P der betrachteten Curve dritter Ordnung $\varphi = 0$. Von ihm aus lassen sich an die Curve vier Tangenten ziehen, deren Tangirungspuncte in dem Kegelschnitte

$$z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} = 0$$

liegen, welcher die Curve zugleich in dem Puncte P berührt. Setzt man der Kürze wegen $\beta = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3$, so werden die Coefficienten β_1, β_2, β_3 sich immer so bestimmen lassen, dass die Gleichung

$$\textbf{21.} \qquad \varphi + \tfrac{1}{3}\beta\left(z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y_3}\right) = a \,.\, b \,.\, B$$

identisch wird; in welcher Gleichung a, b, B lineäre, homogene, noch zu bestimmende Functionen von y_1, y_2, y_3 bedeuten, die, der Reihe nach gleich 0 gesetzt, die Tangente in dem Puncte P und das durch die vier Tangirungspuncte gelegte Linienpaar darstellen. Setzt man also

$$\alpha_1 = z_1^2 + 2\pi z_2 z_3, \qquad \alpha_2 = z_2^2 + 2\pi z_3 z_1, \qquad \alpha_3 = z_3^2 + 2\pi z_1 z_2,$$

$$a = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3,$$
$$b = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3,$$
$$B = B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3,$$

so werden die unbekannten Coefficienten in den genannten lineären, homogenen Functionen sich durch Entwicklung der beiden Theile der identischen Gleichung (21.) und durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen und Producte der Variabeln finden lassen. Aus dieser Gleichsetzung gehen aber folgende Gleichungen hervor:

$$\textbf{22.} \quad \begin{cases} 1 + \beta_1 z_1 = a_1 b_1 B_1, \quad 1 + \beta_2 z_2 = a_2 b_2 B_2, \quad 1 + \beta_3 z_3 = a_3 b_3 B_3, \\ \beta_2 z_1 + 2\pi \beta_1 z_3 = a_2 b_1 B_1 + a_1 (b_1 B_2 + b_2 B_1), \\ \beta_1 z_2 + 2\pi \beta_2 z_3 = a_1 b_2 B_2 + a_2 (b_3 B_2 + b_2 B_1), \\ \beta_3 z_2 + 2\pi \beta_2 z_1 = a_3 b_2 B_2 + a_2 (b_2 B_3 + b_3 B_2), \\ \beta_2 z_3 + 2\pi \beta_3 z_1 = a_2 b_3 B_3 + a_3 (b_2 B_3 + b_3 B_2), \\ \beta_1 z_3 + 2\pi \beta_3 z_2 = a_1 b_3 B_3 + a_3 (b_3 B_1 + b_1 B_3), \\ \beta_3 z_1 + 2\pi \beta_1 z_2 = a_3 b_1 B_1 + a_1 (b_3 B_1 + b_1 B_3). \end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen, in welchen sich, wie man bemerken wird, die Indices vertauschen lassen, die Grössen b_1, b_2, b_3 und B_1, B_2, B_3 zu bestimmen, hebe ich die vierte Gleichung heraus und eliminire β_1 und β_2 mit Zuziehung der beiden ersten Gleichungen. Dieses giebt

$$-\frac{\alpha_1}{z_1 z_2}+\frac{z_1}{z_2}a_2 b_2 B_2+2\pi\frac{z_3}{z_1}a_1 b_1 B_1=a_2 b_1 B_1+a_1(b_1 B_2+b_2 B_1)$$

und durch Vertauschung der Indices 1, 2 geht die Gleichung in

$$-\frac{\alpha_2}{z_1 z_2}+\frac{z_2}{z_1}a_1 b_1 B_1+2\pi\frac{z_3}{z_2}a_2 b_2 B_2=a_1 b_2 B_2+a_2(b_1 B_2+b_2 B_1)$$

über. Ich multiplicire nun die erste dieser Gleichungen mit α_2, die zweite mit α_1 und ziehe das Letztere von dem Ersteren ab. Dadurch erhalte ich

$$(z_1 b_2 B_2 - z_2 b_1 B_1)\left(\frac{\alpha_1^2}{z_1}+\frac{\alpha_2^2}{z_2}-\frac{2\pi\alpha_1\alpha_2 z_3}{z_1 z_2}\right)=0.$$

Da der zweite Factor in dieser Gleichung nicht gleich 0 sein kann, so wird

$$b_1 B_1 : b_2 B_2 = z_1 : z_2.$$

Durch Vertauschung der Indices in dieser Proposition erhält man

$$b_1 B_1 : b_2 B_2 : b_3 B_3 = z_1 : z_2 : z_3,$$

oder, wenn man durch $\varkappa$ einen unbestimmten Factor bezeichnet:

23. $$b_1 B_1 = \varkappa z_1; \qquad b_2 B_2 = \varkappa z_2; \qquad b_3 B_3 = \varkappa z_3.$$

Setzt man diese Werthe von $b_1 B_1$ und $b_2 B_2$ in die erste der obigen beiden Gleichungen und bezeichnet den Ausdruck $2\pi\varkappa - \frac{1}{z_1 z_2 z_3}$, welcher sich durch die Vertauschung der Indices nicht ändert, der Kürze wegen durch λ, so geht diese Gleichung in

$$\lambda . z_3 = b_1 B_2 + b_2 B_1$$

über; woraus durch Vertauschung der Indices wiederum folgende drei Gleichungen hervorgehen:

24. $$b_2 B_3 + b_3 B_2 = \lambda z_1; \qquad b_3 B_1 + b_1 B_3 = \lambda z_2; \qquad b_1 B_2 + b_2 B_1 = \lambda z_3.$$

Die Grössen b_1, b_2, b_3 und B_1, B_2, B_3, oder vielmehr ihre Verhältnisse, lassen sich aus den Gleichungen (23. und 24.) nicht anders als durch Auflösung einer cubischen Gleichung finden; was geometrisch schon daraus erhellet, dass sich durch die genannten vier Tangirungspuncte drei Linienpaare legen lassen. Um die cubische Gleichung auf symmetrische Weise abzuleiten, nehme man an, dass Z_1, Z_2, Z_3 drei Grössen seien, welche den beiden Gleichungen

$$b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + b_3 Z_3 = 0, \qquad B_1 Z_1 + B_2 Z_2 + B_3 Z_3 = 0$$

genügen; also die neuen Coordinaten desjenigen Puncts, in welchem sich die Linien $b = 0$ und $B = 0$ schneiden. Alsdann lassen sich aus den Gleichungen (23. und 24.) leicht folgende drei Gleichungen zusammenstellen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} z_1 Z_1 + \quad z_3 Z_2 + \quad z_2 Z_3 &= 0, \\ z_3 Z_1 + \frac{1}{p} z_2 Z_2 + \quad z_1 Z_3 &= 0, \\ z_2 Z_1 + \quad z_1 Z_2 + \frac{1}{p} z_3 Z_3 &= 0, \end{aligned}$$

in welchen der Kürze wegen $\frac{\lambda}{k} = 2p$ gesetzt ist. Eliminirt man nun die Hülfsgrössen Z_1, Z_2, Z_3 und bemerkt, dass $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 6\pi z_1 z_2 z_3 = 0$ ist, weil z_1, z_2, z_3 die neuen Coordinaten eines Punctes der Curve $\varphi = 0$ sind, so erhält man für die gesuchte cubische Gleichung:

$$\mathbf{25.} \qquad p_3 + 3p^2\pi + \tfrac{1}{2} = 0.$$

Diese Gleichung stimmt aber mit der Gleichung (13.) überein. Es ist mithin p hier dieselbe Grösse, welche an der genannten Stelle mit diesem Buchstaben bezeichnet wurde.

Will man nun die Verhältnisse $b_1 : b_2 : b_3$ und $B_1 : B_2 : B_3$ suchen, nachdem man einen Werth von p berechnet hat, welcher der Gleichung (25.) genügt, so kann dies aus folgenden Gleichungen geschehen:

$$\mathbf{26.} \quad \begin{cases} b_1 B_1 = \varkappa z_1, & b_2 B_3 + b_3 B_2 = 2p\varkappa z_1, \\ b_2 B_2 = \varkappa z_2, & b_3 B_1 + b_1 B_3 = 2p\varkappa z_2, \\ b_3 B_3 = \varkappa z_3, & b_1 B_2 + b_2 B_1 = 2p\varkappa z_3, \end{cases}$$

in welche die Gleichungen (23. und 24.) übergehen, wenn man für λ den Werth $2p\varkappa$ setzt. Es erfordert diese Bestimmung nur die Auflösung von quadratischen Gleichungen; welche ich übergehe. Es lässt sich aber aus den zuletzt angeführten Gleichungen ein wichtiges geometrisches Resultat ziehen. Denn multiplicirt man die drei ersten Gleichungen mit $2p$ und zieht sie von den drei letzten Gleichungen ab, so erhält man

$$\mathbf{27.} \quad \begin{cases} -2p\, b_1 B_1 + \quad b_3 B_2 + \quad b_2 B_3 = 0, \\ \quad b_3 B_1 - 2p\, b_2 B_2 + \quad b_1 B_3 = 0, \\ \quad b_2 B_1 + \quad b_1 B_2 - 2p\, b_3 B_3 = 0; \end{cases}$$

welche Gleichungen mit den Gleichungen (18.) übereinstimmen, wenn man $y_1 \mathfrak{Y}_1 = B_1$, $y_2 \mathfrak{Y}_2 = B_2$, $y_3 \mathfrak{Y}_3 = B_3$ setzt. Dieses beweiset aber, dass das betrachtete Linienpaar $b = 0$ und $B = 0$ ein Polarenpaar dritter Classe $\Phi = 0$ ist. Die Lehrsätze (22.) lassen sich hiernach wie folgt vervollständigen:

24. Wenn man von einem variabeln Puncte einer gegebenen Curve dritter Ordnung Tangenten an die Curve zieht und durch die vier Tangirungspuncte drei Linienpaare legt, so berührt jedes der drei Linienpaare eine andere Curve dritter Classe und ist zugleich ein Polarenpaar dieser Curve.

Wenn man eine gegebene Curve dritter Classe mit einer variabeln Tangente durchschneidet, so bilden die Tangenten in den vier Durchschnittspuncten ein vollständiges Viereck, in welchem jede von den drei Diagonalen von einem Punctenpaare begrenzt wird, welches eine andere Curve dritter Ordnung beschreibt, und dieses Punctenpaar ist zugleich ein Polenpaar dieser Curve.

Königsberg im August 1847.

15.

Eigenschaften der Wendepuncte der Curven dritter Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe.

(Fortsetzung der Abhandlungen No. 10. und No. 11. 28ten Bandes und No. 14. 38ten Bandes.)

(Von Herrn Dr. *Otto Hesse*, Prof. der Math. an der Universität zu Königsberg in Pr.)

---

1. *Von den neun Wendepuncten* $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_9$ *einer beliebigen Curve dritter Ordnung liegen zwölfmal drei Puncte in einer geraden Linie, nach folgendem Schema:*

$$\begin{array}{llll} \delta_1\delta_2\delta_3 \equiv A_1, & \delta_1\delta_4\delta_8 \equiv B_1, & \delta_1\delta_5\delta_7 \equiv C_1, & \delta_1\delta_6\delta_9 \equiv D_1, \\ \delta_4\delta_5\delta_6 \equiv A_2, & \delta_3\delta_6\delta_7 \equiv B_2, & \delta_2\delta_6\delta_8 \equiv C_2, & \delta_3\delta_5\delta_8 \equiv D_2, \\ \delta_7\delta_8\delta_9 \equiv A_3, & \delta_2\delta_5\delta_9 \equiv B_3, & \delta_3\delta_4\delta_9 \equiv C_3, & \delta_2\delta_4\delta_7 \equiv D_3; \end{array}$$

wo die Zeichen für die zwölf geraden Linien so angenommen sind, dass A_1, A_2, A_3 *drei gerade Linien bedeuten, welche durch sämmtliche neun Wendepuncte hindurchgehen; eben so* B_1, B_2, B_3, etc.

Den Beweis dieses Satzes habe ich in einem frühern Bande dieses Journals gegeben. Man kann ihn aber auch prüfen, wenn man die Coordinaten der Wendepuncte selbst durch lineäre Gleichungen ausdrückt. Ist nämlich von der Curve dritter Ordnung $y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + b\pi y_1 y_2 y_3 = 0$ die Gleichung, in welcher y_1, y_2, y_3 lineäre Functionen der rechtwinkligen Coordinaten bedeuten, die, wie man weiss, gleich 0 gesetzt, die Gleichungen von drei geraden Linien werden, welche durch die neun Wendepuncte hindurchgehen: so erhält man aus der Verbindung der Gleichungen der genannten drei geraden Linien mit der Gleichung der Curve für die Wendepuncte folgende Verhältnisse der lineären Functionen y_1, y_2, y_3:

	y_1	y_2	y_3
δ_1	0	$+1$	-1
δ_2	0	$+1$	$-k''$
δ_3	0	$+1$	$-k'$
δ_4	-1	0	$+1$
δ_5	$-k''$	0	$+1$
δ_6	$-k'$	0	$+1$
δ_7	$+1$	$-k'$	0
δ_8	$+1$	-1	0
δ_9	$+1$	$-k''$	0,

wo k' und k'' die beiden imaginären dritten Wurzeln der Einheit sind.

Hieraus ergiebt sich nun für die Gleichungen der zwölf geraden Linien:

$A_1 \equiv y_1 = 0$; $B_1 \equiv y_1+y_2+y_3=0$; $C_1 \equiv k'y_1+y_2+y_3=0$; $D_1 \equiv k''y_1+y_2+y_3=0$;
$A_2 \equiv y_2 = 0$; $B_2 \equiv y_1+k''y_5+k'y_3=0$; $C_2 \equiv y_1+y_2+k'y_3=0$; $D_2 \equiv y_1+y_2+k''y_3=0$;
$A_3 \equiv y_3 = 0$; $B_3 \equiv y_1+k'y_2+k''y_3=0$; $C_3 \equiv y_1+k'y_2+y_3=0$; $D_3 \equiv y_1+k''y_2+y_3=0$.

Die neun letzten Gleichungen erhält man unmittelbar, wenn man in den drei Substitutionen (Bd. **28**. S. **96**.) die Grössen z_1, z_2, z_3 gleich **0** setzt.

Dem obigen Satze entspricht folgender Satz von den Rückkehrtangenten einer Curve dritter Classe:

I. *Von den neun Rückkehrtangenten δ_1, δ_2, ... δ_9 einer beliebigen Curve dritter Classe schneiden sich zwölfmal drei Rückkehrtangenten in einem Puncte, in der Art, wie es das obige Schema zeigt, wo A_1, A_2, ... D_3 die zwölf Schnittpuncte bedeuten.*

Diese beiden Sätze lassen sieh auch umkehren, wie folgt:

2. *Wenn neun Puncte, in einer und derselben Ebene, eine solche Lage zu einander haben, dass zwölfmal drei von ihnen auf einer geraden Linie liegen, so wie das obige Schema es vorschreibt, so sind diese neun Puncte die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung, welche durch die neun Puncte hindurchgehen.*

II. *Wenn neun gerade Linien, in einer und derselben Ebene, eine solche Lage zu einander haben, dass zwölfmal drei von diesen Linien durch einen und denselben Punct gehen, nach Vorschrift des obigen Schemas, so sind diese neun geraden Linien die Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe, welche von den neun geraden Linien berührt werden.*

Die geraden Linien A_1, A_2, A_3 bilden die Seiten eines Dreiecks a_1, a_2, a_3.

Die Coordinaten der diesen Seiten gegenüberliegenden Ecken a_1, a_2, a_3 des Dreiecks lassen sich leicht aus den angegebenen Gleichungen bestimmen. Eben so die Coordinaten der Ecken b_1, b_2, b_3 des durch die Linien B_1, B_2, B_3 gebildeten Dreiecks u. s. w. Für diese Coordinaten ergeben sich nämlich folgende Verhältnisse der Grössen y_1, y_2, y_3:

	y_1	y_2	y_3
a_1	1	0	0
a_2	0	1	0
a_3	0	0	0
b_1	1	1	1
b_2	1	k'	k''
b_3	1	k''	k',

	y_1	y_2	y_3
c_1	1	k'	k'
c_2	1	1	k''
c_3	1	k''	1
d_1	1	k''	k''
d_2	1	1	k'
d_3	1	k'	1.

Betrachtet man nun die neun geraden Linien Δ, deren Gleichungen

$$\Delta_1 \equiv y_2 - y_3 = 0, \quad \Delta_4 \equiv y_1 - y_3 = 0, \quad \Delta_7 \equiv y_1 - k''y_2 = 0,$$
$$\Delta_2 \equiv y_2 - k'y_3 = 0, \quad \Delta_5 \equiv y_1 - k''y_3 = 0, \quad \Delta_8 \equiv y_1 - y_2 = 0,$$
$$\Delta_3 \equiv y_2 - k''y_3 = 0, \quad \Delta_6 \equiv y_1 - k'y_3 = 0, \quad \Delta_6 \equiv y_1 - k'y_2 = 0$$

sind, so ist leicht zu sehen, dass auf jeder derselben ein Punct a, ein Punct b, ein Punct c und ein Punct d liegt; was genauer durch folgenden Satz ausgedrückt wird:

3. *Die geraden Linien* $A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_2, C_2, C_3; D_1, D_2, D_3$ *bilden vier Dreiecke, deren entsprechende Ecken* $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3$ *auf neun geraden Linien* Δ *liegen, so, wie es das folgende Schema angiebt:*

$$a_1b_1c_1d_1 \equiv \Delta_1, \quad a_2b_1c_3d_3 \equiv \Delta_4, \quad a_3b_2c_1d_3 \equiv \Delta_7,$$
$$a_1b_3c_2d_3 \equiv \Delta_2, \quad a_2b_3c_1d_2 \equiv \Delta_5, \quad a_3b_1c_2d_2 \equiv \Delta_8,$$
$$a_1b_2c_3d_2 \equiv \Delta_3, \quad a_2b_2c_2d_1 \equiv \Delta_6, \quad a_3b_3c_3d_1 \equiv \Delta_9,$$

Und unter der Voraussetzung des Satzes (I.) hat man folgenden, dem vorhergehenden entsprechenden Satz:

III. *Die Puncte* $A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3; D_1, D_2, D_3$ *bilden die Ecken von vier Dreiecken, deren entsprechende Seiten* $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; d_1, d_2, d_3$ *durch neun Puncte* Δ *gehen, auf die Weise, wie es das vorhergehende Schema angiebt.*

In dem ersteren Falle schneiden sich, wie aus dem letzten Schema zu sehen ist, zwölfmal drei gerade Linien Δ in einem Puncte, in folgender Art:

$$\begin{array}{llll} \Delta_1\Delta_2\Delta_3 \equiv a_1; & \Delta_1\Delta_4\Delta_8 \equiv b_1; & \Delta_1\Delta_5\Delta_7 \equiv c_1; & \Delta_1\Delta_6\Delta_9 \equiv d_1; \\ \Delta_4\Delta_5\Delta_6 \equiv a_2; & \Delta_3\Delta_6\Delta_7 \equiv b_2; & \Delta_2\Delta_6\Delta_8 \equiv c_2; & \Delta_3\Delta_5\Delta_8 \equiv d_2; \\ \Delta_7\Delta_8\Delta_9 \equiv a_3; & \Delta_2\Delta_5\Delta_9 \equiv b_3; & \Delta_3\Delta_4\Delta_9 \equiv c_3; & \Delta_2\Delta_4\Delta_7 \equiv d_3. \end{array}$$

Dieses Schema geht in das erste über, wenn man für die kleinen Buchsta- die entsprechenden grossen und für die grossen die entsprechenden kleinen setzt. Aus dieser Bemerkung gehen mit Rücksicht auf (II. und 2.) folgende Sätze hervor:

4. *Die neun geraden Linien* Δ *sind die Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe, welche von den neun geraden Linien* Δ *berührt werden.*

Von jedem der Wendepuncte der Curve dritter Ordnung lassen sich nur drei Tangenten an die Curve ziehen, und die Tangirungspuncte liegen in einer geraden Linie. Diese den neun Wendepuncten entsprechenden neun geraden Linien sind die Linien Δ; wie aus ihren oben angegebenen Gleichungen ersichtlich ist. Bringt man hiermit den Lehrsatz 22. aus der frühern Abhandlung in Verbindung, nämlich: „Wenn man von einem variabeln Puncte der Curve dritter Ordnung Tangenten an die Curve zieht und durch die vier Tangirungspuncte drei Linienpaare legt, so berührt jedes von den drei Linienpaaren eine andere Curve dritter Classe": so zeigt sich sogleich, dass die neun Linien Δ die Rückkehrtangenten dieser drei Curven dritter Classe sind.

IV. *Die neun Puncte* Δ *sind die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung, welche durch die neun Puncte gehen.*

Jede Rückkehrtangente der Curve dritter Classe schneidet die Curve nur in drei Puncten, und die Tangenten der Curve in diesen drei Puncten schneiden sich in einem und demselben Puncte. Auf diese Weise entspricht jeder Rückkehrtangente ein Punct, und die den neun Rückehrtangenten entsprechenden neun Puncte sind eben die Puncte Δ. Stellt man diese Bemerkung mit dem reciproken Lehrsatz (22.) zusammen, nämlich: „Wenn man die Curve dritter Classe mit einer variabeln Tangente durchschneidet, so bilden die Tangenten in den vier Schnittpuncten ein vollständiges Viereck, in welchem jede von den drei Diagonalen von einem Punctenpaare begrenzt wird, welches eine andere Curve dritter Ordnung beschreibt": so zeigt sich, dass die neun Puncte Δ die Wendepuncte eben dieser drei Curven dritter Ordnung sind.

Die neun geraden Linien Δ lassen sich auch auf eine andere als die beschriebene Art construiren. Denn betrachtet man das Dreieck a_1, a_2, a_3, so zeigt sich leicht, dass die Linien $a_1\delta_1$ und Δ_1; $a_1\delta_2$ und Δ_2; $a_1\delta_3$ und Δ_3 zu den Seiten A_2 und A_3 des Dreiecks harmonisch sind; ferner dass die Linien

$a_2\delta_4$ und Δ_4; $a_2\delta_5$ und Δ_5; $a_2\delta_6$ und Δ_7 harmonisch sind zu den Seiten A_3 und A_1; endlich dass die Linien $a_3\delta_7$ und Δ_7; $a_3\delta_8$ und Δ_8; $a_3\delta_9$ und Δ_9 harmonisch sind zu den Seiten A_1 und A_2.

Aus dieser Bemerkung ergiebt sich folgender Lehrsatz:

5. *Wenn man durch die neun Wendepuncte einer Curve dritter Ordnung die Seiten eines Dreiecks hindurchlegt (was viermal geschehen kann), den Schnittpunct einer Seite mit der Curve durch eine gerade Linie mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks verbindet und zu dieser Verbindungslinie und den beiden Seiten des Dreiecks, welche sich in ihr schneiden, die vierte harmonische Linie construirt, so geht diese Linie durch eine Ecke eines jeden von den vier Dreiecken hindurch, deren Seiten die Curve in den neun Wendepuncten schneiden.*

Diesem Satze entspricht folgender andere:

V. *Wenn man ein Dreieck construirt, durch dessen Ecken die neun Rückkehrtangenten einer Curve dritter Classe hindurchgehen (was viermal geschehen kann), und zu den beiden Seiten des Dreiecks und der Rückkehrtangente, welche in einer Ecke des Dreiecks zusammenstossen, die vierte harmonische Linie construirt; so schneidet diese die gegenüberliegende Seite des Dreiecks in einem Puncte, durch welchen eine Seite jedes Dreiecks hindurchgeht, in dessen Ecken sich die neun Rückkehrtangenten zu dreien schneiden.*

Königsberg im September 1847.

16.

Transformation einer beliebigen homogenen Function dritten Grades von zwei Variabeln durch lineäre Substitutionen neuer Variabeln, in eine Form, welche nur die dritten Potenzen der neuen Variabeln enthält.

(Von Herrn Professor *Otto Hesse* zu Königsberg i. Pr.)

Es sei

$$1. \qquad f = ax^3 + 3.bx^2y + 3.cxy^2 + dy^3$$

eine beliebig gegebene homogene Function dritten Grades zwischen den beiden Variabeln x und y. Diese Function lässt sich durch Substitutionen von der Form

$$2. \qquad x = \alpha u - \beta v, \qquad y = \alpha' u - \beta' v$$

auf die einfachere Form

$$3. \qquad f = A.u^3 - B.v^3$$

bringen, weil die Zahl der zu bestimmenden Grössen $\alpha, \beta, \alpha', \beta', A$ und B die Zahl der Bedingungsgleichungen um zwei Einheiten übersteigt; woraus zugleich folgt, dass man zweien von den zu bestimmenden Grössen *beliebige* Werthe geben kann, während die übrigen durch sie *bestimmte* Werthe erhalten.

Wenn man den Ausdruck $\frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{d^2f}{\partial x\, \partial y}\right)^2$, gleich wie in der Abhandlung „Ueber die Elimination der Variabeln u. s. w." in diesem Journ. Bd. 26. S. 68., mit dem Namen „*Determinante* der gegebenen Function f in Rücksicht auf die Variabeln x, y" bezeichnet, so kann man, weil f sich auch als eine Function der Variabeln u, v betrachten lässt, eben so die *Determinante* der gegebenen Function in Rücksicht auf die Variabeln u und v bilden. Die erstere werde mit φ, die andere mit φ' bezeichnet. Es ist alsdann

$$4. \qquad \varphi = r^2 \varphi';$$

wo r die Determinante bedeutet, welche aus den Coefficienten von u und

v der Substitutionen (2.) gebildet ist. Den Beweis dieser Gleichung findet man in der oben citirten Abhandlung (S. 89.).

Setzt man in die letzte Gleichung die Werthe φ und φ' und dividirt durch die Zahl 36, so erhält man

$$5. \qquad \frac{\varphi}{36} = (ac-b^2)x^2 + (ad-bc)xy + (bd-c^2)y^2 = -r^2 A.Bu.v.$$

Aus den Substitutionen (2.) ist aber ersichtlich, dass für $u=1$, $v=0$, x und y die Werthe α und α', und für $u=0$, $v=-1$, x und y die Werthe β und β' annehmen. Setzt man also den Theil rechts der letzten Gleichung $=0$, so erhält man die Gleichung

$$6. \qquad \frac{\varphi}{36} = (ac-b^2)x^2 + (ad-bc)xy + (bd-c^2)y^2 = 0,$$

welcher genuggethan wird, wenn man α und α' oder β und β' statt x und y setzt. Die Verhältnisse $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\beta}{\beta'}$ sind demnach als die Wurzeln der quadratischen Gleichung (6.) bestimmt, in welcher $y=1$ ist, und es können, wie schon oben bemerkt, den Grössen α' und β' beliebige Werthe gegeben; z. B. es kann $\alpha'=\beta'=1$ gesetzt werden, wodurch α und β geradezu die Wurzeln der genannten quadratischen Gleichung werden.

Um die Werthe von A und B zu bestimmen, bemerke ich, dass die Function f in A oder in B übergeht, wenn man α und α' oder β und β' statt x und y setzt. Diese Ausdrücke kann man jedoch mit Hülfe der Gleichung (6.) in einfachere verwandeln. Setzt man nämlich der Kürze wegen für die Coefficienten in der Gleichung (6.):

$$ac - b^2 = m, \qquad ad - bc = n, \qquad bd - c^2 = p,$$

so ergeben sich folgende identische Gleichungen:

$$7. \qquad \begin{cases} f - \dfrac{[amx+(3.b.m-a.n)y]}{m^2}\cdot\dfrac{\varphi}{36} = y^2\cdot\dfrac{d^2f}{dx^2}\cdot\dfrac{n^2-4mp}{6m^2}, \\ f - \dfrac{[dpy+(3cp-dn)x]}{p^2}\cdot\dfrac{\varphi}{36} = x^2\cdot\dfrac{d^2f}{dy^2}\cdot\dfrac{n^2-4mp}{6p^2}, \\ f - \left\{\dfrac{a}{m}x+\dfrac{d}{p}\right\}\cdot\dfrac{\varphi}{36} = -x.y\cdot\dfrac{d^2f}{dx\,dy}\cdot\dfrac{n^2-4.mp}{6mp}, \end{cases}$$

deren Theile links sämmtlich in A oder in B übergehen, wenn man α und α' oder β und β' statt x und y setzt, weil φ für diese Werthe der Variabeln verschwindet. Macht man von der ersten Gleichung Gebrauch, indem man die sich aus ihr ergebenden Werthe von A und B in (3.) substituirt, so erhält man die gesuchte transformirte Function:

$$8. \qquad f = \frac{n^2 - 4mp}{6m^2} \cdot \{\alpha'^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha u^3 - \beta'^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta v^3\},$$

wo $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha$ und $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta$ die Ausdrücke bedeuten, in welche der zweite Differentialquotient $\frac{d^2f}{dx^2}$ übergeht, wenn man α und α' oder β und β' statt x und y setzt.

Mit dieser Transformation steht die allgemeine Auflösung der cubischen Gleichungen in der engsten Verbindung. Dann setzt man $\frac{x}{y} = X$, so wird $f = 0$ eine cubische Gleichung in X, von der allgemeinsten Form. Diese Gleichung geht aber, wenn man $\frac{u}{v} = \omega$ und $\alpha' = \beta' = 1$ setzt, durch die Substitutionen

$$9. \qquad X = \frac{\alpha\omega - \beta}{\omega - 1}$$

in

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha \cdot \omega^3 - \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta = 0$$

über; woraus sich, wenn man mit k irgend eine dritte Wurzel der Einheit bezeichnet, der Werth

$$\omega = \frac{1}{k} \sqrt[3]{\left(\frac{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta}{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha}\right)}$$

von ω ergiebt. Bezeichnet man nun durch X_1, X_2, X_3 die drei Wurzeln der Gleichung $f = 0$, durch k eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit, und substituirt den eben gefundenen Werth von ω in (9.), so erhält man

$$11. \qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\alpha \sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta} - \beta \sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha}}{\sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta} - \sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha}}, \\ X_2 = \dfrac{\alpha \sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta} - k\beta \sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha}}{\sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta} - k \sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha}}, \\ X_3 = \dfrac{\alpha \sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta} - k^2\beta \sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha}}{\sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta} - k^2 \sqrt[3]{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha}}. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke der Wurzeln der cubischen Gleichung haben eine Form, in welcher alle algebraischen Functionen, aus welchen sie zusammengesetzt sind, durch rationale Functionen der Wurzeln ausgedrückt werden können. Denn betrachtet man in der Gleichung (11.) α, β und $\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha}{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta}}$ als die Unbekannten, so erhält man durch die Auflösung nach den Unbekannten:

$$12.\quad \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\alpha}{\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_\beta}} = \dfrac{X_1+kX_2+k^2X_3}{X_1+k^2X_2+kX_3}, \\ \alpha = -\dfrac{X_2X_3+k^2X_3X_1+kX_1X_2}{X_1+k^2X_2+kX_3}, \\ \beta = -\dfrac{X_2X_3+kX_3X_1+k^2X_1X_2}{X_1+kX_2+k^2X_3}. \end{cases}$$

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich folgende Regel für die Bildung der Wurzeln einer gegebenen cubischen Gleichung:

Es sei $f(x)=0$ *eine gegebene cubische Gleichung: so stelle man die Determinante der homogenen Function* $y^3 f(\frac{x}{y})$ *dritten Grades auf. Setzt man diese Determinante gleich* 0 *und zugleich* $y=1$, *so erhält man eine quadratische Gleichung in* x, *aus deren Wurzeln* α, β *die Wurzeln* X_1, X_2, X_3 *der gegebenen cubischen Gleichung* $f(x)=0$ *nach Vorschrift der Formeln* (11.) *zusammengesetzt sind.*

Ich will noch bemerken, dass der Ausdruck von X_2, wenn in der gegebenen Gleichung das Glied welches x^2 enthält fehlt, in

$$X_2 = \frac{\alpha\sqrt[3]{\beta}-k\beta\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}-k\sqrt[3]{\alpha}} = -k\sqrt[3]{(\beta.\alpha\beta)} - k^2\sqrt[3]{(\alpha.\alpha\beta)}$$

übergeht. Dieses ist, wenn man für das Product $\alpha\beta$ seinen Werth setzt, die bekannte *Cardani*sche Formel.

Königsberg i. Pr. den 18. December 1847.

17.

Anwendung der bestimmten Integrale zur Reihensummirung; nebst Bemerkungen über die unendlichen Reihen und die bestimmten Integrale überhaupt.

(Von Herrn *J. Dienger*, Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.)

Sehr viele Aufgaben und Entwicklungen der Mathematik führen, wie bekannt, auf unendliche Reihen. Es ist daher immer nöthig, zu untersuchen, innerhalb welcher Gränzen diese Reihen angewendet werden dürfen, oder nicht.

Jede Function, die in der Analysis der mathematischen Betrachtung unterliegt, hat nur so lange eine anschauliche Bedeutung, als ihr Werth bestimmt und endlich ist; sobald er jede Grösse überschreitet, oder, wie man sagt, unendlich gross wird, hört die Bedeutung der Function auf und sie ist für solche Werthe der Beibehaltung in der Analysis im Allgemeinen nicht fähig. Die Analysis zeigt in den Fällen, wo ihre Operationen auf unendlich grosse Zahlen kommen, dass die Rechnung auf besondere Weise geführt werden müsse und der Fall dem allgemeinen Gesetze nicht unmittelbar unterzuordnen sei. Solchen allgemein geltenden Beziehungen unterliegen auch die ohne Ende fortlaufenden Reihen; auch sie sind der Bedingung unterworfen, dass ihre Summe eine bestimmte und endliche sei und nicht jede Grösse übersteige. Geschieht dies, so hat die unendliche Reihe keine Bedeutung mehr; sie ist dann nur noch eine inhaltlose Sammlung von Formen, die den Operationen der Mathematik nicht mehr unterzogen werden *darf*. Thut man es dennoch, so wird man, wie es der der Wissenschaft so früh entrissene *Abel* gesagt hat, beweisen können, was man will: Wahres und Falsches.

Es ist zwar auch die Ansicht geltend gemacht worden, dass bei unendlichen Reihen zweierlei Gesichtspuncte, aus welchen sie zu betrachten wären, festzuhalten sein. Einerseits soll man die Reihen als blosse Formenzusammenstellungen ohne Inhalt, andrerseits als inhaltsvolle Zusammenstellungen ansehen. Im ersten Falle könne von Convergenz oder Divergenz nicht die Rede

sein: im zweiten sei sie zu beachten. Es scheint indess ein leeres (inhaltsloses) Formelwesen der Analysis nicht angemessen zu sein; vielmehr scheint es, eine Form ohne bestimmten Inhalt sei nicht recht denkbar und bleibe wenigstens immer etwas Ungewisses und Vages. Dann ist der Einwurf, den man der ausschliesslichen Anwendung convergenter Reihen entgegengehalten hat: es gebe Fälle, wo auch divergente Reihen zu richtigen Resultaten führen, nur scheinbar. Um ihn zu heben, werde folgender Satz bewiesen:

„Lässt die von $x = a$ bis $x = b > a$ continuirliche endliche Function „y von x sich innerhalb der Gränzen a und $b_1 < b$ durch die zwischen den „Gränzen a und b continuirliche Function $\varphi(x)$ ausdrücken, so ist zwischen „den Gränzen a und b

$$y = \varphi(x).$$"

Es ist zu erinnern, dass hier die Bedeutung von *continuirlich* nicht in jenem engern Sinne genommen ist, welcher in einer frühern Abhandlung aufgestellt wurde, nämlich dass der Differentialquotient endlich sein muss, sondern nur in dem gewöhnlichen Sinne, dass für unendlich kleine Zuwächse der Hauptgrösse auch die Function unendlich kleine Zuwächse erhalte, von welcher Ordnung sie auch seien.

Es sei y_1 der Werth von y für $x = b_1$, und b_2 ein unmittelbar auf b_1 folgender Werth von x, y_2 der entsprechende Werth von y, so dass

$$\mathbf{1.} \quad y_1 = \varphi(b_1)$$

und

$$\mathbf{2.} \quad y_2 - y_1 = \varepsilon$$

ist, wo ε eine unendlich kleine Grösse bezeichnet. Dann behaupte ich, dass nicht

$$\mathbf{3.} \quad y_2 = \varphi_1(b_2)$$

sein kann, wenn φ_1 von φ verschieden ist. Denn aus (2.) folgt, wenn man (3.) beachtet:

$$\mathbf{4.} \quad \varphi_1(b_2) - \varphi(b_1) = \varepsilon.$$

Aber es ist auch, da $\varphi(x)$ von a bis b continuirlich ist:

$$\mathbf{5.} \quad \varphi(b_2) - \varphi(b_1) = \varepsilon_1,$$

wo ε_1 ebenfalls unendlich klein ist. Verbindet man (4. und 5.), so erhält man

$$\mathbf{6.} \quad \varphi_1(b_2) - \varphi(b_2) = \varepsilon - \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Es ist aber $\varphi_1(b_2)$ eine Grösse, die entsteht, wenn man in $\varphi_1(x)$ $x = b_2$ setzt. Eben so entsteht $\varphi(b_2)$, wenn man in $\varphi(x)$ $x = b_2$ setzt. Sollen nun die Resultate dieser Substitutionen einer und derselben Grösse b_2 unendlich wenig verschieden sein, so ist dies offenbar nur dann möglich, wenn

$$\varphi_1(b_2) = \varphi(b_2) \quad \text{oder} \quad y_2 = \varphi(b_2) \quad \text{ist.}$$

Dehnt man diese Schlussart auf die folgenden Werthe von y und x aus, so erhält man den obigen Satz.

Dieser, dem ersten Anscheine nach sehr einfache Grundsatz wird nun bei der Anwendung unendlicher Reiheu maassgebend sein. Ist nämlich y zwischen den Werthen a und b von x continuirlich (im weitern Sinne), und zwischen den Gränzen a und b_1 gleich einer unendlichen, also innerhalb dieser Gränzen convergenten Reihe $F(x)$, welche sich innerhalb dieser Gränzen in einen andern Ausdruck (geschlossen, oder auch in Form einer unendlichen Reihe) $\varphi(x)$ umbilden lässt, der aber zwischen den Gränzen a und b continuirlich (im weitern Sinne) ist: so ist zwischen den Gränzen a und $b > b_1$,

$$y = \varphi(x),$$

obwohl die Gleichungen $y = F(x)$ und $Fx = \varphi(x)$ nur zwischen den Gränzen a und b_1 gelten.

Es folgt ferner, dass wenn in der Gleichung

$$y = F(x)$$

$F(x)$ die Form einer unendlichen Reihe hat, die nur zwischen den Gränzen a und b_1 convergent ist, die Gleichung nur innerhalb jener Gränzen Statt findet. Ist dagegen $\frac{dF(x)}{dx}$ oder $f(x)dx$ continuirlich zwischen den Gränzen a und $b > b_1$, so ist zwischen diesen Gränzen a und b auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d.F(x)}{dx} \quad \text{oder} \quad \int y dx = \int F(x)\,dx,$$

wenn man im Voraus weiss, dass $\frac{dy}{dx}$, oder $\int y\,dx$ innerhalb der Gränzen a und b continuirlich sein werde.

In diesem Sinne könnte von einer scheinbar richtigen Anwendung *divergenter* Reihen die Rede sein, wenn auch davon hier noch keine Spur vorhanden ist; man wendet bloss convergente Reihen an, und nur insofern sie convergent sind. Allein das Endresultat der Operationen erstreckt vielleicht seine Gültigkeit weiter, als die Reihen selbst, die man anwendet. Dies liegt aber dann nicht in den Reihen, sondern in den durch sie dargestellten Ausdrücken.

Der vorliegende Aufsatz hat sich zur Aufgabe gestellt, an einigen Beispielen zu zeigen, wie durch bestimmte Integrale merkwürdige Summationsformeln gefunden werden können. Es sind zu dem Ende in manche Formeln imaginäre Zahlen eingeführt worden. Dieselben gewähren ein wichtiges Mittel

zur Bildung von Reihen, welche nach den trigonometrischen Functionen fortschreiten und welche in den Abwendungen der Mathematik eine so wichtige Rolle spielen. Die gegenwärtige Arbeit schliesst sich an die zwei frühern an, in welchen unendliche Reihen summirt wurden; allein sie hat zugleich so viel möglich eine selbstständige Form.

Ehe wir uns zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Arbeit wenden, dürften vielleicht noch einige Bemerkungen und Ansichten über bestimmte Integrale nicht am unrechten Orte sein. Sie werden verstattet sein, da man in manchen Schriften diesen Punct nicht klar genug erläutert und auch wohl Theoreme ohne weitern Nachweis ihrer Gültigkeit aufgestellt findet.

Wenn die Function $f(x)$ der reellen veränderlichen Grösse x im engern Sinne continuirlich ist zwischen den Gränzen a und $b > a$, so muss die Grösse

$$7. \qquad \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon},$$

wo ε eine unendlich kleine Grösse bezeichnet, *endlich* sein: vorausgesetzt, dass x nicht $< a$ und $x+\varepsilon$ nicht $> b$ ist. Die Grösse (7.) ist bekanntlich der Differentialquotient von $f(x)$, also $= f'(x)$ oder $\frac{df(x)}{dx}$. Die Function $f(x)$ ist umgekehrt das Integral von $\frac{df(x)}{dx}$, also $= \int \frac{df(x)}{dx} dx$. Hieraus folgt, dass wenn das Integral continuirlich ist (im engern Sinne), zwischen den Gränzen a und b, diese Gränzen mit eingerechnet, dass man dann von dem Differentialquotienten nur behaupten könne, er bleibe endlich von a bis $b-\varepsilon$, diese Gränzen mitgezählt und wenn ε eine unendlich kleine Grösse ist. Ist also, umgekehrt, der Differentialquotient continuirlich (im engern Sinne, wie in allem Folgenden), also ebenfalls endlich zwischen a und b (einschliesslich), so ist sein Integral jedenfalls continuirlich zwischen a und $b+\varepsilon$ (einschliesslich). Hört darnach eine Function für $x = b$ auf, endlich zu sein, ist es aber von $x = a$ bis $x = b-\varepsilon$ einschliesslich, so wird das Integral derselben noch endlich sein für $x = b$. So ist z. B.

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} dx = \arc(\sin = x) + C.$$

Hier ist die Function $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ nicht mehr endlich für $x^2 = 1$, wohl aber bis zu dieser Gränze; $\arc(\sin = x)$ dagegen ist noch endlich für $x^2 = 1$; sie hört auf, mit diesem Werthe continuirlich zu sein und wird imaginär.

Daraus folgt, dass jedes Integral $\int \varphi(x) dx$ nur innerhalb der Gränzen

Geltung hat, innerhalb welcher $\varphi(x)$ endlich ist, und dass, wenn $\varphi(x)$ von $x = a$ bis $a = b - \varepsilon$ (einschliesslich) endlich bleibt, $\int \varphi(x)\,dx$ von $x = a$ bis $x = b$ (einschliesslich) Gültigkeit hat. Ist daher die willkürliche Constante für die Integration dadurch bestimmt worden, dass man der Grösse x einen bestimmten Werth beilegte, von welchem man weiss (oder annimmt), dass $\int \varphi(x)\,dx$ ebenfalls für ihn einen bestimmten Werth erlangt, und liegt jener Werth innerhalb der Gränzen a und $b - \varepsilon$, zwischen welchen $\varphi(x)$ endlich bleibt (aber bei dem Ueberschreiten dieser Gränzen aufhört es zu sein), so darf in $\int \varphi(x)\,dx$ der Grösse x kein Werth beigelegt werden, der ausserhalb der Gränzen a und b liegt.

Setzt man nun im Allgemeinen

$$\int \varphi(x)\,dx = \psi(x) + C$$

und ist für $x = a$, $\int \varphi(x)\,dx = 0$, so ist

$$8'. \qquad \int \varphi(x)\,dx = \psi(x) - \psi(a),$$

wo vorausgesetzt wird, dass x zwischen a und b liege, wenn $\varphi(x)$ nur von a bis zu b endlich bleibt. Setzt man dann $x = b$, so findet sich

$$8. \qquad \int_{x=b} \varphi(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a) = \int_0^b \varphi(x)\,dx,$$

und $\int_0^b \varphi(x)\,dx$ ist ein *bestimmtes Integral* zwischen den Gränzen a und $b\,(b > a)$. Es muss hier $\varphi(x)$ von $x = a$ bis $x = b - \varepsilon$ endlich sein, weil sonst $\int_0^b \varphi(x)\,dx$ ohne Bedeutung wäre; wenigstens unter der obigen Annahme.

Nach dieser Betrachtungsweise darf also $\varphi(x)$ nicht unendlich gross werden, von $x = a$ bis $x = b$, so dass $\psi(x)$ continuirlich ist von $x = a$ bis $x = b$; jedenfalls also $\psi(b)$ endlich ist. Ist aber $\psi(x)$ von der Art, dass es für $x = a$ endlich wird, obwohl $\varphi(a)$ unendlich gross ist, so lässt sich nichts desto weniger das bestimmte Integral bis auf diesen Werth von x ausdehnen, indem man annimmt, es werde dasselbe Null für $x = a$. Dies ist dann eine besondere Bestimmungsart der willkürliehen Constante. Das eigentliche Integral (8'.) gilt nur von $x = a + \varepsilon$ bis $x = b$; allein da es für $x = a$ Null wird, und man dies vorausgesetzt hat, so kann man auch sagen, es gelte von $x = a$ bis $x = b$ einschliesslich.

Es kann aber kommen, dass man auf ein $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ geführt wird, in

welchem $\varphi(x)$ innerhalb der Gränzen a und b ein- oder mehreremal unendlich gross wird. Wo dies geschieht, wird sich folgende Betrachtungsart anwenden lassen.

Wenn $\varphi(x)$ endlich ist von $x = a$ bis zu $x = b$, so ist $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ die Summe der Elemente $\varepsilon\varphi(x)$, wenn man dem x alle Werthe von $x = a$ bis zu $x = b$ beilegt: ein Satz, dessen Beweis bekannt ist. Ist nun der Werth von $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ anzugeben, und $\varphi(x)$ wird unendlich für die Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$, welche zwischen a und b liegen, aber weder für a, noch für b: so ist die Aufgabe eigentlich die, die Summe der Elemente $\varepsilon\varphi(x)$ zu finden, welche man erhält, wenn man x von a bis zu b wachsen lässt.

Von $x = a$ bis mit $x = a_1 - \varepsilon$ ist die Summe $\int_a^{a_1-\varepsilon} \varphi(x)\,dx$,

Von $x = a_1 + \varepsilon$ bis mit $x = a_2 - \varepsilon$ ist die Summe $\int_{a_1+\varepsilon}^{a_2-\varepsilon} \varphi(x)\,dx$,

. . . . . .

Von $x = a_n + \varepsilon$ bis mit $x = b$ ist die Summe $\int_{a_n+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx$.

Die gesuchte Summe ist also

$$\int_a^{a_1-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \int_{a_1+\varepsilon}^{a_2-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \int_{a_2+\varepsilon}^{a_3-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx;$$

wozu noch die Summe

$$\varepsilon\sum_{a_1-\varepsilon}^{a_1}\varphi(x) + \varepsilon\sum_{a_2-\varepsilon}^{a_2}\varphi(x) + \ldots + \varepsilon\sum_{a_n-\varepsilon}^{a_n}\varphi(x)$$

kommt. Ist nun $\frac{1}{\varphi(x)}$ für alle Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ unendlich klein und von höchstens der nämlichen Ordnung wie ε, so ist $\varepsilon\varphi(x) = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ für $x = a_1$, $\ldots a_n$ (vielleicht auch $a_1 \pm \varepsilon$ u. s. f.) *endlich*; die genannten Elementensummen haben also *endliche* Werthe und man wird von $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ sprechen dürfen: ist es nicht der Fall, so hat der Ausdruck $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ keine anschauliche Bedeutung.

Nun ist im Allgemeinen

$$\psi(x+\varepsilon) - \psi(x) = \varepsilon\varphi(x).$$

Sind demnach $\varepsilon\varphi(a_1)$, $\psi(a_1+\varepsilon) - \psi(a_1)$ endlich, so muss auch, nach dem Satze weiter oben,

$$\varepsilon\varphi(a_1) = \psi(a_1+\varepsilon) - \psi(a)$$

sein. Sind also $\psi(a_1), \psi(a_2), \ldots \psi(a_n)$ alle endlich, so ist

$$\sum_{a_1-\varepsilon}^{a_1}\varepsilon\varphi(x)+\sum_{a_2-\varepsilon}^{a_2}\varepsilon\varphi(x)+\ldots.+\sum_{a_n-\varepsilon}^{a_n}\varepsilon\varphi(x)$$

$$\varepsilon[\varphi(a_1-\varepsilon)+\varphi(a_1)]+\varepsilon[\varphi(a_2-\varepsilon)+\varphi(a_2)]+\ldots.$$

$$\ldots=\psi(a_1+\varepsilon)-\psi(a_1-\varepsilon)+\psi(a_2+\varepsilon)-\psi(a_2-\varepsilon)+\ldots.+\psi(a_n+\varepsilon)-\psi(a_n-\varepsilon);$$

wofür sich auch, da der Rechnung nach das Resultat dasselbe ist,

$$\int_{a_1-\varepsilon}^{a_1+\varepsilon}\varphi(x)\,dx+\int_{a_2-\varepsilon}^{a_2+\varepsilon}\varphi(x)\,dx+\ldots.+\int_{a_n-\varepsilon}^{a_n+\varepsilon}\varphi(x)\,dx$$

setzen lässt. Man erhält also, wenn $\varphi(x)$ unendlich gross ist, für $x=a_1, a_2, \ldots. a_n$, und wenn $\varepsilon\varphi(a_1), \varepsilon\varphi(a_2), \ldots. \varepsilon\varphi(a_n)$ alle endlich sind, wie $\psi(a_1), \ldots. \psi(a_n)$, nach der obigen Vorstellungsweise:

9. $$\int_a^b\varphi(x)\,dx=\int_a^{a_1-\varepsilon}\varphi(x)\,dx+\int_{a_1+\varepsilon}^{a_2-\varepsilon}\varphi(x)\,dx+\ldots.+\int_{a_n+\varepsilon}^{b}\varphi(x)\,dx$$
$$+\int_{a_1-\varepsilon}^{a_1+\varepsilon}\varphi(x)\,dx+\int_{a_2-\varepsilon}^{a_2+\varepsilon}\varphi(x)\,dx+\ldots.+\int_{a_n-\varepsilon}^{a_n+\varepsilon}\varphi(x)\,dx;$$

wo übrigens die zweite Zeile nicht bestimmte Integrale im eigentlichen Sinne enthält.

Den Fall, wo $\varphi(a)$ oder $\varphi(b)$ unendlich ist, übergehen wir, da er sich leicht auf das Gesagte zurückführen lässt. Eben so mag hier keine weitere Ausführung der angeregten Untersuchung gegeben werden, da sie zu dem gegenwärtigen Zweck nicht nothwendig ist. Wir wollten bloss unsere Ansicht in diesem wichtigen Punct der Integralrechnung für das Folgende aussprechen.

Zum Schlusse gegenwärtiger Einleitung soll noch ein Theorem aufgestellt werden, welches in der Integralrechnung von mannigfacher Anwendung sein kann. Schliesst man nämlich nach der Analogie, so wird sich die Schwierigkeit, die *Cauchy* in seiner Differentialrechnung am Ende der zehnten Vorlesung berührt, heben lassen.

Bekanntlich ist, wenn Θ eine Grösse zwischen 0 und 1 bezeichnet und $f(0), f'(0), \ldots. f^{(n)}(0)$ endlich und $f(x), f'(x), \ldots. f^{(n)}(x)$ von 0 bis h continuirlich (im engern Sinne) sind, wenn man x einen Werth zwischen 0 und h beilegt:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots.+\frac{x^{n-1}}{1.\ldots.(n-1)}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.\ldots.n}f^{(n)}(\Theta x),$$

also

10. $$\int F(x)\,f(x)\,dx=f(0)\int F(x)\,dx+f'(0)\int xF(x)\,dx+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{1}{1.2.\ldots.(n-1)}f^{(n-1)}(0)\int x^{n-1}F(x)\,dx+\frac{1}{1.\ldots.n}\int x^n f^{(n)}(\Theta x)\,F(x)\,dx.$$

Verschwindet nun $\frac{1}{1.\ldots.n}\int x^n f^{(n)}(\Theta x)\,F(x)\,dx$ für ein unendlich grosses n, so ist genau:

11. $$\int F(x)f(x)dx = f(0)\int F(dx) + \frac{f'(0)}{1}\int xF(x)dx + \ldots. + C,$$

und es kann x alle Werthe von 0 bis h haben, wenn auch $F(x)$ für dieselben endlich bleibt. In diesem Falle ist die Reihe (11.) jedenfalls *convergent* und hat die angegebene Summe; ist sie also *divergent*, so findet die Gleichung (11.) gewiss nicht Statt. Ist die Reihe aber auch convergent, so ist die Gleichung (11.) doch nur dann gültig, wenn

$$\frac{1}{1.2....n}\int x^n f^{(n)}(\Theta x)F(x)dx$$

für ein unendlich grosses n verschwindet.

§. 1.

Bekanntlich ist

$$\int (\sqrt{(a^2-x^2)})^n dx = \frac{x(\sqrt{a^2-x^2})^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (\sqrt{(a^2-x^2)})^{n-2}dx \quad \text{und}$$

$$\int_0^a (\sqrt{(a^2-x^2)})^n dx = \frac{na^2}{n+1}\int_0^a (\sqrt{(a^2-x^2)})^{n-2}dx$$

für $n > 0$.

Setzt man nun $n = 2m$, so erhält man auf diesem Wege

1. $$\int_0^a (\sqrt{(a^2-x^2)})^{2m} dx = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2}{3}a^{2m}\int_0^a dx$$
$$= \frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2}{3}a^{2m+1}.$$

Nun ist

$$(\sqrt{(a^2-x^2)})^{2m} = (a^2-x^2)^m = a^{2m} - ma^{2m-2}x^2 + \frac{m.(m-1)}{1.2}a^{2m-4}x^4 - \ldots.(-1)^m x^{2m}$$

$$\int_0^a (\sqrt{(a^2-x^2)})^{2m} dx$$

$$= a^{2m+1}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{m}{1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{m}{1}\cdot\tfrac{1}{2}(m-1) - \frac{1}{7}\frac{m}{1}\cdot\tfrac{1}{2}(m-1)\tfrac{1}{3}.(m-2) + \ldots. + (-1)^m\cdot\frac{1}{2m+1}\right].$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (1.), so erhält man

2. $$1 - \tfrac{1}{3}m + \frac{1}{5}\cdot\frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots. + \frac{(-1)^m}{2m+1}$$
$$= \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\ldots\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{2}{3};$$

welches gültig ist für jedes ganze $m > 0$.

Ganz eben so findet sich

$$\int_0^a (\sqrt{(a^2-x^2)})^{2m+1} dx = \frac{2m+1}{2m+2}a^2\cdot\frac{2m-1}{2m}a^2\ldots.\tfrac{3}{4}a^2\int_0^a (\sqrt{(a^2-x^2)})\,dx.$$

Nun ist

$$\int \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right) \text{ und}$$

$$\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = \tfrac{1}{2}a^2 . \tfrac{1}{2}\pi,$$

also

$$3. \qquad \int_0^a (\sqrt{(a^2-x^2)})^{2m+1}\,dx = \frac{2m+1}{2m+2}\cdot\frac{2m-1}{2m} \ldots . \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}a^{2m+2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi.$$

Ferner ist

$$(\sqrt{(a^2-x^2)})^{2m+1} = (a^2-x^2)^{\frac{2m+1}{2}}$$

$$= a^{2m+1} - \tfrac{1}{2}(2m+1)a^{2m-1}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(2m+1).\frac{1}{2}(2m-1)}{1.2}a^{2m-3}x^4 - \ldots .$$

$$\int_0^a (\sqrt{(a^2-x^2)})^{2m+1}\,dx$$

$$= a^{2m+2}[1 - \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{2}(2m+1) + \tfrac{1}{5}.\tfrac{1}{2}(2m+1).\tfrac{1}{4}(2m-1) - \tfrac{1}{7}.\tfrac{1}{2}(2m+1).\tfrac{1}{4}(2m-1).\tfrac{1}{6}(2m-3) + \ldots],$$

vorausgesetzt, dass $\frac{1}{2}(2m+1) > 0$ sei, wo $m \gtreqless 0$.

Vergleicht man dies mit (3.), so ergiebt sich

$$4. \qquad \tfrac{1}{2}\pi = \frac{(2m+2)2m \ldots . 4.2}{(2m+1)(2m-1) \ldots . 3.1}[1 - \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{2}(2m+1) + \tfrac{1}{5}.\tfrac{1}{2}(2m+1).\tfrac{1}{4}(2m-1)$$
$$+ \tfrac{1}{7}.\tfrac{1}{2}(2m+1).\tfrac{1}{4}(2m-1).\tfrac{1}{6}(2m-3) + \ldots .]$$

für ein ganzes $m \gtreqless 0$.

Für $m = 0$ ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\pi = 2[1 - \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5}\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{7}\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6} - \tfrac{1}{9}\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}.\tfrac{5}{8} - \ldots .].$$

Diese Resultate lassen sich auf folgende Weise verallgemeinern. Es ist

$$\int x^n (\sqrt{(a^2-x^2)})^m\,dx = -\frac{x^{n-1}(\sqrt{(a^2-x^2)})^{m+2}}{n+m+1} + \frac{(n-1)a^2}{n+m+1}\int x^{n-2}(\sqrt{(a^2-x^2)})^m\,dx,$$

also ist für ein ganzes $n > 1$:

$$\int_0^a x^n (\sqrt{(a^2-x^2)})^m\,dx = \frac{(n-1)a^2}{n+m+1}\int_0^a x^{n-2}(\sqrt{(a^2-x^2)})^m\,dx$$

und für $n = 1$,

$$\int_0^a x(\sqrt{(a^2-x^2)})^m\,dx = \frac{a^{m+2}}{m+2}.$$

Setzt man $n = 2r+1$, so erhält man

$$5. \qquad \int_0^a x^{2r+1}(\sqrt{(a^2-x^2)})^m\,dx = \frac{2r.a^2}{m+2r+2}\cdot\frac{(2r-2)a}{m+2r} \ldots . \frac{2}{m+4}a^2\int_0^a x(\sqrt{(a^2-x^2)})^m\,dx$$

$$= \frac{2r}{m+2r+2}\cdot\frac{2r-2}{m+2r} \ldots . \frac{2}{m+4}\,\frac{a^{2r+m+2}}{m+2}.$$

Dieses Resultat setzt $r > 0$ und gleich einer *ganzen* Zahl voraus.

Nun ist für $x^2 \lesseqgtr a^2$ und $m > 0$:

$$(\sqrt{(a^2-x^2)})^m = (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}m} = a^m - \tfrac{1}{2}m\,a^{m-2}x^2 + \tfrac{1}{2}m.\tfrac{1}{4}(m-2)a^{m-4}x^4 - \ldots .$$

also

$$x^{2r+1}(\sqrt{(a^2-x^2)})^m = a^m x^{2r+1} - \tfrac{1}{2} m\, a^{m-2} x^{2r+3} + \ldots.$$

$$\int_0^a x^{2n+1}(\sqrt{(a^2-x^2)})^m dx = a^{m+2r+2}\left[\frac{1}{2r+2} - \frac{1}{2r+4}\cdot\tfrac{1}{2}m + \frac{1}{2r+6}\,\tfrac{1}{2}m\cdot\tfrac{1}{4}(m-2) - \ldots.\right].$$

Vergleicht man dies mit (5.), so ergiebt sich

$$6.\quad \frac{2r}{m+2r+2}\cdot\frac{2r-2}{m+2r}\cdots\frac{2}{m+4}\cdot\frac{1}{m+2} = \frac{1}{2r+2} - \frac{1}{2r+4}\cdot\tfrac{1}{2}m + \frac{1}{2r+6}\cdot\tfrac{1}{2}m\cdot\tfrac{1}{4}(m-2) - \ldots.$$

für $r > 0$ und gleich einer *ganzen* Zahl, und für $m \geqq 0$.

Ganz eben so findet sich

$$\int_0^a x^{2r}(\sqrt{(a^2-x^2)})^m dx = \frac{2r-1}{m+2r+1}\cdot\frac{2r-3}{m+2r-1}\cdots\frac{1}{m+3}a^{2r}\int_0^a (\sqrt{(a^2-x^2)})^m dx.$$

Es sei nun $m = 2p+1$, so ist

$$\int_0^a x^{2r}(\sqrt{(a^2-x^2)})^{2p+1} dx$$

$$= \frac{2r-1}{2p+2r+2}\cdot\frac{2r-3}{2p+2r-1}\cdots\frac{1}{2p+4}\cdot\frac{2p+1}{2p+2}\cdot\frac{2p-1}{2p}\cdots\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}a^{2r+2p+2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi.$$

Entwickelt man dies in eine Reihe, integrirt und vergleicht die Resultate, so erhält man

$$7.\quad \frac{2r-1}{2p+2r+2}\cdot\frac{2r-3}{2p+2r}\cdots\frac{1}{2p+4}\cdot\frac{2p+1}{2p+2}\cdot\frac{2p-1}{2p}\cdots\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi$$

$$= \frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2r+3}\cdot\tfrac{1}{2}(2p+1) + \frac{1}{2r+5}\cdot\tfrac{1}{2}(2p+1)\cdot\tfrac{1}{4}(2p-1)$$

$$- \frac{1}{2r+7}\,\tfrac{1}{2}(2p+1)\cdot\tfrac{1}{4}(2p-1)\cdot\tfrac{1}{6}(2p-3) + \ldots.$$

Desgleichen ist

$$\int_0^a x^{2r}(\sqrt{(a^2-x^2)})^{2p} dx = \frac{2r-1}{2p+2r+1}\cdot\frac{2r-3}{2p+2r-1}\cdots\frac{1}{2p+3}\cdot\frac{2p}{2p+1}\,\frac{2p-2}{2p-1}\cdots\tfrac{2}{3}a^{2p+2r+1}.$$

Entwickelt man wieder die Reihe, integrirt und vergleicht die Resultate, so ergiebt sich

$$8.\quad \frac{2r-1}{2p+2r+1}\cdot\frac{2r-3}{2p+2r-1}\cdots\frac{1}{2p+3}\cdot\frac{2p}{2p+1}\cdot\frac{2p-2}{2p-1}\cdots\tfrac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2r+3}\cdot\frac{p}{1} + \frac{1}{2r+5}\,\frac{p\cdot(p-1)}{1.2} - \ldots. + \frac{(-1)^p}{2r+2p+1}.$$

Hier muss $r > 0$ und eine *ganze* Zahl und $p > 0$ und ebenfalls eine *ganze* Zahl sein.

Setzt man in (8.) $p = r$, so ergiebt sich

$$9.\quad \frac{2r.(2r-2)....2}{(4r+1)(4r-1)....(2r+1)}$$

$$= \frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2r+3}\cdot\frac{r}{1} + \frac{1}{2r+5}\,\frac{r.(r-1)}{1.2} - \ldots. + \frac{(-1)^r}{4r+1}.$$

wenn $r > 0$ und eine ganze Zahl ist.

§. 2.

Für $\sin x = y$, und

$$\int \sin^{2r+1} x dx = z \quad \text{ist}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sin^{2r+1} x = y^{2r+1} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\cos x = \frac{dz}{dy}\sqrt{(1-y^2)},$$

vorausgesetzt, dass x zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ (einschliesslich) liege. Hieraus folgt

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y^{2r+1}}{\sqrt{(1-y^2)}},\quad z = \int \frac{y^{2r+1}}{\sqrt{(1-y^2)}}\,dy = \int \sin^{2r+1} x dx,\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2r+1} x dx = \int_0^1 \frac{y^{2r+1}}{\sqrt{(1-y^2)}} dy.$$

Nun ist

$$\int \frac{y^{2r+1}}{\sqrt{(1-y^2)}}\,dy = -\frac{y^{2r}\sqrt{(1-y^2)}}{2r+1} + \frac{2r}{2r+1}\int \frac{y^{2r-1}dy}{\sqrt{(1-y^2)}},\quad \int_0^1 \frac{y^{2r+1}dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{2r}{2r+1}\int_0^1 \frac{y^{2r-1}dy}{\sqrt{(1-y^2)}},$$

wenn $r > 0$; also ist

$$\int_0^1 \frac{y^{2r+1}dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{2r.(2r-2)(2r-4)....2}{(2r+1)(2r-1)(2r-3)....3}\int_0^1 \frac{ydy}{\sqrt{(1-y^2)}}.$$

Da aber $\int_0^1 \frac{ydy}{\sqrt{(1-y^2)}} = 1$, so ist

$$1.\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2r+1} x dx = \frac{2r.(2r-2)....2}{(2r+1)(2r-1)....3},$$

Nun ist für ein positives ganzes $2r+1$:

$$\sin^{2r+1} x = \frac{(-1)^r}{2^{2r}}\left[\sin(2r+1)x - (2r+1)\sin(2r-1)x\right.$$

$$\left. + \frac{2r+1}{1}\cdot\tfrac{1}{2}(2r)\sin(2r-3)x - .... (-1)^r \frac{(2r+1)....(r+2)}{1.2....r}\sin x\right]$$

von $x = 0$ bis $x = \pi$. Daher

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2r+1} x dx$$

$$= \frac{(-1)^r}{2^{2r}}\left[\frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2r-1}\frac{2r+1}{1} + \frac{2r-3}{1}\frac{(2r+1)2r}{1.2} - .... (-1)^r \frac{(2r+1)2r....(r+2)}{1.2....r}\right].$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (1.), so ergiebt sich

$$2.\qquad \frac{2r.(2r-2)....2}{(2r+1)(2r-1)....3}$$

$$\frac{(-1)^r}{2^{2r}}\left[\frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2r-1}\frac{2r+1}{1} + \frac{1}{2r-3}\frac{2r+1}{1}\cdot\tfrac{1}{2}(2r) - .... + (-1)^r \frac{(2r+1)2r....(r+2)}{1.2....r}\right]$$

für ein ganzzahliges $r > 0$.

(Die Fortsetzung folgt.)

18.

Essai d'une théorie générale du centre de forces, precédé de quelques considérations sur la résultante.

(Par Mr. *Steichen*, professeur à l'école militaire de Bruxelles.)

Première partie.

Monsieur *Minding* de Berlin, a le premier établi entr'autres théorèmes quelques propriétés intéressantes sur ce qu'on peut nommer le *centre de forces non parallèles.* Comme les résultats que nous avons trouvés sur cette matière n'ont que peu d'analogie avec les siens et renferment quelques propriétés nouvelles, nous avons pensé que nos recherches pourraient également être livrées à la publicité.

§. 1. Avant que d'entreprendre la solution du problème que nous avons particulièrement en vue, nous rappelerons le principe fondamental de la transformation des moments et quelques autres considérations. Connaissant le moment total et principal d'une force, relatif à un point fixe donné, on obtient le moment de la force autour de tout autre axe fixe en ce point, en multipliant le premier par le cosinus de l'angle des deux axes. En démontrant directement ce principe, et sans faire intervenir inutilement la théorie de la projection des surfaces et des aires, on a tout ce qu'il faut dans la transformation générale des moments.

Quand plusieurs forces agissent sur un corps rigide pourvu d'un point fixe, il existera toujours un axe en ce point autour duquel la somme des moments est un maximum. C'est cet axe que l'on nomme l'axe principal. De même le plan au point fixe est ce qu'on doit proprement nommer le plan principal: il devient seulement identique, quant à sa direction, avec ce que *Laplace* appelle le plan *invariable* dans le principe des aires et des moments des quantités de mouvement d'un système de corpuscules, soumis à leurs actions mutuelles.

La manière la plus simple et la plus directe de déterminer l'axe principal et le plan principal en un point fixe donné d'un système rigide, est sans doute celle qui résulte de la définition même qui précéde. En effet, en nommant P, P', P'' .... les forces proposées, (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') .... les coordonnées rectangles de leurs points d'application extérieurs, N, M, L leurs moments autour de trois axes rectangles (ox, oy, oz) du point fixe, et ω, φ, ψ les angles de ces axes et d'une ligne droite, passant par l'origine suivant une direction d'abord arbitraire, on aura pour la valeur μ du moment des forces autour de cette ligne prise comme essieu de rotation, et en vertu du principe fondamental:

$$\mu = N \cos \omega + M \cos \varphi + L \cos \psi.$$

En cherchant le maximum de μ, on obtient immédiatement pour le maximum de la somme des moments et pour la direction de l'axe principal les formules connues:

$$\mu = \sqrt{(N^2+M^2+L^2)}:$$

$$\cos \omega = \frac{N}{\mu}, \qquad \cos \varphi = \frac{M}{\mu}, \qquad \cos \psi = \frac{L}{\mu}.$$

Ainsi pour nous l'axe principal n'est pas seulement une ligne déterminée de direction, mais encore de position, vu qu'il passe toujours par le point fixe ou le centre de moments: de même le plan principal est à la fois déterminé de position et de direction. Le centre de moments est un point fixe quelconque d'un système rigide par lequel passent tous les axes ou essieux fixes de rotation autour desquels on prend les moments des forces proposées; nous disons axes ou essieux fixes, parceque dans les trois dimensions nous ne comprenons bien clairement la signification mécanique du moment d'une force que quand l'axe autour duquel on estime ce moment, est censé fixe dans le corps qui n'a plus que la liberté de tourner et de glisser sur lui.

§. 2. Pour abréger le langage et pour plus de clarté dans les idées, nous nommerons *résultante de transport* d'un système quelconque de forces données la force unique à laquelle se réduisent toujours nécessairement toutes ces forces, étant ramenées ou transportées parallèlement à elles mêmes en un seul et même point de l'espace. La résultante de transport a donc toujours une direction déterminée; mais elle reste arbitraire ou indéterminée de position. Au contraire, nous nommerons *résultante effective* la force unique, si toutefois elle existe, qui est capable de produire sur un corps les effets de mouvement mêmes dont les forces proposées sont capables en temps égal; et qui de plus a même intensité et même direction que leur résultante de

transport qui existe toujours. Ainsi la résultante effective doit être déterminée à la fois de position et de direction: cette détermination de position résulte de l'équation de condition connue; et il est d'ailleurs évident à priori que si une force agissant sur un solide libre ou pourvu d'un point fixe suivant une ligne donnée, est capable d'un certain effet, elle doit généralement produire un effet différent, lorsqu'elle viendrait à agir suivant une droite différente mais parallèle à la première.

En désignant par X, Y, Z la somme des projections orthogonales des forces d'un même système sur les trois axes coordonnés respectifs, on prouve que l'équation de condition d'une résultante effective, est

$$L.Z + N.X + M.Y = 0 \ldots. (E);$$

ce qui signifie géométriquement (et c'est ce que *Poisson* a déjà fait remarquer dans la nouvelle édition de la mécanique): que si les forces admettent une résultante effective, celle-ci doit croiser l'axe principal à angle droit. En effet, en remarquant que $X = R\cos A$, $Y = R\cos B$, $Z = R\cos C$, A, B, C marquant les trois angles de la force $(+R)$ avec les axes coordonnées, et qu'en outre $N = \mu\cos\omega$, $M = \mu.\cos\varphi$, $L = \mu.\cos\psi$, on deduit de (E) cette autre égalité:

$$\cos A.\cos\omega + \cos B.\cos\varphi + \cos C.\cos\psi = 0;$$

mais cette interprétation géométrique qui a échappé à d'autres auteurs, est loin d'exprimer le dernier mot sur la résultante effective; car on a toujours admis tacitement que celle-ci soit égale et parallèle à la résultante de transport; cette interprétation exprime donc simplement que pour l'existence d'une force effective unique, l'axe du moment principal doit croiser à angle droit la direction de la résultante de transport de toutes les forces proposées: or je dis qu'elle est insuffisante, et que l'équation (E) a une signification plus large et plus caractéristique; qu'elle exprime de plus *que la résultante effective est située dans le plan principal des forces proposées.* En effet, en dénotant par p_1, q_1, r_1 les coordonnées courantes de la résultante, et par x_1, y_1, z_1 celles d'un point quelconque du plan principal, on aura

$$q_1 = \frac{Yp_1 - L}{X}, \qquad r_1 = \frac{M + Zp_1}{X} \qquad \text{et}$$

$$\cos\omega.x_1 + \cos\varphi.y_1 + \cos\psi.z_1 = 0.$$

Or en faisant à la fois dans celle-ci $x_1 = p_1$, $y_1 = q_1$, $z_1 = r_1$, et substituant les valeurs précédentes de q_1, r_1 en p_1, on obtient l'équation suivante:

$$(X\cos\omega + Y\cos\varphi + Z\cos\psi)p_1 - ML + ML = 0,$$

laquelle étant identique en vertu de la condition (E), laisse indéterminées les coordonnées du point de rencontre du plan avec la ligne d'action de la force unique; donc celle-ci se trouve dans le plan principal même.

§. **3.** Comme cette propriété de position de la résultante effective d'un système de forces est nouvelle, et qu'elle peut servir utilement dans de certaines recherches de statique rationnelle, ce qui resultera de la discussion même qu'on entreprendra plus loin, nous allons en donner une démonstration plus sensible et plus directe que la précédente. On sait déjà par l'équation (E) que l'axe principal et la résultante effective doivent se croiser à angle droit dans l'espace; cette force se trouve donc en tout cas située au moins dans un plan parallèle au plan principal, et donc l'équation sera par conséquent

$$x_1 \cos \omega + y_1 \cos \varphi + z_1 \cos \psi = k$$

k marque la distance de l'origine (0) à ce plan, distance qui se mesure sur l'axe principal même ou sur son prolongement. Si donc ϱ dénote le bras de levier de la résultante ou la perpendiculaire abaissée du pied de k sur R, on aura

$$R \cdot \varrho = \sqrt{(N^2+M^2+L^2)} = \mu, \quad \text{et} \quad \varrho = \frac{\mu}{R}.$$

Mais en nommant x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées du point d'intersection de ϱ avec R, résultante effective, on obtient

$$R^2 = x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1 - \varrho^2, \qquad \text{d'où:}$$

$$x'_1 \cos \omega + y'_1 \cos \varphi + z'_1 \cos \psi - \sqrt{(x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1-\varrho^2)} = 0,$$

et les deux équations de (R) donneront

$$Yx'_1 - Xy'_1 = R \cos B \cdot x'_1 - R \cos A \cdot y'_1 = L : R \cos C \cdot y'_1 - R \cos B \cdot z'_1 = N.$$

Si donc on rémarque que $\varrho \cos \omega = \frac{N}{R}$, $\varrho \cos \varphi = \frac{M}{R}$, $\varrho \cos \psi = \frac{L}{R}$, on déduit de là:

$$z'_1 = \frac{x'_1 \cos C + \varrho \cos \varphi}{\cos A}, \qquad y'_1 = \frac{x'_1 \cos B - \varrho \cdot \cos \psi}{\cos A},$$

et en portant ces valeurs dans la dernière équation du plan parallèle dont il s'agit, on trouve

$$x'_1(\cos A \cdot \cos \omega + \cos B \cdot \cos \varphi + \cos C \cdot \cos \psi) \pm \sqrt{(x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1-\varrho^2)} = 0.$$

Puisque donc en vertu de la dernière équation (E) le facteur total de x'_1 de la dernière est nul, il restera simplement en vertu de l'égalité citée:

$$\sqrt{(x'^2_1+y'^2_1+z'^2_1-\varrho^2)} = R = 0;$$

c'est là en effet ce qu'il fallait démontrer. Si dans cette dernière équation on substitue les valeurs de y'_1, z'_1 en x'_1, on trouve l'équation suivante qui fait

d'abord connaître x'_1 et ensuite y'_1, z'_1 en fonction des quantités déjà connues $\varrho, A, B, C, \omega, \varphi, \psi$, ou de $N, M, L, X, Y, Z, \ldots$:

$$x'_1 = \varrho.(\cos B.\cos\psi - \cos C.\cos\varphi)$$
$$\pm V[\varrho^2(\cos B\cos\psi - C.\cos\varphi)^2 + \varrho^2\cos^2 A - \varrho^2(\cos^2\varphi + \cos^2\psi)],$$

et comme en remettant pour $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\omega$ leurs valeurs sous la quantité radicale, on trouve celle-ci équivalente à $\pm\varrho.V(XN+MY+LZ).V(XN-MY-LZ) = 0$, et il restera simplement pour x'_1 et ensuite pour y'_1, z'_1 les valeurs symétriques:

$x'_1 = \varrho.(\cos B\cos\psi - \cos C.\cos\varphi)$, $y'_1 = \varrho(\cos C.\cos\omega - \cos A\cos\psi)$,

$$z' = \varrho.(\cos A\cos\varphi - \cos B\cos\omega),$$

ou bien

$x'_1 = (Y.L-Z.M):R^2$; $y'_1=(Z.N-X.L):R^2$; $z'_1=(X.N-Y.N):R^2$.

§. 4. Ce qui précède complète donc en quelques points ce que l'on expose habituellement sur la résultante dans les traités de mécanique, et nous allons y ajouter une autre consideration qui exprime une conséquence nécessaire de la propriété de position de la résultante. Toutes les fois que l'on se donne le point fixe ou le centre de moments dans un système rigide, et trois axes coordonnés rectangles en ce point, d'ailleurs arbitraires, tout système de forces qui remplit la condition (E), aura une résultante effective finie ou infiniment petite, mais alors arbitraire de direction et pourvue d'un bras de levier infini. Cette résultante sera située dans le plan principal à une distance ϱ de l'origine; elle agit suivant une tangente au cercle de rayon ϱ, et menée parallèlement à la direction de la résultante de transport. Mais si l'on changeait le centre de moments, et qu'on le transportât du point (0) en un point (0'), on aurait en ce point un autre axe principal, et une résultante effective de même direction et de même intensité, mais pourvue d'un autre bras de levier, et située dans le nouveau plan principal. Il faut donc pour que la résultante effective d'un système de forces données soit unique et absolue, que les plans principaux, relatifs à différents points fixes successifs, se coupent suivant une seule et même droite, ligne d'action *permanente* et *invariable* de cette force unique. Nous voilà donc parvenu à une propriété du plan principal d'une simplicité extrême: tous les plans principaux relatifs à un même système de forces à résultante effective, mais a des points fixes quelconques se coupent suivant la ligne d'action de cette force unique; *autrement dit.* Lorsque l'on déplace de toutes les manières possibles le centre des moments, le plan principal tourne invariablement autour de la ligne d'action

de la résultante. Si le système de forces n'admet plus de résultante, cette loi de déplacement du plan principal par un simple mouvement rotatoire cesse d'avoir lieu.

Démontrons présentement par la voie analytique cette propriété des plans principaux des forces. Si l'on imagine au point $(0')$ trois nouvelles directrices coordonnées $(0'x', 0'y', 0'z')$, et que l'on designe par (a', b', c') les coordonnées de $(0')$, rapporté aux axes anciens, par L', N', M' les moments des forces autour de $0'z', 0'x', 0'y'$ respectivement, on trouvera facilement:

$$L' = L - \Sigma P(a' \cos\beta - b' \cos\alpha) = L + b'X - a'Y,$$
$$N' = N - \Sigma P(b' \cos\gamma - c' \cos\beta) = N + c'Y - b'Z,$$
$$M' = M - \Sigma P(c' \cos\alpha - a' \cos\gamma) = M + a'Z - c'X.$$

En raisonnant toujours dans l'hypothèse d'une résultante effective et de l'existence de la condition (E), on reconnait immédiatement que cette autre équation analogue

$$L'.Z + N'.X + M'.Y = 0$$

subsiste également et d'elle-même; et il en est nécessairement ainsi; car si plusieurs forces données ont une résultante pour un centre de moments donné, elles doivent l'admettre encore pour tout autre point quelconque, pris à son tour pour centre de moments. Seulement cette résultante sera située alors dans le nouveau plan principal en $(0')$ où elle agit avec un bras de levier $\varrho' = \sqrt{(L'^2 + M'^2 + N'^2)} : R = \mu' : R$; et l'on obtient la valeur de μ' à l'aide de l'équation:

$$\mu'^2 = b'^2X^2 + c'^2Y^2 + a'^2Z^2 - 2a'b'XY - 2b'c'YZ - 2c'a'ZX + a'^2Y^2 + b'^2Z^2 + c'^2X^2 + \mu^2 + 2L(b'X - a'Y) + 2N.(c'Y - b'Z) + 2M(a'Z - c'X).$$

Si l'on pose pour abréger $a'Y - b'X = D$, $b'Z - c'Y = E$, $c'X - a'Z = G$, on aura plus simplement:

$$\mu'^2 = \mu^2 + D^2 + E^2 + G^2 + 2L.D + 2N.E + 2M.G,$$

et pour les équations des plans principaux en $(0, 0')$ il vient:

$$Nx_1 + My_1 + Lz_1 = 0 \ldots. (P'),$$
$$N'x_1 + M'y_1 + L'z_1 - (N'a' + M'b' + L'c') = 0,$$

ou

$$(N - E)x_1 + (M - G)y_1 + (L - D)z_1 - (N'a' + M'b' + L'c') = 0 \ldots. (P').$$

Si eu égard à la condition $Ea' + Cb' + Dc' = 0$, facile à vérifier, on remarque que $N'a' + M'b' + L'c' = Na' + Mb' + Lc'$, on peut mettre l'équation du plan (P') sous la forme

$$(N - E)x_1 + (M - G)y_1 + (L - D)z_1 - (Na' + Mb' + Lc') = 0 \ldots. (P').$$

Ainsi an prenant un instant $Na' + Mb' + Lc' = H$, on peut dire que la ligne d'intersection des plans (P, P') est représentée par l'existence simultanée de leurs équations ou de ces deux-ci:

$$Nx_1 + My_1 + Lz_1 = 0, \qquad Ex_1 + Gy_1 + Dz_1 + H = 0 \ldots. (P, P').$$

De là il est facile de conclure que les équations des projections de cette ligne d'intersection sur les plans (xy) (y,z) seront:

$$(ND-LE)x_1 + (MD-LG)y_1 = L.H,$$
$$(ME-NG)y_1 + (LE-DN)z_1 = N.H.$$

Mais sur ces deux plans la ligne d'action de la résultante se projette suivant les deux droites aux équations:

$$Z.x_1 - X.y_1 = L; \qquad Z.y_1 - Y.z_1 = N.$$

Si donc cette ligne d'action et cette droite d'intersection (P, P') coïncident constamment ensemble, quelle que soit la position du point (0) par rapport à (0), il faut qu'on ait identiquement:

$$\frac{X}{Y} = -\frac{MD-LG}{ND-LE}; \qquad \frac{L}{Y} = \frac{L(Na'+Mb'+Lc')}{ND-LE}; \qquad \frac{Y}{Z} = -\frac{LE-DN}{ME-NG};$$
$$\frac{N}{Z} = \frac{N.(Na'+Mb'+Lc')}{ME-NG}.$$

Or on reconnaîtra d'abord aisément que l'identité a lieu pour la première et la troisième de ces équations. Quant à la deuxième et quatrième de ces équations, on peut mettre la deuxième sous la forme

$$ND-LE-(Na'+Mb'+Lc')Y=0; \text{ ou } N(D-a'Y)-MYb'-L(E+c'Y)=0,$$

ce qui la réduit en vertu de

$$N(D-a'Y) = -N.Xb', \quad \text{et de} \quad -L(E+e'Y) = -LZ.b'$$

à la forme $b'(NX+MY+LZ) = 0$, laquelle n'est que l'équation (E) quelle que soit la valeur de b'. La vérification se ferait de même sur la quatrième équation. Il est donc aussi démontré que la résultante d'un système de forces est unique et absolue de position dans l'espace, et que tous les plans principaux de ce système, relatifs à des points fixes quelconques du corps et de l'espace, se coupent suivant une même droite, ligne d'action de cette résultante; c'est-pourquoi on pourrait nommer aussi cette ligne *axe de rotation* du plan principal.

§. 5. *Transformation générale de moments pour un système de forces déplacées d'après une loi définie ou d'une manière quelconque.*

Concevons au point fixe (0) un second système d'axes coordonnés $(0x_1, 0y_1, 0z_1)$ encore rectangles. Si l'on fait tourner chaque force autour de

son point d'application fixe jusqu'à ce que sa ligne d'action fasse avec les nouveaux axes les angles mêmes que fait sa direction primitive avec les axes anciens, on obtiendra un système varié de forces dont les intensités sont supposées les mêmes que celles du système originaire, et dont les inclinaisons mutuelles des lignes d'action sont aussi les mêmes d'après la construction indiquée. Cette invariabilité d'inclinaisons resulte de la manière d'obtenir l'angle de deux droites dans l'espace. Réciproquement, si l'on fait tourner les forces d'un système donné d'une manière quelconque, autour de leurs points d'application, avec la seule attention de conserver leurs inclinaisons mutuelles, on pourra toujours trouver au point fixe donné (**0**) un nouveau système d'axes rectangles ($0x_1$, $0y_1$, $0z_1$) par rapport auxquels l'ensemble des forces déplacées soit disposé de la même manière que celui des forces primitives l'est par rapport aux axes anciens. Soient en effet les angles

$(P\hat{,}x) = \alpha$, $(P\hat{,}y) = \beta$, $(P\hat{,}z) = \gamma$: $(P'\hat{,}x) = \alpha'$, $(P'\hat{,}y) = \beta'$, $(P'\hat{,}z) = \gamma'$, etc.,

dans l'état primitif. Prenons en (**0**) un axe ($0x_1$) qui fasse avec la direction variée P_1 de P un angle α; et dans le plan normal à ($0x_1$) imaginons deux axes rectangles d'abord arbitraires et qu'ensuite on fera tourner dans ce plan jusqu'à-ce qu'ils fassent avec la direction variée P_1 de P les angles β et γ respectivement; ce qui est toujours possible et ne forme qu'une condition, parceque γ résulte de la connaissance de α et de β.

Cela posé, nommons P'_1 la direction variée de P'; et de même par P'', P''', ..., et posons:

$$(P'_1\hat{,}x_1) = \alpha_{,}, \quad (P'_1\hat{,}y_1) = \beta_{,}, \quad (P'_1\hat{,}z_1) = \gamma_{,},$$
$$(P''_1\hat{,}x_1) = \alpha_{,,}, \quad (P''_1\hat{,}y_1) = \beta_{,,}, \quad (P''_1\hat{,}z_1) = \gamma_{,,} \text{ etc.}$$

à cause que dans l'un et dans l'autre système de forces les inclinaisons mutuelles ($P'\hat{}P$, $P''\hat{}P$, $P''\hat{}P'$) etc. sont par hypothèse les mêmes, on aura les équations de condition:

$$\cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = \cos\alpha\cos\alpha_{,} + \cos\beta\cos\beta_{,} + \cos\gamma\cos\gamma_{,},$$
$$\cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma.\cos\gamma'' = \cos\alpha\cos\alpha_{,,} + \cos\beta\cos\beta_{,,} + \cos\gamma\cos\gamma_{,,},$$
$$\cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = \cos\alpha_{,}\cos\alpha_{,,} + \cos\beta_{,}\cos\beta_{,,} + \cos\gamma_{,}\cos\gamma_{,,};$$

et en posant:

$$\cos\alpha_{,} = \cos\alpha' + u_1, \quad \cos\beta_{,} = \cos\beta' + v_1, \quad \cos\gamma_{,} = \cos\gamma' + w_1,$$
$$\cos\alpha_{,,} = \cos\alpha'' + u_2, \quad \cos\beta_{,,} = \cos\beta'' + v_2, \quad \cos\gamma_{,,} = \cos\gamma'' + w_2, \text{ etc.}$$

on déduira des deux premières:

$$u_1\cos\alpha + v_1\cos\beta + w_1\cos\gamma = 0; \quad u_2\cos\alpha + v_2\cos\beta + w_2\cos\gamma = 0,$$

et si celles-ci n'étaient pas satisfaites identiquement, on pourrait en déduire, conjointement avec la condition $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, des valeurs fixes et déterminées de α, β, γ en fonction de $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \ldots$; ce qui est absurde, et l'on a en conséquence:

$$u_1 = 0,\ v_1 = 0,\ w_1 = 0;\ u_2 = 0,\ v_2 = 0,\ w_2 = 0, \text{ etc.}$$

Cela étant reconnu, désignons comme à l'ordinaire par (xyz), $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$ etc. les coordonnées des points d'application des forces, le tout étant rapporté aux axes $0x$, $0y$, $0z$; par $(x_1y_1z_1)$, $(x'_1y'_1z'_1)$, $(x''_1y''_1z''_1)$ etc. ces mêmes points prisdans le même ordre et rapportés aux axes $0x_1$, $0y_1$, $0z_1$; et faisons, toujours d'après les notations reçues:

$$\cos(x_1 0x) = a,\quad \cos(x_1 0y) = a',\quad \cos(x_1 0z) = a'',$$
$$\cos(y_1 0x) = b,\quad \cos(y_1 0y) = b',\quad \cos(y_1 0z) = b'',$$
$$\cos(z_1 0x) = c,\quad \cos(z_1 0y) = c',\quad \cos(z_1 0z) = c'';$$

on passera des axes $(x_1y_1z_1)$ à ceux (xyz) par les formules

$$x_1 = ax + a'y + a''z,\quad y_1 = bx + b'y + b''z,\quad z_1 = cx + c'y + c''z.$$

Il faut bien remarquer que les moments des forces du système varié autour des axes $(0x_1 0y_1 0z_1)$ ne sont plus N, M, L puisque dans ces quantités les coordonnées des points d'application sont devenues (x_1, y_1, z_1) de (x, y, z) qu'elles étaient, et cela précisement parceque par hypothèse ces points n'ont pas été entraînés et sont restés fixes dans le déplacement. En nommant N_1, M_1, L_1 les moments du système varié autour des axes $(0x_1, 0y_1, 0z)$, on a manifestement:

$$L_1 = \Sigma.P.(\cos\beta.x_1 - \cos\alpha.y_1),\qquad N_1 = \Sigma P(\cos\gamma.y_1 - \cos\beta.z_1),$$
$$M_1 = \Sigma P(\cos\alpha.z_1 - \cos\gamma.x_1).$$

Si donc L', N', M' expriment encore les moments des forces variées autour des axes $(0z, 0x, 0y)$, on obtient d'après les notations admises:

$$N' = a.N_1 + b.M_1 + c.L_1,\qquad M' = a'N_1 + b'M_1 + c'L_1,$$
$$L' = a''N_1 + b''M_1 + c''L_1.$$

En effet, connaissant les moments N_1, M_1, L_1 autour de trois axes rectangles, on trouve le moment autour de tout autre axe différent, en multipliant les trois premiers par les cosinus des angles du nouvel axe avec les trois axes anciens; cette règle étant appliquée à l'axe $0x$, donnera la quantité N', et appliquée ensuite à $0y$, $0z$, elle fera connaître M', L'. Avant que de pousser plus loin, faisons remarquer que les forces variées étant censées avoir conservé leurs intensités primitives; la résultante de transport est restée aussi la même en grandeur et en direction, puisque par définition les inclinaisons mutuelles

doivent être conservées; on aura donc d'après un théorème démontré pour la première fois par Mr. *Binet*, et auquel nous sommes également parvenu dans notre cours de statique, en prenant pour point de départ la méthode des projections orthogonales ou par cosinus d'angles:

$$R^2 = \Sigma.P^2 + 2.\Sigma P.P' \cos(P\hat{,}P').$$

§. 6. Reprenons présentement par les moments, en commençant par rechercher les valeurs de L_1 et de L'; de N_1, N'; de M_1 et M' en fonction des indéterminées $a, b, c, \ldots$ et des données immédiates de la question. Si l'on substitue à x_1, y_1 leurs valeurs en (xyz) dans l'expression de L_1, on obtiendra pour cette inconnue:

$$L_1 = \Sigma P(a\cos\beta.x + a'\cos\beta.y + a''\cos\beta.z) - \Sigma P(b.\cos\alpha.x + b'\cos\alpha.y + b''\cos\alpha.z),$$

et il s'ensuit de là par un simple échange de lettres:

$$N_1 = \Sigma P(b\cos\gamma.x + b'\cos\gamma.y + b''\cos\gamma.z) - \Sigma P(c\cos\beta.x + c'\cos\beta.y + c''\cos\beta z),$$

$$M_1 = \Sigma.P(c\cos\alpha.x + c'\cos\alpha.y + c''\cos\alpha.z) - \Sigma P(a\cos\gamma.x + a'\cos\gamma.y + a''\cos\gamma.z).$$

Substituant ces valeurs dans celles de L', M', N', et réunissant en un seul terme tout ce qui multiplie x, en un seul ce qui est facteur de y, et en un seul ce qui multiplie z, on trouvera 0 pour facteur des termes en z et il restera le résultat:

$$L' = \Sigma P.\cos\beta((ac''-a''c).x + (a'c''-a''c').y) + \Sigma P\cos\alpha((b''c-bc'').x + (b''c'-b'c'').y) + \Sigma P\cos\gamma((a''b-ab'').x + (a''b'-a'b'').y).$$

Mais on a d'après ce qui est connu et ce qui résulte même de la transformation des moments et de la valeur de x'_1 obtenu à la fin du §. 4., les équations de conditions suivantes:

$$\begin{array}{lll} ac''-a''b=b', & a''b-ab''=c', & b''c-bc''=a', \\ a'c''-a''c'=-b, & a''b'-a'b''=-c, & b''c'-b'c''=-a; \end{array}$$

ce qui donnera pour L' la valeur d'une forme beaucoup plus simple:

$$L' = \Sigma P\cos\beta(b'x-by) + \Sigma P\cos\gamma(c'x-cy) + \Sigma P\cos\alpha.(a'x-ay)$$

et par un simple échange progressif de lettres on déduit de là:

$$N' = \Sigma P\cos\gamma(c''y-c'z) + \Sigma P\cos\alpha(a''y-a'z) + \Sigma.P\cos\beta(b''y-b'z),$$

$$M' = \Sigma P\cos\alpha(az-a''x) + \Sigma P\cos\beta(bz-b''x) + \Sigma P\cos\gamma(cz-c''x).$$

Si l'on dénote encore par X', Y', Z' la somme des projections rectangles des forces du système varié sur les axes $(0x, 0y, 0z)$, on aura en outre:

$X'_1 = aX + bY + cZ$, $Y = a'X + b'Y + c'Z$, $Z' = a''X + b''Y' + c''Z$.

En effet, il résulte de la définition même du système varié que les projections orthogonales de ses forces sur les axes $0x_1$, $0y_1$, $0z_1$ sont encore X, Y, Z, ou les mêmes que celles des forces primitives sur les axes anciens: on doit donc obtenir X', en projetant les forces (X, Y, Z), parallèles aux axes $(0x_1, 0y_1, 0z_1)$, sur l'axe $0x$, et faisant la somme des projections obtenues; on aurait de même et par la même règle Y', Z'. Mais rien ne demontre plus que si les forces primitives ont une résultante, et que parconséquent elles satisfassent à la condition (E), il en soit de même des forces variées, attendu que par rapport aux nouveaux axes, les coordonnées de leurs points d'action sont altérées, et que d'autres part leurs directions le sont par rapport aux axes anciens; mais il est facile de prouver à l'aide des résultats obtenus que si les forces variées ont une résultante, et que l'on eut en conséquence $L_1 Z + N_1 X + M_1 Y = 0$, il en est de même de cette autre condition $L'Z' + N'X' + M'Y' = 0$; de sorte que pour exprimer que le système varié admet une résultante, il suffira de poser et de développer l'équation de condition:

$$L_1 Z + N_1 X + M_1 Y = 0,$$

laquelle devient par substitution:

$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma P \cos\beta((ax+a'y+a''z).Z - (cx+c'y+c''z).X) \\ + \Sigma P \cos\gamma((bx+b'y+b''z).X - (ax+a'y+a''z).Y) \\ + \Sigma P \cos\alpha((cx+c'y+c''z).Y - (bx+b'y+b''z).Z) \end{array} \right\} = 0.$$

Or l'équation (E) étant satisfaite, on voit que la dernière (E') ne l'est pas nécessairement, ni pour des valeurs quelconques des trois inconnues distinctes auxquelles se réduisent toujours les 9 coëfficients a, b, etc.; mais qu'elle pourra néanmoins l'être d'une infinité de manières, puisqu'il sera permis des donner même deux de ces inconnues à volonté, pourvu qu'on détermine la troisième par (E').

Soient A', B', C' les angles de la résultante $(R'=R)$ du système varié avec les axes $0x$, $0y$, $0z$; ω', φ', ψ' ceux de son axe principal avec ces mêmes lignes; p_1, q_1, r_1 les coordonnées courantes de la ligne de (R): on aura d'après ce qui est déjà connu:

$$\cos A' = \frac{aX+bY+cZ}{R}, \quad \cos B' = \frac{a'X+b'Y+c'Z}{R}, \quad \cos C' = \frac{a''X+b''Y+c''Z}{R};$$

$$\cos\omega' = \frac{N'}{\sqrt{(L'^2+N'^2+M'^2}}, \quad \cos\varphi' = \frac{M'}{\sqrt{(....)}}, \quad \cos\psi' = \frac{L'}{\sqrt{(....)}};$$

$$(R) \qquad Yp_1 - Xq_1 = L, \quad Zq_1 - Y.r_1 = N, \quad Xr_1 - Zp_1 = M,$$

et en dénotant par p'_1, q'_1, r'_1 les coordonnées de (R'), on a en outre:

(R') $\quad Y'p'_1 - X'q'_1 = L', \quad Z'q'_1 - Y'r'_1 = N', \quad X'r'_1 - Z'p'_1 = M'.$

Mais toutes les fois qu'on raisonnera dans l'hypothèse que les résultantes existent dans les deux systèmes de forces, les équations (E, E') sont censées satisfaites toutes deux; et l'on pourra se borner à prendre seulement en considération les deux premières équations (R, R'): de plus pour éviter un trop grand embarras dans les notations, on peut également désigner par p_1, q_1, r_1 les cordonnées courantes de (R'); ainsi on remplacera les équations (R, R') par ces deux autres combinaisons d'égalités:

(R) $\quad Yp_1 - Xq_1 = L, \quad Zq_1 - Yr_1 = N,$

(R') $\quad Y'p_1 - X'q_1 = L', \quad Z'q_1 - Y'r_1 = N'.$

§. 7. Recherchons les conditions requises pour que les résultantes (R, R') se coupent. Les équations du plan principal (P) relatif au système fondamental, et de celui (P') du système varié de forces sont:

(P) $\quad p_1 \cos\omega + q_1 \cos\varphi + r_1 \cos\psi = 0,$

(P') $\quad p_1 \cos\omega' + q_1 \cos\varphi' + r_1 \cos\psi' = 0.$

Le tout est rapporté aux axes $(0x, 0y, 0z)$. Les deux équations (P, P') expriment dans leur existence simultanée la ligne d'intersection des plans (P), (P'): or, pour que la rencontre dont il s'agit, ait lieu, elle doit se faire sur la ligne d'intersection (P, P') puisqu'elle doit appartenir à la fois à chaque plan principal; mais en tirant d'abord des équations de la première force (R) les coordonnées q_1, r_1 en p_1, et les substituant dans celles (P, P'), on trouvera

$$p_1(X\cos\omega + Y\cos\varphi + Z\cos\psi) + M\cos\psi - L\cos\varphi = 0,$$
$$p_1(X\cos\omega' + Y\cos\varphi' + Z\cos\psi') + M\cos\psi' - L\cos\varphi' = 0.$$

On a identiquement $M\cos\psi - L\cos\varphi = 0$, et la première des égalités obtenues est parconséquent une identité manifeste en vertu de (E); mais il n'en est pas de même de la seconde qui fournit pour p_1, et partant pour q_1, r_1, les valeurs suivantes:

$$(T)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{L\cos\varphi' - M\cos\psi'}{X\cos\omega' + Y\cos\varphi' + Z\cos\psi'} = \dfrac{LM' - M.L'}{N'X + M'Y + L'Z}, \\ q_1 = \dfrac{N\cos\psi' - L\cos\omega'}{X\cos\omega' + Y\cos\varphi' + Z\cos\psi'} = \dfrac{N.L' - L.N'}{N'X + M'Y + L'Z}, \\ r_1 = \dfrac{M\cos\omega' - N\cos\varphi'}{X\cos\omega' + Y\cos\varphi' + Z\cos\psi'} = \dfrac{MN' - N.M'}{N'X + M'Y + L'Z}. \end{cases}$$

En combinant ensuite les équations de (R') avec la ligne d'intersection (P, P') des plans principaux, on trouvera pour les coordonnées du point de rencontre de (R') avec (P, P') les valeurs analogues

$$\text{(V)}\qquad p_1 = \frac{L'\cos\varphi - M'\cos\psi}{X'\cos\omega + Y'\cos\varphi + Z'\cos\psi}, \qquad q_1 = \frac{N'\cos\psi - L'\cos\omega}{X'\cos\omega + Y'\cos\varphi + Z'\cos\psi},$$

$$r_1 = \frac{M'\cos\omega - N'\cos\varphi}{X'\cos\omega + Y'\cos\varphi + Z'\cos\psi}.$$

Donc, pour que les résultantes se coupent, il est nécessaire et suffisant que ces doubles valeurs de p_1, q_1, r_1 soient les mêmes dans les équations (T et V). Mais déjà les numérateurs de chaque double valeur sont égaux et de signes contraires; il suffira donc que les dénominateurs dans (T et V) soient aussi égaux et de signes contraires, et que l'on ait parconséquent la nouvelle condition:

$$\text{(F)}\qquad N'X + M'Y + L'Z + NX' + MY' + LV' = 0;$$

laquelle se symétrise d'un manière remarquable par rapport aux forces composantes et aux moments. Elle subsiste entre les données primitives et les trois inconnues distinctes des **9** coëfficients (a, b, c, a', etc.). Mais comme l'équation (E) n'a lieu qu'entre les données immédiates de la question, on n'a jusqu'ici que deux équations de condition (E', F) entre ces mêmes données et trois inconnues différentes. Donc, quel que soit le système fondamental de forces (s), à résultante effective, on pourra trouver de diverses manières un système de forces varié (S', S'', S''', ...) à résultante effective qui coupe celle du système (S); mais les résultantes R', R'', R''', ... des systèmes respectifs S', S'', S''', ... auront chacune un point de rencontre spécial avec celle R de S; et rien ne démontre jusqu'ici que ces divers point puissent coïncider en un seul et même point de la ligne de R. Toutes les fois que cette coïncidence, censée possible, a lieu, on a ce que l'on peut nommer par analogie avec ce qui existe pour les forces parallèles, *centre de forces*, et ce que l'on nommerait plus exactement un *centre de résultantes*. Les coordonnées de ce point se calculeront par les équations (T ou V); mais il faut qu'elles soient indépendantes des **9** coëfficients (a, b, c, etc.) qui devront disparaître dans de certains cas particuliers; au moins soit par voie d'addition et de soustraction, soit par voie de division ou de suppression de facteurs communs, soit par voie de multiplication par un facteur qui s'anéautit. Dans le cas contraire les points d'intersection (R, R'), (R, R''), $(R, R''', \ldots)$, et même ces autres (R', R''), (R'', R'''), (R', R''') et qu'on pourraît calculer aussi, ne seront pas des centres proprements dits; il faut que le centre soit ici, comme dans les courbes, un point d'intersection d'une multiplicité infinie; ou bien qu'il soit au moins une intersection d'un nombre considérable et en quelque sorte arbitraire de lignes

d'actions de résultantes; de sorte qu'il peut avoir, et qu'il a en effet, comme on le verra, un caractère plus étendu que le centre géométrique ordinaire.

§. 8. La méthode précédente de calculer les coordonnées de l'intersection des deux résultantes (R', R) par le moyen des plans principaux, n'est plus applicable lorsque le plan principal varié (P') reste superposé sur le premier (P); c'est ce qui arrive par exemple, et notamment pour un système de forces toutes situées dans un même plan, dans celui $(y0x)$ par exemple, et que l'on ferait tourner sur leurs points d'application fixes, sans sortir de ce plan. En effet, dès lors l'axe $(0z)$ normal au plan donné ne cessera pas d'être l'axe principal, tant des systèmes variés que de celui qui est donné; mais pour ce cas special on aura:

$$b'=a,\quad a'=-b,\quad Z=0,\quad Z'=0,\quad X'=aX+bY,\quad Y'=aY-bX,$$
$$L_1=\Sigma P\cos\beta(ax-by)-\Sigma P\cos\alpha(bx+ay),$$
$$L'=a\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)-b\Sigma P(x\cos\alpha+y\cos\beta),$$

de sorte que si l'on fait pour abréger $\Sigma P(x\cos\alpha+y\cos\beta)=H$, on aura:

$$L'=a.L-b.H.$$

En combinant directement entr'elles les deux équations des deux résultantes qui n'exigent plus pour leur rencontre d'équation de condition particulière, on obtient pour le point de rencontre:

$$p_1=\frac{LX'-L'X}{Y.X'-X.Y'};\qquad q_1=\frac{LY'-L'Y}{Y.X'-X.Y'}.$$

En y substituant les valeurs des quantités accentuées données plus haut, on verra disparaître d'elles-mêmes de p, q, les quantités a, b: la première par voie d'addition et de soustraction, et la seconde comme facteur commun supprimé, et il viendra:

$$p_1=\frac{X.H+L.Y}{R^2};\qquad q_1=\frac{Y.H-L.X}{R^2}.$$

Ainsi, étant donné un système quelconque de forces appliquées toutes dans un même plan, soit à une figure plane, soit à un corps rigide, si on les fait tourner autour de leurs points d'application, sans altérer ni les intensités ni les inclinaisons mutuelles, la résultante tournera invariablement autour d'un même point du plan; *autrement dit*: tout système de forces, situées dans un même plan, admet un *centre de résultantes* qu'on peut calculer par les deux dernières formules obtenues; mais cela suppose que le système ne soit pas deplacé en dehors de son plan autour des points d'application. Il n'est pas difficile non plus de trouver ce centre (p_1, q_1) par une construction géométrique,

les centres des systèmes de forces parallèles ($P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''$, ...) ($P\cos\beta$, $P'\cos\beta'$, $P''\cos\beta''$, ...) étant déjà censés calculés ou construits. En effet, en nommant $(x_1 y_1)$ les coordonnées du centre du groupe $\Sigma P\cos\alpha$, et $(x_2 y_2)$ celles du centre du groupe $\Sigma P\cos\beta$, on aura les formules suivantes qui résultent mêmes des valeurs de p, q, comme cas particuliers:

$$\Sigma P\cos\alpha.x = X.x_1, \qquad \Sigma P\cos\alpha.y = X.y_1,$$
$$\Sigma P\cos\beta.x = Y.x_2, \qquad \Sigma P\cos\beta.y = Y.y_2;$$

d'ou

$$H = X.x_1 + Y.y_2, \qquad L = Y.x_2 - X.y_1,$$
$$p_1 = \frac{X^2.x_1 + Y^2.x_2 + X.Y.(y_2 - y_1)}{R^2}, \qquad q_1 = \frac{X^2 y_1 + Y^2.y_2 + X.Y.(x_1 - x_2)}{R^2}.$$

Concevons maintenant que l'origine soit au centre même du premier groupe parallèle $\Sigma P\cos\alpha$, et que l'axe des abscisses soit la ligne droite qui joint ce point (0) au centre (0') du second groupe $\Sigma P\cos\beta$; on aura $x_1=0$, $y_1=0$, $y_2=0$, $x_2=(001)$; $p_1 = x_2.\cos^2 B$, et $q_1 = -x_2.\cos B.\cos A$; A et B désignent les angles de la résultante R avec les axes $(0x, 0y)$. Supposons que cette ligne tombe dans l'angle des (x, y) positifs, en (0) élevez y une perpendiculaire $0H$ qui tombera dans l'angle des $(+x, -y)$; du point 0' abaissez une perpendiculaire $(0'H)$ sur la ligne $(0H)$ ainsi choisie; projetez ensuite $0H$ sur $(00')$ et sur $(-y)$: la première projection sera la valeur de p_1; la seconde sera celle de q_1; donc le pied H obtenu par cette construction est le centre de forces ou le centre général de résultantes cherché. — On voit aussi, ce qui du reste est évident à l'avance, que le pied H ou $(p_1 q_1)$ coïncide avec le centre (0), toutes les fois que $(00')=0$.

§. 9. Considérons un second cas particulier, celui d'un système de forces toutes parallèles à un même plan, à celui $(y0x)$ par exemple: sans violer les conditions prescrites dans la définition, faisons tourner les forces en leurs points d'application autour d'axe parallèles et normaux au plan directeur. Dans ce cas les axes variés par rapport auxquels le système deplacé se trouve disposé à la façon du système primitif, rapporté aux axes anciens, seront définis par les équations suivantes:

$$c''=1, \quad c'=0, \quad c=0, \quad a''=0, \quad b''=0, \quad b'=a, \quad a'=-b.$$

Les valeurs générales des quantités accentuées X', ... N', ... seront:

$$X' = aX + bY_1 - Y' = aY - bX; \qquad Z=0, \quad Z'=0;$$
$$\gamma = \gamma' = \gamma'' = . = 90^0;$$
$$\cos\gamma = \cos\gamma' = \cos\gamma'' = ... \text{ etc.} = ... = 0; \qquad C=0, \quad C'=0;$$

$N' = b.\Sigma P \cos \alpha.z - a\Sigma P \cos \beta z = bM - aN$, $M' = aM - bN$, $L' = aL - b.H$; car alors $M = \Sigma P \cos \alpha.z$, $N = -\Sigma P \cos \beta.z$, et (E') deviendra de son côté ou plutôt $N'X' + M'Y' + L'Z' = 0$ le deviendra du sien:

$$L'Z' + N'X' + M'Y' = MY - NX = 0.$$

Cette équation devant subsister avec l'équation (E) qui se reduit à $NX+MY=0$, donne en combinaison avec celle-ci:

$$(e) \qquad MY = 0, \quad NX = 0.$$

Mais l'équation de condition (F) se réduit maintenant au terme unique $2a.M.Y = 0$, laquelle condition est déjà comprise d'elle même dans les deux égalités (e); de sorte que l'intersection de R' avec R ne requiert pas d'équation de condition speciale. On obtient ensuite:

$$\mu'^2 = M^2 + N^2 - 4abM.N + (aL - bH)^2,$$

$$\cos \omega' = \frac{bM - aN}{\mu'}, \qquad \cos \varphi' = \frac{aM - b.N}{\mu'}, \qquad \cos \psi' = \frac{aL - b.H}{\mu'},$$

et les valeurs des coordonnées de l'intersection (R', R) seront

$$p_1 = \frac{X.H + L.Y}{R^2}, \qquad q_1 = \frac{Y.H - LX}{R^2}, \qquad r_1 = \frac{M}{X} = -\frac{N}{Y}.$$

Celles-ci étant encore une fois indépendantes des coëfficients a, b, qui pourront caractériser tel système varié qu'on voudra, pourvu que les conditions de déplacement indiquées plus haut soient observées; il s'ensuit que le centre de forces existe ici comme dans le premier exemple. Mais comme les conditions (e) subsistent entre les données fondamentales, il reste à examiner si le système de forces proposées est quelconque, ou s'il doit se spécialiser d'une certaine façon pour pouvoir admettre un *centre de résultantes*. Or on peut toujours ici disposer les axes coordonnés $(0y, 0x)$ autour de l'axe $(0z)$, normal au plan directeur, de manière à satisfaire aux conditions $M = \Sigma P \cos \alpha.z = 0$, $N = -\Sigma P \cos \beta z = 0$, ou bien à ces deux autres: $Y = 0$, et $N = 0$ qui satisfont aussi complètement aux conditions (e). En effet, en élevant ou en abaissant convenablement le plan $(y0x)$ sur la ligne $(0z)$, on doit pouvoir trouver une position spéciale de ce plan pour laquelle on ait $\Sigma.P \cos \beta.z = 0$, ou $N = 0$. En même temps on pourra trouver dans ce plan un axe $0y$ qui soit normal à la résultante, ce qui donne aussi $Y = 0$: donc en effet, quel que soit le système fondamental de forces, on peut toujours satisfaire aux équations (e) par une disposition convenable des axes $0x$, $0y$; et il suit de là que des forces quelconques, parallèles seulement à un même plan, admettent toujours

une résultante effective, et un centre de résultantes; *autrement dit*: si l'on fait tourner un tel système de forces en leurs points d'application fixes autour d'axes parallèles de direction et perpendiculaires au plan directeur du système, leur résultante tournera invariablement autour d'un point fixe de l'espace; la projection de ce pôle sur le plan directeur coïncide avec le centre même du système qu'on obtient, en projetant les forces proposées sur ce même plan. Ce résultat est manifeste par la comparaison des valeurs actuelles de p_1, q_1 avec celles du premier exemple déjà traité; ainsi pour obtenir la position du centre, on commencera par construire sa position projetée sur $(y0x)$ et l'on calculera sa distance à ce plan par la formule $r_1 = M:X$.

§. **10.** Si l'on veut déduire de ce qui précède, la propriété déjà connue du centre d'un système de forces parallèles que l'on ferait tourner d'une manière quelconque autour de leurs points d'application, et non seulement autour d'axes perpendiculaires au plan directeur, on pourra procéder de la manière suivante.

En posant dans les valeurs que prennent dans ce cas les forces et les moments $L'M'N'$, les combinaisons:

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = m, \qquad a'\cos\alpha + b'\cos\beta + c'\cos\gamma = m',$$
$$a''\cos\alpha + b''\cos\beta + c''\cos\gamma = m'',$$

on obtiendra par l'emploi de ces abréviations:

$$L' = m'\Sigma Px - m\Sigma Py, \quad N' = m''\Sigma Py - m'\Sigma Pz, \quad M' = m\Sigma Pz - m''\Sigma Px;$$
$$X' = m.\Sigma P, \quad Y' = m'.\Sigma P, \quad Z' = m''.\Sigma P,$$

et l'on reconnait par là avec facilité que la condition d'une résultante unique du système varié, savoir $L'Z' + N'X' + M'Y' = 0$ est satisfaite identiquement. Ensuite l'équation (F) devient en y portant les valeurs de L', N', M':

$$\left.\begin{array}{c}(m''\Sigma Py - m'\Sigma Pz)X + (m\Sigma Pz - m''\Sigma Px)Y + (m'\Sigma Px - m\Sigma Py)Z \\ + m.N.\Sigma P + m'M\Sigma P + m''L.\Sigma P\end{array}\right\} = 0.$$

En observant que $X = \cos\alpha.\Sigma P$, $Y = \cos\beta\Sigma P$, $Z = \cos\gamma.\Sigma P$, et réunissant les termes qui multiplient m'', m', m respectivement, on parvient à cette autre forme:

$$m''(\cos\alpha\Sigma Py - \cos\beta\Sigma P.x + L) + m'(\cos\gamma\Sigma Px - \cos\alpha\Sigma P.z + M)$$
$$+ m(\cos\beta\Sigma Pz - \cos\gamma.\Sigma Py + N) = 0.$$

Mais en vertu des valeurs de L, N, M, les multiplicateurs de m'', m', m sont chacun nuls; donc l'équation (F) du cas actuel devient aussi identique. Reste encore à examiner ce que deviennent les équations (p_1, q_1, r_1). On obtient

$$p_1 = \frac{L(m\Sigma Pz - m''.\Sigma Px) - M(m'\Sigma Px - m.\Sigma Py)}{-(mN + m'M + m''L).\Sigma P}.$$

Mais le numérateur de cette expression de p_1 peut-être mis sous la forme

$$mL.\Sigma Pz + m\Sigma Py - (m''L + m'M)\Sigma.Px$$

et comme en vertu des valeurs de L, M on obtient

$$L.\Sigma Pz + M\Sigma Py = \Sigma P.x(\cos\beta\Sigma Pz - \cos\gamma.\Sigma Py) = -N.\Sigma.Px,$$

on trouvera pour le numérateur total la valeur

$$-m.N.\Sigma Px - (m'M + m''L)\Sigma Px = -(mN + m'M + m''L)\Sigma Px,$$

partant:

$$p_1 = (\Sigma Px) : \Sigma P \quad \text{et de même} \quad q_1 = (\Sigma Py) : \Sigma P; \quad r_1 = (\Sigma Pz) : \Sigma P.$$

§. 11. Considérons maintenant un système quelconque de forces, d'où l'on déduit les systèmes variés, en faisant tourner les forces données autour d'axes en leurs points d'application qui soient parallèles de direction. Il s'agit de reconnaitre les conditions auxquelles il faut soumettre le système fondamental et les systèmes variés pour que toutes les résultantes effectives se rencontrent encore en un même point de l'espace. Comme la direction de l'axe $(0z)$ du point fixe (0) est arbitraire, on peut le prendre parallèle à la commune direction des axes de rotation, et le nommer pour abréger *l'axe de rotation*; cette disposition des axes coordonnés fournit les égalités suivantes:

$$a'' = 0, \quad b'' = 0, \quad c'' = 1, \quad c' = 0, \quad c = 0, \quad b' = a, \quad a' = -b, \quad Z' = Z;$$

$$X' = aX + bY, \quad Y' = aY - bX, \quad L' = aL - bH;$$

$$N' = \Sigma P\cos\gamma.y + \Sigma Pz(b\cos\alpha - a\cos\beta);$$

$$M' = \Sigma Pz(a\cos\alpha + b\cos\beta) - \Sigma P.x\cos\gamma.$$

Les équations (E', F) des (§. 7. et 6.) deviendront:

$$\text{(E')} \quad \left.\begin{matrix} a[Z.L + X\Sigma P\cos\gamma.y - Y.\Sigma P.\cos\gamma.x] \\ + b[X.\Sigma P\cos\gamma.x + Y.\Sigma P\cos\gamma.y - Z.H] \end{matrix}\right\} \begin{matrix} -X.\Sigma P\cos\beta.z \\ +Y.\Sigma P\cos\alpha.z = 0, \end{matrix}$$

$$\text{(F)} \quad a(Y.\Sigma P\cos\alpha.z - X.\Sigma P\cos\beta.z) + LZ + X\Sigma P\cos\gamma.y - Y.\Sigma P\cos\gamma.x$$
$$+ b[X.(\Sigma P\cos\alpha z - M) + Y.(\Sigma P\cos\beta.z + N) - Z:H] = 0.$$

Or en remarquant que ces équations sont de la forme

$$a\lambda + b\mu + \nu = 0 \text{ pour la première,}$$

$$a\nu + b\mu' + \lambda = 0 \text{ pour la deuxième,}$$

il est aisé de reconnaître qu'elles sont satisfaites indépendamment d'aucune valeur particulière de a et de b si l'on a d'abord: $\mu - \mu' = 0$, $\lambda - \nu = 0$; c'est-à-dire si la différence des multiplicateurs de b dans l'une et dans l'autre est nulle, et qu'il en soit de même du coefficient de a de la première, diminué du terme constant dans celle-ci; ensuite pour que l'équation elle même

$a\lambda+b\mu+\nu=0$ ne détermine pas a, b en combinaison avec celle $a^2+b^2=1$, il faut, avoir $\lambda=0$, $\mu=0$, $\nu=0$; ainsi en résultat on déduit de là quatre équations de condition, savoir:

$$\lambda = LZ + X\Sigma P\cos\gamma.y - Y.\Sigma P\cos\gamma.x = 0,$$
$$\mu = X\Sigma P\cos\gamma.x + Y\Sigma P\cos\gamma.y - Z.H = 0,$$
$$\nu = -X.\Sigma P\cos\beta.z + Y.\Sigma P\cos\alpha.z = 0,$$
$$\mu' = X.(\Sigma P\cos\alpha.z - M) + Y.(\Sigma P\cos\beta z + N) - Z.H = 0.$$

Mais en nommant $(x_1, y_1, z_1)\,(x_2, y_2, z_2)\,(x_3, y_3, z_3)$ les centres des trois systèmes de forces parallèles $\Sigma P\cos\alpha$, $\Sigma P\cos\beta$, $\Sigma P\cos\gamma$, on aura par désignation:

$$\Sigma P\cos\alpha.x = X.x_1,\quad \Sigma P\cos\alpha.y = X.y_1,\quad \Sigma P\cos\alpha.z = X.z_1,$$
$$\Sigma P\cos\beta.x = Y.x_2,\quad \Sigma P\cos\beta.y = Y.y_2,\quad \Sigma P\cos\beta.z = Y.z_2,$$
$$\Sigma P\cos\gamma.x = Z.x_3,\quad \Sigma P\cos\gamma.y = Zy_3,\quad \Sigma P\cos\gamma.z = Z.z_3,$$
$$L = Yx_2 - Xy_1,\quad N = Z.y_3 - Y.z_2,\quad M = X.z_1 - Z.x_3,$$

et dès lors on se convaincra aisément que $\nu = X.Y(Z_1-Z_2) = 0$, que la première $\lambda=0$ est identique à la troisième $\nu=0$, et que la seconde et la quatrième sont identiques entr'elles, de sorte qu'il ne reste que deux équations de condition distinctes:

$$\nu = Y.\Sigma P\cos\alpha.z - X.\Sigma P\cos\beta.z = 0,\quad \mu = \Sigma P\cos\gamma.(X.x + Y.y) - ZH = 0,$$

ou

$$\mu = (\Sigma P\cos\gamma.x).X + (\Sigma P\cos\gamma.y).Y - Z.\Sigma P\cos\alpha x - Z.\Sigma P\cos\beta y = 0.$$

On trouvera pour les coordonnées (p_1, q_1, r_1) les valeurs:

$$p_1 = \frac{(a-1)LZ.x_3 + b(LYz_2 + MH)}{(a-1)LZ + b(MX - NY)},\qquad q_1 = \frac{(a-1)LZ.y_3 - b(LXz_1 + NH)}{(a-1)LZ - b(NY - MX)},$$
$$r_1 = \frac{(1-a)(MYz_2 + NX.z_1) + b(MXz_1 - MYz_2)}{(a-1)LZ + b(MX - NY)}.$$

Pour former le dénominateur commun de ces trois quantités, nous avons cherché non pas la valeur de $N'X + M'Y + L'Z$, mais celle de $-(NX' + MY' + LZ')$ qui lui est égale en vertu de l'équation (F). Remarquons aussi que les conditions ν, $\mu=0$ peuvent être mises sous les formes suivantes qui nous serviront utilement:

$$\nu = YX(z_1 - z_2) = 0,\quad \mu = XZ(x_3 - x_1) + YZ(y_3 - y_2) = 0.$$

Mais il faut se garder de supprimer des facteurs qui en apparence sont communs; car si par exemple l'une des trois quantités X, Y, Z, devenait nulle, ou infiniment petite, il y en aurait plusieurs des coordonnées $(x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2)$ etc. qui pourraient en même temps devenir infinies.

Après cela on pourrait reconnaître à une simple inspection quelques cas particuliers où p_1, q_1, r_1 deviendraient indépendantes des variables a, b; mais nous rejetons cette méthode de procéder comme peu sûre et comme offrant encore trop de tâtonnements; nous allons envisager la question d'un autre point de vue plus général, et nous serons ainsi amené naturellement à l'examen détaillé des circonstances variées que présente le problème.

§. 12. *Lieu géométrique des résultantes dans le cas d'un mouvement de rotation autour d'axes parallèles.*

En prenant toujours l'axe $(0z)$ parallèle aux axes de rotation des forces en leurs points d'application, on a par le §. 11.:

$$L' = aL - b(Xx_1 + Yy_2) = aL - b.H, \quad N' = Zy_3 + bXz_1 - aYz_2,$$
$$M' = -Zx_3 + aXz_1 + bYz_2, \quad X' = aX + bY, \quad Y' = aY - bX, \quad Z' = Z.$$

Les équations de la résultante du système mobile de forces sont:

$$(\varrho) \qquad Y'p_1 - X'q_1 = L', \quad Z'q_1 - Y'r_1 = N'.$$

On se dispense d'écrire la troisième équation qui exprime la projection de la résultante sur le plan $(z0x)$, parceque dans l'hypothèse même d'une résultante, cette équation est et doit être une conséquence identique des deux équations (ϱ). Ainsi par le fait même de cette omission, nous admettons déjà que les équations $\nu = 0$, $\mu = 0$ soient satisfaites.

En substituant aux lettres accentuées leurs valeurs en fonction des données, on déduit des équations (ϱ):

$$(\varrho) \qquad a(Yp_1 - Xq_1 - L) = b(Xp_1 + Yq_1 - Xx_1 - Yy_2) = b(Xp_1 + Yq_1 - H)$$
$$a(z_2 - r_1)Y + b(r_1 - z_1)X = (y_3 - q_1)Z.$$

Si donc on pose pour abréger et pour se retrouver dans la discussion qu'il y aura à faire:

$$Yp_1 - Xq_1 - L = T, \quad Xp_1 + Yq_1 - Xx_1 - Yy_2 \text{ ou } Xp_1 + Yq_1 - H = U,$$
$$(z_2 - r_1)Y = T', \quad (r_1 - z_1)X = V', \quad (y_3 - q_1)Z = w,$$

on aura pour les équations de la résultante, représentées abréviativement:

$$(\varrho) \qquad aT - b.U = 0, \quad aT' + b.U' = W.$$

En tirant de là les valeurs de a et b, et les portant dans l'équation de condition perpetuelle mais simplifiée $a^2 + b^2 = 1$, on obtient pour l'équation de la surface, lieu géométrique des résultantes:

$$(s) \qquad W^2(T^2 + V^2) = (VT' + V'T)^2,$$

et celle ci parait du quatrième degré entre les coordonnées courantes p_1, q_1, r_1 de l'un quelconque de ses points.

Rémarque. L'équation (ϱ) est susceptible d'une réduction considé-

rable: et nous pourrions nous attacher immédiatement à faire cette réduction; mais comme nous tenons à prouver que la solution du problème ne dépend pas exclusiveme du succès de cette entreprise, dans laquelle nous ne prouvions d'abord pas réussir, nous avons préferé de suivre les errements d'une discussion générale qui ne doit pas manquer non plus de conduire aux résultats qu'on cherche; cette manière de procéder sera plus longue, mais les détails qu'elle nécessite ne nous ont pas paru superflus, quoiqu'ils ne soient pas indispensables.

§. **12.** bis. En raisonnant donc dans l'hypothèse que la surface (S) nous soit encore inconnue, et qu'elle se trouve en effet du quatrième degré, nous pouvons exprimer qu'elle est développable, si deux résultantes consécutives et infiniment voisines se coupent. Or pour le point de rencontre les coordonnées courantes sont les mêmes dans l'une et l'autre ligne d'action; et il suffira par conséquent de faire varier les quantités a, b, en laissant (p_1, q_1, r_1) constants; cette opération donnera

$$b = -a.\frac{V}{T}, \quad b = +a.\frac{V'}{T'}, \quad \text{partant } UT' + U'T = 0,$$

$$a = \frac{WT'}{V'^2+T'^2}, \quad b = \frac{W.V'}{V'^2+T^2}, \quad \text{partant } W^2 = T'^2 + V'^2.$$

Ainsi il faut avoir à la fois en vertu de (ϱ),

$$VT' + V'T = 0, \quad \text{et} \quad W = 0, \quad \text{ou}$$
$$T = 0, \quad \text{et} \quad V = 0 \quad \text{à la fois.}$$

Examinons d'abord l'hypothèse des deux dernières équations simultanées. Le lieu enveloppe des résultantes, se réduit donc ou à une droite ou à un point dont la projection sur le plan $(y0x)$ a les coordonnées fixes et déterminées d'après ces équations qui donnent les valeurs:

$$p_1 = \frac{HX+LY}{X^2+Y^2}, \qquad q_1 = \frac{HY-LX}{X^2+Y^2}.$$

Quant à la quantité r_1 il faut la calculer par l'équation $W^2 = T^2 + V^2$, qui équivaut à celle-ci:

$$(y-q_1)^2 Z^2 = (z_2-r_1)^2 Y^2 + (r_1-z_1)^2 X^2,$$

et qui parait exprimer un cylindre du second degré. Mais dans le cas le plus général du problème on doit avoir $X, Y, Z >$ ou < 0 à la fois, et partant $z_2 = z_1$ d'après la condition de $V = 0$, et en introduisant ce résultat dans l'équation obtenue en dernier lieu, on la ramène à celle-ci qui est linéaire:

$$(y_3-q_1) Z = \pm (z_1-r_1) \sqrt{(X^2+Y^2)},$$

et il n'y a plus maintenant que la double valeur de r_1 qui semble résulter de là et qui puisse offrir quelqu'embarras. Or cet embarras disparait immédiatement, si l'on remarque que la valeur de q_1 déjà obtenue plus haut, se réduit à y_3, tant en vertu des équations de condition ν, $\mu = 0$ que par la nature des notations admises; il reste donc simplement et sans aucune ambiguité de signe, $\nu_1 = z_1 = z_2$. On peut prouver aussi par les mêmes conditions ν, $\mu = 0$, que la valeur de p_1 se reduit à x_3; nous omettons ici ces details de calcul, pour les donner plus loin lors de la réduction de l'équation (ϱ).

§. 13. Examinons en second lieu ce que pourront nous fournir les deux premières équations de condition, savoir:

$$W = Z(y_3 - q_1) = 0, \qquad UT' + U'T = 0.$$

La première exige que l'on ait $T'^2 + U'^2 = 0$, partant

$$T' = (z_2 - r_1)\,Y = 0, \qquad U' = (r_1 - z_1)\,X = 0,$$

et celles-ci remplissent en même temps l'autre condition $UT' + U'T = 0$, qu'elles rendent par conséquent superflûe. Les conditions

$$W = 0, \qquad T' = 0, \qquad U' = 0,$$

dont les deux dernières entraînent la première comme conséquence, nous donnent $q_1 = y_3$, $r_1 = z_2 = z_1$, ce qui reproduit la condition même de $\nu = 0$; on remarquera ensuite que le centre cherché, s'il existe, doit toujours se trouver sur la ligne d'action de la résultante primitive, et qu'il faut parconséquent encore toujours admettre l'équation $T = Yp_1 - Xq_1 - L = 0$ qui fournit la valeur de p_1, savoir:

$$p_1 = \left(\frac{Xy_3 + L}{Y}\right),$$

et celle-ci est encore une fois l'équivalent de $p_1 = x_3$. Ainsi donc tout système de forces à *résultante effective* admet un centre de résultantes toutes les fois qu'on dispose les forces primitives autour de trois axes coordonnés rectangles du point fixe (0), de façon que les conditions $\nu = 0$, $\mu = 0$ soient satisfaites; mais cet énoncé peut et doit être posé d'une manière différente qui en fait mieux ressortir le caractère de généralité qui lui est propre: *Toutes les fois qu'on fait tourner les forces d'un même système quelconque à résultante effective, autour d'axes en leurs points d'application, parallèles entr'eux et à un axe* (0z) *choisi au point fixe d'après les équations de condition* ν, $\mu = 0$, *leur résultante se conservera pendant ce mouvement, et elle tournera invariablement autour d'un seul et même point.* C'est ce point qui forme par conséquent ce qu'il faut nommer *centre de forces, centre de résultantes* pour tout axe de rotation convenablement choisi. Si cet

axe est arbitraire de direction entre de certaines limites, le centre existera lui-même d'une infinité de manières différentes entre ces mêmes limites, et pour le même système fondumental de forces.

Je dis ensuite que quand ce point existe, il constitue le centre même ou le sommet d'une surface conique vulgaire sur laquelle se balance la ligne d'action de la résultante mobile et dont l'axe est parallèle aux axes parallèles des surfaces coniques sur lesquelles se meuvent par hypothèse les forces partielles du système proposé. En désignant en effet de nouveau par p_1, q_1, r_1 les coordonnées courantes de la résultante variable qui par hypothèse passe par le point fixe $(x_3\, y_3\, z_1)$, on obtient pour le lieu cherché l'équation:

$$(X^2+Y^2)\,(r_1-z_1)^2 - Z^2(p_1-x_3)^2 - Z^2(q_1-y_3)^2 = 0.$$

C'est évidemment le cône défini ci-dessus: de plus sachant une fois que la résultante se balance autour d'un point fixe $(x_3,\ y_3,\ z_1 = z_2)$, on s'apperçoit immédiatement par l'équation $Z' = Z$ qui donne $\cos C' = \cos C$, qu'elle decrit cette surface conique, concentrique à un axe parallèle à $(0z)$, et ayant pour sommet le pivot de balancement de la résultante. Mais cette équation $Z' = Z$ ne permettrait plus aucune conclusion de ce genre, tant que l'existence de ce pôle ne serait pas mise en évidence.

§. **14.** Je dis maintenant que cet axe de rotation $(0z)$ déterminé d'après les conditions $\nu,\ \mu = 0$, peut et doit exister entre de certaines limites d'une infinité de manières, ou du moins de diverses manières; ce qui assigne au centre de forces d'un système donné une position particulière pour chaque direction particulière de l'axe $(0z)$, ou pour chaque direction des axes autour desquels les forces tournent en leurs points d'application.

En effet, reprenons les équations $\nu = 0$, $\mu = 0$ qu'on pourra mettre sous la forme:

$$(\nu) \qquad Y\Sigma P \cos \alpha.z = X\Sigma P \cos \beta.z,$$

$$(\mu) \qquad \Sigma P \cos \gamma(Xx + Y.y) = Z\Sigma P(x \cos \alpha + y \cos \beta).$$

Si l'on considère les axes $(0x,\ 0y,\ 0z)$ en 0 comme des directions inconnues, on pourra concevoir en ce point un nouveau système d'axes rectangles connus $(0x_1,\ 0y_1,\ 0z_1)$; et en dénotant par des lettres accentuées en bas les données des forces par rapport à ces derniers axes, on a par les transformations connues:

$$x = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1, \quad y = a'_1x_1 + b'_1y_1 + c'_1z_1, \quad z = a''_1x_1 + b''_1y_1 + c''_2z_1,$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= a_1 \cos\alpha_1 + b_1 \cos\beta_1 + c_1 \cos\gamma_1, \\ \cos\beta &= a'_1 \cos\alpha_1 + b'_1 \cos\beta_1 + c'_1 \cos\gamma_1, \\ \cos\gamma &= a''_1 \cos\alpha_1 + b''_1 \cos\beta_1 + c''_1 \cos\gamma_1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X &= a_1X_1 + b_1Y_1 + c_1Z_1, \\ Y &= a'_1X_1 + b'_1Y_1 + c'_1Z_1, \\ Z &= a''_1X_1 + b''_1Y_1 + c''_1Z_1, \end{aligned}$$

$N = a_1 N_1 + b_1 M_1 + C_1 L_1$, $M = a'_1 N_1 + b'_1 M_1 + c'_1 L_1$, $L = a''_1 N_1 + b''_1 M_1 + c''_1 L_1$. Les données sont maintenant X_1, Y_1, Z_1; N_1, M_1, L_1; (α_1, β_1, γ_1) (α_2 etc.), (a_1, b_1, c_1; a'_1, b'_1, etc.) sont les 9 coëfficients qui doivent servir à la détermination de la direction inconnue de l'axe (0z) et sont reductibles, comme on sait, à trois inconnues distinctes. On pourrait croire néanmoins quil n'y ait au fond que deux inconnues véritables, puisque l'on ne cherche qu'une direction (0z) et que généralement les inconnues qui servent à fixer une direction en un point donné, se réduisent à deux inconnues distinctes: mais il faut remarquer ici que l'axe (0z) doit être déterminé d'après des équations de condition $\nu, \mu = 0$ qui le rendent solidaire avec tout un système d'axes rectangulaires (0x, 0y, 0z) lequel pour être déterminé exige trois équations de condition et suppose trois inconnues distinctes. Il y a parconséquent aussi trois inconnues véritables dans la présente recherche. Cela posé, en substituant les valeurs précédentes de (X, Y, Z, L, M, N) de ($\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots$) de ($x$, y, z, x', y', z', etc.), dans les égalités (ν), (μ), on obtient seulement deux équations de condition entre ces trois inconnues φ, ϑ, ψ auxquelles se reduisent les 9 coëefficients cités; donc le problème de la recherche de l'axe de rotation (0z) est susceptible en effet d'une infinité de solutions, toutes compris néanmoins entre les limites assignées par ces deux équations de condition transformées (ν), (μ); et soumises en outre aux limitations analytiques $X >$ ou < 0, $Y >$ ou < 0, $Z >$ ou < 0; et il nous paraît démontré par là que le centre d'un même système quelconque de forces à résultante peut du moins exister de diverses manières.

Il est vrai que dans la transformation précédente nous avons négligé l'équation de condition $L_1 Z_1 + N_1 X_1 + M_1 Y_1 = 0$; mais la transformée $LZ + NX + MY = 0$ en est une conséquence identique et n'établit parconséquent aucune équation de condition nouvelle entre les données primitives et les inconnues; de sorte qu'il n'y a en définitive que deux équations pour trois inconnues. Du reste nous sommes loin de prétendre que la solution de la question comporte une indétermination absolue; car alors il ne devrait y avoir aucune équation de condition; mais il y a loin d'une indétermination relative à une indétermination absolue. Si l'on prenait par exemple l'axe de rotation (0z) parallèle à la direction de la résultante de transport initiale, les limitations $X >$ ou < 0, $Y >$ ou < 0 ne seraient plus respectées; car on aurait $X = 0$, $Y = 0$, et le centre deviendrait déjà illusoire; il ne serait pas difficile d'autres cas où le problème ne donne plus de solution.

§. 14. bis. Il s'agit à présent de reconnaître si l'on ne pourrait calculer divers systèmes variés de forces qui admettent avec le système fondamental un centre unique, point d'intersection d'une multiplicité plus ou moins élevée. Pour simplifier cette recherche le plus que possible, prenons l'axe fixe $(0x)$ suivant l'axe principal des forces données, considérées dans leur position primitive; on aura donc

$$L = 0, \quad M = 0, \quad \text{partant} \quad X = 0;$$

$$p_1 = 0, \quad q_1 = \frac{N.L'}{M'Y+L'Z}, \quad r_1 = -\frac{N.M'}{M'Y+L'Z} \quad \text{(voir équat. T. §. 7.)};$$

$$\Sigma P(Z\cos\beta - Y\cos\gamma)(ax + a'y + a''z) + \Sigma P\cos\alpha.Y(cx + c'y + c''z)$$
$$- Z\Sigma P\cos\alpha(bx + b'y + b''z) = 0 \quad \text{(E')} \quad \text{[voir équat. E'. §. 6.]},$$

$$M'Y + L'Z + NX' = 0 \quad \text{(F)} \quad \text{[voir équat. F. §. 7.]}.$$

Or on voit que l'on aurait pour p_1, q_1, r_1 des valeurs indépendantes des positions des systèmes variés, si le rapport des moments $M' : L'$ était par exemple invariable. En dénotant par π un nombre donné, posons donc la nouvelle équation

$$\text{(G)} \qquad M' = \pi.L.$$

Si dans les deux dernières relations (F, G) ou substitue les valeurs de L', M' en fonction des données primitives et des variables a, b, etc., valeurs déjà obtenues au §. 6., on a trois équations (E', F, G) entre les trois inconnues distinctes des 9 coëfficients (a, b, c, etc.); ces équations suffisent dont pour assigner les systèmes variés qu'on cherche; et comme elles ne sauraient fournir que une ou que quelques solutions au plus, il ne saurait y avoir qu'un ou que quelques systèmes variés au plus qui admettent conjointement avec le système fondamental un centre de résultantes. Il nous parait donc démontré que l'existence de ce point est impossible dans le sens propre et véritable de la présente question. Nous disons qu'il nous *paraît* démontré; car rien ne prouve dans le raisonnement précédent d'une manière suffisante que l'indépendance des valeurs de p_1, q_1, r_1 ait seulement lieu dans la supposition de $M' = \pi.L'$ qui est contraire, en combinaison avec les autres équations, à cette intersection multiple plus ou moins élevée. Quoiqu'il en soit, et en attendant des nouveaux éclaircissement, nous sommes porté à admettre seulement l'existence du centre de résultantes pour le cas où les forces tournent en leurs points d'application sur des surfaces coniques à axes parallèles.

§. 15. Examinons aussi en peu de mots les moyens de simplifier l'équation de la surface (ϱ) qui est généralement le lieu géométrique des

résultantes qu'on obtient en faisant tourner des forces en leurs points d'application autour d'axes parallèles. Par là nous rendrons même plus explicites encore les résultats déjà obtenus, et nous aurons l'occasion de déduire de là une solution d'une extrême facilité d'une question qui au premier abord parait assez compliquée.

Pour introduire dans l'équation (S) du §. **12.** la condition $\nu = 0$, laquelle donne $z_2 = z_1$ pour $XY >$ ou < 0, on rémarquera que l'égalité $z_2 = z_1$ donne: $T' = (z_1 - r_1)Y$, $U' = -(z_1 - r_1)X$; partant $T' : U = -Y : X$; et pour $UT' + U'T$ on trouve:

$$U'T + UT' = (U.Y - TX)(z_1 - r_1).$$

Faisons remarquer aussi une chose importante, savoir que les équations de condition $\nu = 0$, $\mu = 0$ dérivent uniquement de l'équation $a\lambda + b\mu + \nu = 0$ ou de l'équation (E'), et qu'elles se rapportent par conséquent uniquement à la condition d'existence d'une résultante effective; qu'elles doivent donc subsister dans le cas même où l'on admet l'équation (S) seulement, c'est-à-dire un lieu géométrique de résultantes; ensuite on n'oubliera pas non plus que nos calculs supposent que les forces tournent en leurs points d'applications autour d'axes parallèles à celui des ($0z$); ce qui est toujours admissible; car cette commune direction des axes de rotation, étant convenablement choisie, et d'après les conditions du §. **14.**, rien n'empêche de prendre en (0) pour axes des z une droite parallèle à cette direction. Si donc on se rappelle encore la valeur de ϖ du §. **12.**, on pourra présenter l'équation (S) du No. cité sous cette autre forme:

$$(\varrho_1) \qquad Z^2(q_1 - y_3)^2(T^2 + U^2) = (z_1 - r_1)^2(U.Y - T.X)^2.$$

Mais en prenant pour plus de brièveté $X^2 + Y^2 = \varrho^2$, on trouvera aisément et eu égard à la signification des lettres T, U, etc.:

$$T^2 + U^2 = \varrho^2 p_1^2 + \varrho^2 q_1^2 - 2(LY + HX)p_1 - 2(LX - HY)q_1 + H^2 + L^2,$$

$$U.Y - T.X = \varrho^2 q_1 + LX - HY,$$

$$(UY - TX)^2 = \varrho^4 q_1^2 + 2\varrho^2(LX - HY)q_1 + (LX - HY)^2,$$

et l'équation (ϱ_1) pourra à son tour se présenter sous la forme:

$$(\varrho^2) \qquad Z^2(q_1 - y_3)^2[\varrho^2 p_1^2 + \varrho^2 q_1^2 - 2(LY + HX)p_1 - 2(LX - HY)q_1 + L^2 + H^2]$$
$$= (z_1 - r_1)^2[\varrho^4 q_1^2 + 2\varrho^2(LX - HY)q_1 + (LX - HY)^2].$$

Celle-ci est maintenant susceptible d'une simplification considérable et importante à la fois. En effet, la condition d'égalité $\nu = 0$ conduira aisement à celle-ci:

$$(I) \qquad Yx_3 - X.y_3 = L,$$

et par celle de $\mu = 0$ on obtient semblablement:

$$\text{(II)} \qquad Xx_3 + Y.y_3 = Xx_1 + Y.y^2 = H.$$

De là nous concluons à l'inverse les valeurs de ces autres combinaisons:

$$\text{(III)} \qquad HX + LY = \varrho^2.x_3, \qquad HY - L.X = \varrho^2.y_3,$$

et par là l'équation (ϱ_2) se transforme immédiatement en celle-ci:

$$Z^2(q_1-y_3)^2[\varrho^2p_1^2 + \varrho^2q_1^2 - 2\varrho^2p_1x_3 + 2\varrho^2q_1y_3 + L^2 + H^2]$$
$$= (z_1-r_1)^2\varrho^4(q_1^2-2y_3q_1+y_3^2), \quad \text{ou}$$
$$(\varrho_3) \qquad Z^2(\varrho^2p_1^2+\varrho^2q_1^2-2\varrho^2x_3p_1+2\varrho^2y_3q_1+L^2+H^2) = \varrho^4(z_1-r_1)^2.$$

Ainsi donc cette surface qui nous paraissait d'abord du quatrième degré et d'une complication extrême, n'est en définitive que du second ordre. Sous cette forme nouvelle, depouillée d'un facteur commun $(q_1-y_3)^2$ au deux membres, elle semble caractériser un hyperboloïde de revolution à une nappe; mais avant que de rien conclure à cet égard, observons que les équations (I, II) qui proviennent de $\nu = 0$, $\mu = 0$, donnent à leur tour:

$$H^2 + L^2 = \varrho^2(x_3^2+y_3^2),$$

et par la substitution de cette valeur de $H^2 + L^2$, nous obtiendrons finalement cette forme très simple:

$$(\varrho_4) \qquad Z^2[(p_1-x_3)^2 + (q_1-y_3)^2] - \varrho^2(z_1-\varrho_1)^2 = 0.$$

C'est là l'équation d'une surface conique vulgaire dont le centre ou sommet se trouve au point (x_3, y_3, z_1); ce centre est donc situé dans le plan mené par le centre des forces parallèles ($P\cos\alpha$, $P'\cos\alpha'$, $P''\cos\alpha''$, etc.) ou des forces ($P\cos\beta$, $P'\cos\beta'$, $P''\cos\beta''$, etc.), et parallèlement au plan de rotation $(y\,0\,x)$: de plus, sur ce plan il se projette sur la projection même du centre (x_3, y_3, z_3) des forces du système $\Sigma P\cos\gamma$.

Ainsi, en resumé, toutes les fois que la résultante effective se conserve dans un système de forces, mobile d'après les conditions prescrites (et elle se conservera pourvu que l'axe de rotation soit convenablement choisi), son lieu géométrique est une surface conique vulgaire, concentrique à un axe parallèle à la direction des axes de rotation, et dont le sommet est un centre de résultantes.

Quant à la direction de ces axes de rotation, elle n'est pas absolument arbitraire, et cependant elle est possible d'une infinité de manières différentes; c'est ce que démontrent les transformations indiquées au §. 14., en même temps qu'elles fournissent le moyen de calculer cette diversité de directions des axes de rotation.

Si l'on faisait tourner le système initial de forces à résultante effective

autour d'axes parallèles ne satisfaisant plus aux conditions $\nu,\ \mu = 0$, la résultante mobile n'existerait plus, et le centre de résultantes serait aussi illusoire.

Il nous reste à faire remarquer que dans le paragraphe actuel on a obtenu pour les coordonnées du centre les valeurs $p_1 = x_3$, $q_1 = y_3$, $r_1 = z_1 = z_2$, et que les deux dernières sont parconséquent les mêmes que celles qu'on a obtenues au §. 13.; mais on y a trouvé pour p_1 la valeur $p_1 = \frac{Xy_3 + L}{Y}$, et pour que celle-ci soit identique à la valeur actuelle Y de $p_1 = x_3$, il faut qu'on ait l'équation de condition $x_3 = \frac{X.y_3 + L}{Y}$, laquelle subsiste en effet en vertu de l'égalité (I.) qui résulte de $\nu,\ \mu = 0$.

Si l'on introduit les conditions $\nu,\ \mu = 0$, dans les valeurs des moments L', N', M', et que l'on fasse usage des simplifications précédentes, on obtient: $N' = Zy_3 + (bX - a.Y)\,z_1$; or on a trouvé (§. 12.): $a = \frac{W.U}{UT' + U'T}$, $b = \frac{W.T}{UT' + U'T}$, et d'après les réductions opérées sur l'équation (ϱ) on doit avoir maintenant: $UT' + U'T = \pm \varrho^2 (z_1 - r_1)\,(q_1 - y_3)$; d'où résulte:

$$a = \pm \frac{Z.U}{\varrho^2 (z_1 - r_1)}, \qquad b = \pm \frac{Z.T}{\varrho^2 (z_1 - r_1)};$$

$$M' = \pm Z \cdot \frac{UX + TY}{\varrho^2 (z_1 - r_1)} \cdot z_1 - Zx_3 = \pm Z \cdot z_1 \cdot \frac{p_1 - x_3}{z_1 - r_1},$$

$$L' = \pm Z \cdot \frac{(LU - T.H)}{\varrho^2 (z_1 - r_1)} = \pm Z \cdot \frac{x_3 q_1 - y_3 p_1}{z_1 - r_1},$$

$$N' = Z \cdot y_3 \pm z_1 \left(\frac{y_3 - q_1}{z_1 - r_1} \right).$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation du plan principal $N'p_1 + M'q_1 + L'r_1 = 0$, la rendront identique, et c'est ce qui doit avoir lieu, parceque les reductions précédentes et la substitntion des résultats qui en proviennent, dans cette équation, supposent les coordonnées du plan les mêmes que celles de la surface et de la résultante mobile.

§. 16. On pourrait se proposer aussi de rechercher la surface courbe sur laquelle se balance l'axe du moment principal du système mobile de forces, tournant sur des axes parallèles à l'axe $(0z)$, et la surface enveloppante des plans principaux. Nous ne resoudrons d'abord que cette dernière question; mais dans l'hypothèse la plus générale d'un système qui n'admettrait même pas de résultante effective; car cette recherche est encore propre à jeter quelque jour sur la nature même de la question principale qui nous a occupé précédemment.

En remplaçant donc N', M', L' par leurs valeurs, maintenant indépendantes des conditions ν, $\mu = 0$, et réunissant ensemble tous les termes en a, tous ceux en b, on obtiendra:

(P) $a(Lr_1 + Xz_1 q_1 - Yz_2 p_1) + b(Xz_1 p_1 + Yz_2 q_1 - Hr_1) + Zy_3 . p_1 - Z . x_3 q_1 = 0,$

ou en posant un instant:

$$Lr_1 + Xz_1 q_1 - Yz_2 . p_1 = m_1, \quad Xz_1 p_1 + Yz_2 q_1 - Hr_1 = n_1, \quad Zy_3 p_1 - Zx_3 q_1 = \pi,$$

$$am_1 + b . n_1 + \pi_1 = 0, \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = t.$$

Faisant varier les paramètres a, b et laissant constantes les quantités (p_1, q_1, r_1) ou leurs fonctions m_1, n_1, p_1, on trouvera:

$$a = -m_1 \pi_1 : (m_1^2 + n_1^2), \qquad b = -n_1 \pi_1 : (m_1^2 + n_1^2)$$

et l'équation à la surface enveloppe: $\pi_1^2 = m_1^2 + n_1^2$, ou bien:

$$Z^2 (y_3 p_1 - x_3 q_1)^2 = (Lr_1 + Xz_1 - Y . z_2 . p_1)^2 + (Hr_1 - Xz_1 p_1 - Yz_2 q_1)^2.$$

Celle-ci est encore une surface gauche du second ordre; l'enveloppe ou le lieu géométrique des axes principaux est un système de droites passant toutes par l'origine et perpendiculaires aux plans tangents de la surface déjà obtenues. Pourque celle-ci degénère en une simple ligne droite passant par l'origine, il faut que son équation se partage en deux équations linéaires et simultanées qui représentent deux plans lesquels par leur intersection donnent cette droite; il faut donc qu'on ait par exemple:

$$Hr_1 = Xz_1 p_1 + Yz_2 . q_1, \quad \text{partant}$$

$$Lr_1 = Yz_2 p_1 - Xz_1 q_1 \pm Z^2 (y_3 p_1 - x_3 q_1).$$

Soit (p_2, q_2, r_2) le point qui avec l'origine (0) détermine cette droite, et posons $q_2 = \varepsilon p_2$, $r_2 = \delta . p_2$; mais dans les deux équations de plans on doit avoir à la fois $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$, $r_1 = r_2$; ainsi en y changeant (p_1, q_1, r_1) en (p_2, q_2, r_2) et remplaçant q_2, r_2 par leurs valeurs, on obtiendra pour déterminer ε et δ:

$$H\delta = Xz_1 + \varepsilon . Yz_2, \qquad L\delta = Yz_2 - \varepsilon . X . z_1 \pm Zy_3 \mp \varepsilon . Z . x_3;$$

donc pour que le plan principal puisse tourner autour d'une charnière fixe, déterminée par (ε, δ), il faut avoir entre ε, δ et les données les deux dernières équations de condition qui par l'élimination de δ fournissent:

$$\varepsilon = \frac{H(Yz_2 \pm Zy_3)}{LYz_2 + HXz_1 \pm HZ . x_3}.$$

Si l'on suppose ν, $\mu = 0$, partant $z_2 = z_1$ etc., on déduit de cette dernière égalité:

$$\varepsilon = \frac{HY . z_1 \pm HZ . y_3}{\varrho^2 x_3 z_1 \pm HZ . x_3},$$

et celle-ci ne reproduira pas la valeur $\varepsilon = y_3 : x_3$. Mais il y a une autre ma-

nière encore d'exprimer que la surface devient une charnière fixe; c'est de poser ces autres égalités à zéro:

$$Lr_1 = Yz_2p_1 - Xz_1 . q_1, \qquad Hr_1 = Xz_1p_1 + Yz_2q_1 \pm Z(y_3p_1 - x_1q_1)$$

ce qui mène aux équations:

$$L\delta = Yz_2 - \varepsilon . Xz_1, \qquad H.\delta = Xz_1 + \varepsilon . Yz_2 \pm Z(y_3 - \varepsilon . x_3),$$

et maintenant l'élimination de δ fournit pour ε:

$$\varepsilon = (HYz_2 - LXz_1 \mp LZ.y_3) : (HXz_1 + LYz_2 \mp LZx_3).$$

En admettant de nouveau les conditions ν, $\mu = 0$, partant les équations (I, II, III) qui en résultent, on obtient $\varepsilon = y_3 : x_3$. On a ensuite

$$L.\delta = Yz_1 - Xz_1 . \frac{y_3}{x_3} = \frac{(Y.x_3 - Xy_3)z_1}{x_3} = \frac{Lz_1}{x_3}, \quad \text{partant} \quad \delta = z_1 : x_3;$$

ce qui donne enfin $p_2 = x_3$, $q_2 = y_3$, $r_2 = z_2 = z_1$, et reproduit le centre de résultantes obtenu précédemment par d'autres voies.

Mais cette analyse à elle seule est néanmoins insuffisante pour ramener à cette théorie du centre de forces, parceque les équations de condition $\nu, \mu = 0$ sont basées sur des considérations qui y sont étrangères. Toutefois elle montre clairement que le plan principal mobile peut fort bien tourner sur une charnière fixe, sans que le centre de résultantes et sans que ces résultantes elles-mêmes existent; et l'on voit en même temps par la comment il faut modifier et transformer la question lorsque cette circonstance arrive. Pour lever tout doute à cet égard et pour prouver que la charnière fixe ne peut exister que d'une manière unique, reprenons l'équation (P) du plan principal. Soient encore une fois (p_2, q_2, r_2) les coordonnées du point inconnu qui, conjointement avec l'origine fixe des moments (0), détermine cette ligne de rotation du plan (P); on aura par son équation citée:

$$a(Lr_2 + Xz_1q_2 - Yz_2p_2) + b(Xz_1p_2 + Yz_2q_2 - Hr_2) + Z(y_3p_2 - x_3q_2) = 0,$$

ou bien abréviativement:

$$am_2 + b.n_2 + \pi_2 = 0,$$

m_2, n_2, π_2 étant ce que deviennent les fonctions m_1, n_1, π_1 quand on y change p_1, q_1, r_1 en p_2, q_2, r_1 respectivement. Mais l'équation $a.m_2 + b.n_2 + \pi_2 = 0$ ne devant point déterminer les valeurs de a, b en combinaison avec la condition $a^2 + b^2 = 1$, il faut qu'elle subsiste pour toutes les valeurs de ces variables, ce qui exige qu'on ait

$$m_2 = 0, \quad n_2 = 0, \quad \pi_2 = 0;$$

partant

$$\pi_2 = y_2 p_2 - x_3 q_2 = 0,$$
$$n_2 = Xz_1 p_2 + Yz_2 . q_2 - H . r_2 = 0,$$
$$m_2 = Xz_1 q_1 - Yz_2 p_2 + L . r_2 = 0,$$

et de là on déduit par l'élimination de q_2, r_2 (ce qui fait en même temps disparaître la troisième quantité p_2) l'équation de condition suivante entre les données primitives:

$$(Q) \qquad L : H = (Yz_2 x_3 - Xz_1 y_3) : (Yz_2 . y_3 + Xz_1 . x_3),$$

et celle-ci n'est pas identique avec la condition $NX + MY + LZ = 0$; elle ne saurait donc reproduire non plus à la fois les conditions $\nu, \mu = 0$; cela prouve que la charnière fixe du plan principal peut et doit pour de certains cas exister lors même que le système de forces mobile d'après les conditions prescrites n'admet pas de résultante. Dans le cas du centre et de l'existence de la résultante, on a $\nu, \mu = 0$, et l'équation obtenue devient identique; de sorte que quand le centre à lieu, la charnière fixe existe toujours; ce qui était d'ailleurs évident d'avance, puisque ce point doit se trouver dans chaque plan principal.

Remarque. Les quantités (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) etc. sont de simples abréviations analytiques. Toutes les fois qu'il faut discuter les conséquences de l'une ou de l'autre équation de condition qui subsiste entr'elles, il faut remettre leurs valeurs véritables, parcequ'elles offrent l'inconvénient de devenir ou du moins de pouvoir devenir infinies lorsque certaines sommes de projections de forces deviennents nulles; ainsi la condition pour l'existence d'un axe fixe de rotation du plan principal devient par cette restitution:

$$(Q) \qquad \frac{\Sigma P(\cos\beta . x - \cos\alpha . y)}{\Sigma P(\cos\alpha . x + \cos\beta y)} = \frac{(\Sigma P \cos\beta z)(\Sigma P \cos\gamma . x) - (\Sigma P \cos\alpha . z)(\Sigma P \cos\gamma . y)}{(\Sigma P \cos\beta . z)(\Sigma P \cos\gamma . y) + (\Sigma P \cos\alpha z)(\Sigma P \cos\gamma . x)}.$$

Il est d'ailleurs manifeste que l'on doit pouvoir trouver d'une infinité de manières un systeme d'axes inconnus $(0x, 0y, 0z)$ propre à satisfaire à cette équation de condition, de sorte que dans le cas où il n'y a pas de résultante, on peut trouver une infinité de directions à l'axe $(0z)$, tels, qu'en faisant tourner un système quelconque de forces en leurs points d'application, autour d'axes paralèlles à celui-là, le plan principal ne fait que tourner sur une charnière fixe. Ici le degré d'indétermination du problème est bien plus élevé que dans le cas du §. 14., où l'on doit satisfaire à deux équations de condition distinctes avec trois inconnues, tandis que maintenant il n'y a plus pour un égal nombre d'inconnues qu'une équation de condition à remplir.

§. 17. Recherchons enfin l'équation de la surface sur laquelle se meut

l'axe principal, tout en continuant à passer par le point fixe donné (0); nous resoudrons cette question dans le but unique de montrer par la voie même de nos calculs que cette surface est encore du second ordre; quoique l'on trouve d'abord pour la relation qui la caractérise, une équation qui parait encore une fois du quatrième degré; de sorte qu'au premier abord on pourrait la prendre pour une surface conique d'un degré trop élevé.

Soient toujours p_1, q_1, r_1 les coordonnées courantes d'un point de l'axe principal, pris dans une quelconque de ses positions autour du centre de moments, ω', φ', ψ' les angles de l'axe avec les axes coordonnés; on aura pour les équations de cet axe:

$$\cos\varphi' . p_1 - \cos\omega' . q_1 = 0, \quad \cos\psi' . q_1 - \cos\varphi' . r_1 = 0,$$

partant

$$M' p_1 - N' q_1 = 0, \quad L' q_1 - M' r_1 = 0,$$

ou en substituant les valeurs de N', M', L' pour le cas où le système quelconque de forces tourne en ses points d'action autour d'axes parallèles à celui $(0z)$:

$$(aXz_1 + bYz_2 - Zx_3) p_1 - (Zy_3 + bXz_1 - aYz_2) q_1 = 0,$$
$$(aL - bH) q_1 - (aXz_1 + bYz_2 - Zx_3) r_1 = 0.$$

En posant pour abréger les réductions à faire et l'ecriture des formules:

$$Xz_1 p_1 + Yz_2 q_1 = m, \quad Yz_2 p_1 - Xz_1 q_1 = n, \quad Z(x_3 p_1 + y_3 q_1) = \pi;$$
$$Lq_1 - Xz_1 r_1 = g, \qquad Hq_1 + Yz_2 r_1 = h, \qquad Zr_1 x_3 = k,$$

les quantités m, n, π, g, h, k seront linéaires par rapport aux variables courantes p_1, q_1, r_1, et l'on aura

$$am + bn - \pi = 0, \qquad ag - bh + k = 0,$$

et de là on déduit

$$a = \frac{\pi . h - kn}{hm + gn}, \qquad b = \frac{g\pi + k . m}{hm + gn},$$

et l'équation de la surface sera

$$(\pi h - kn)^2 + (\pi g + km)^2 = (hm + gn)^2.$$

En prenant pour abréger

$$Yz_2 y_3 + Xz_1 . x_3 = \Omega,$$
$$Yz_2 . x_3 - Xz_1 y_3 = \Omega';$$

on trouvera

$$\pi . h + k . n = H . \pi . q_1 + Z\Omega . r_1 q_1,$$
$$\pi . g + k . m = L . \pi . q_1 + Z\Omega' . r_1 q_1,$$
$$h . m + g . n = (H . m + L . n) q_1 + (X^2 z_1^2 + Y^2 z_2^2) q_1 . r_1$$

de sorte que dans l'équation obtenue le facteur variable q_1^2 devient commun à tous les termes, ce qui reduit cette équation à la forme suivante:

$$(H.\pi+Zr_1.\Omega)^2+(L\pi+Z\Omega'.r_1)^2=(Hm+Ln+(X^2.Z_1^2+Y^2Z_2^2).r_1)^2,$$

laquelle n'est plus que du second ordre. Il est vrai qu'il n'est pas permis de supprimer le facteur variable q_1^2 pour le cas où il prendrait la valeur constante $q_1=0$; mais ce résultat annonce simplement que la surface peut dégénérer en un plan qui coïncide avec $(z0x)$, et cette circonstance a lieu lorsque la charnière fixe du plan principial existe, et qu'elle coïncide avec l'axe $(0y)$. Quand le plan principal tourne autour d'une charnière fixe quelconque, déterminée par un point $(p_2, q_2, r_2)=P$, l'axe principal devra se trouver dans un plan normal à $(0P)$, et l'on aura

$$\cos\omega'\cos(P\delta x)+\cos\varphi'\cos(P\delta y)+\cos\psi'\cos(P\delta z)=0:$$

mais

$$\cos(P\delta x)=\frac{p_2}{\sqrt{(p_2^2+q_2^2+r_2^2)}},\quad \cos(P\delta y)=\frac{q_2}{\sqrt{(....)}},\quad \cos(P\delta z)=\frac{r_2}{\sqrt{(....)}},$$

ce qui donne $N'p_2+M'q_2+L'.r_2=0$, ou, par la substitution des valeurs de N', M', L', l'équation déjà obtenue au §. **15**: $am_2+bn_2+\pi_2=0$ qui fournit les conditions $m_2=0$, $n_2=0$, $\pi_2=0$. Celles-ci ramenent à l'équation de condition (Q) et en outre on obtient pour le plan dans lequel l'axe principal doit tourner alors:

$$p_1+\left(\frac{q_2}{p_2}\right).q_1+\left(\frac{r_2}{p_2}\right).r_1=0,$$

ou $p_1+\varepsilon.q_1+\delta.r_1=0$, et les quantités ε, δ sont fournies par les conditions $m_2=0$, $n_2=0$, $\pi_2=0$. Mais l'équation générale de la surface de l'axe principal doit aussi ramener à ces conséquences particulières. En effet, dans le cas actuel elle doit devenir linéaire par rapport aux variables p_1, q_1, r_1; il faut donc qu'on ait:

$$L\pi+Z\Omega r_1=0,$$
$$H\pi+Z\Omega r_1\mp H.m\mp L.n\mp(X^2z_1^2+Y^2z_2^2)r_1^2=0.$$

La première de ces équations exprime un plan:

$$p_1+\left(\frac{y_3}{x_3}\right).q_1+\frac{\Omega'}{L.x_3}.r_1=0,$$

et celui-ci devant coïncider avec le plan $p_1+\varepsilon q_1+\delta.r_1=0$, il faut qu'on ait $\varepsilon=y_3:x_3$ et $\delta=\frac{\Omega'}{L.x_3}$, et c'est ce qu'on a déjà obtenu d'abord.

La seconde équation exprime encore un plan:

$$0 = p_1 + \frac{H.Zy_3 \mp HYz_2 \pm LXz_1}{H.Zx_3 \mp HXz_1 \mp LY.z_2} \cdot q_1 + \frac{Z.\Omega \mp (X^2z_1^2 + Y^2z_2^2)}{HZ.x_3 \mp HXz_1 \mp LYz_2} \cdot r_1.$$

Dans le cas particulier des conditions $\nu, \mu = 0$, on obtient $\Omega = HZ_1$, $\Omega' = LZ_1$; le coëfficient de q_1 dans la dernière formule devient encore $y_3 : x_3$, et celui de r_1 devient $\frac{(HZ \mp \varrho^2 z_1)z_1}{(HZ \mp \varrho^2 z_1)x_1} = \frac{z_1}{x_3}$; de sorte que nos trois équations sont en effet identiques entr'elles, et n'expriment que le plan normal à la charnière du plan principal.

Deuxième partie.

§. 1. Il y a une autre manière encore d'envisager la question du centre de forces qui mérite aussi quelqu'attention. C'est de concevoir que les points d'application se déplacent eux-mêmes pendant que les forces tournent sans altérer leurs inclinaisons mutuelles ni leurs intensités. Pour fixer les idées, considérons le cas d'un système quelconque de forces appliquées à un corps rigide, pourvu d'un point fixe donné (**0**). En faisant tourner le corps autour d'un axe en ce point *variable* ou *invariable* de direction, on entraînera les forces et leurs points d'application exterieurs autour de ce même axe; et le tout étant regardé comme un système rigide unique, il est manifeste que les inclinaisons mutuelles des lignes d'action restent les mêmes, et que les coordonnées de chaque point d'application qui conserve la même position relative aux autres points d'action, varient par rapport à des axes fixes absolus et rectangles ($0x$, $0y$, $0z$). Mais dans la nouvelle position du système qui dérive de sa position primitive par un mouvement de rotation, ou par une gyration bien définie, ou par un déplacement arbitraire, non encore défini, on pourra toujours trouver un second système d'axes rectangles ($0x$, $0y$, $0z$) par rapport auxquels les forces et leurs points d'action déplacés se trouvent disposés, comme ils l'étaient dans le système primitif par rapport aux axes non-entraînés ou fixes ($0x$, $0y$, $0z$). Ainsi les moments des forces du système varié autour des axes entraînés ($0x_1$, $0y_1$, $0z_1$) sont les mêmes que ceux des forces du système fondamental autour des axes ($0x$, $0y$, $0z$): donc la somme des projections orthogonales des forces déplacées sur l'un quelconque des axes nouveaux ($0x_1$, $0y_1$, $0z_1$) est encore égale à la somme analogue des projections primitives sur l'axe fixe analogue ($0x$, $0y$, $0z$). Cela posé, dénotons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point d'action varié de la force P, rapporté aux directrices fixes ($0x$, $0y$, $0z$), et posons pour abréger l'écriture des formules:

$$\cos(x_1\delta x) = a, \quad \cos(y_1\delta x) = b, \quad \cos(z_1\delta x) = c,$$
$$\cos(x_1\delta y) = a', \quad \cos(y_1\delta y) = b', \quad \cos(z_1\delta y) = c',$$
$$\cos(x_1\delta z) = a'', \quad \cos(y_1\delta z) = b'', \quad \cos(z_1\delta z) = c'';$$

on aura d'abord par les formules connues:

$$x_1 = ax + a'y + a''z, \quad y_1 = bx + b'y + b''z, \quad z_1 = cx + c'y + c''z.$$

Nommons (ϱ') le système varié de forces, et (ϱ) le système fondamental, X', Y', Z' la somme des projections orthogonales des forces de (S) sur les axes $(0x, 0y, 0z)$, N', M', L' la somme de leurs moments autour des mêmes axes et dans le même ordre. En admettant encore que les lettres semblables, mais non-accentuées, conviennent aux données du système (S), nous obtiendrons

$$X' = aX + bY + cZ, \quad Y' = a'X + b'Y + c'Z, \quad Z' = a''X + b''Y + c''Z,$$
$$N' = aN + bM + cL, \quad M' = a'N + b'M + c'L, \quad L' = a''N + b''M + c''L.$$

Ces résultats de transformation sont susceptibles de diverses conséquences. Etablissons d'abord celles qui se présentent immédiatement. Il est aisé de vérifier que si l'équation de condition $LZ + NX + MY = 0$ est satisfaite (et il faut qu'ici elle le soit toujours, puisqu'on ne raisonne que dans l'hypothèse d'une résultante effective), la nouvelle équation de condition

$$L'Z' + N'X' + M'Y' = 0$$

est toujours remplie identiquement. Du reste, cette conséquence analytique est évidente par elle même et par le simple point de vue mécanique de la question.

On peut vérifier de même, ce qui n'est plus évident à l'avance, savoir que le moment principal $\mu' = \sqrt{(L'^2 + M'^2 + N'^2)}$ du système (S') a conservé sa valeur maximum primitive $\mu = \sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}$ du système (S). Toutefois la direction du plan principal et de l'axe principal en (0) ont changé par rapport aux axes fixes, puisque maintenant on doit avoir

$$\cos\omega' = \frac{N'}{\mu}, \quad \cos\varphi = \frac{M'}{\mu}, \quad \cos\psi' = \frac{L'}{\mu};$$

tandis que pour l'axe principal du système (ϱ) on a évidemment:

$$\cos\omega = \frac{N}{\mu}, \quad \cos\varphi = \frac{M}{\mu}, \quad \cos\psi = \frac{L}{\mu}.$$

§. 2. Recherchons la condition d'intersection des deux résultantes (R', R) des systèmes respectifs (S', S); les deux forces effectives doivent se trouver d'après le §. 3. (première partie), l'une (R') dans le plan principal (P') de (S'), l'autre (R) dans le plan principal de (S). Donc, pour qu'elles ne se croisent pas dans l'espace, il faut qu'elles viennent couper la ligne d'inter-

section des deux plans (P, P′) qui sont représentés par les équations suivantes, où p_1, q_1, r_1 désignent des coordonnées courantes:

$$(P) \qquad p_1 \cos\omega + q_1 \cos\varphi + r_1 \cos\psi = 0,$$

$$(P') \qquad p_1 \cos\omega' + q_1 \cos\varphi' + r_1 \cos\psi' = 0;$$

et cette double rencontre devra se faire en un même point de la ligne droite (P, P′). Ainsî l'on aura à calculer le point de rencontre de (R) avec (P, P′), et celui de (R′) avec (P, P′). Or c'est là précisement ce qui a été déjà fait dans la question générale de la *première partie*; et l'on y a obtenu l'équation de condition:

$$X.\mu'\cos\omega' + Y.\mu'\cos\varphi' + Z.\mu'\cos\psi' + X'.\mu\cos\omega + Y'.\mu\cos\varphi + Z'.\mu\cos\psi = 0,$$

que l'on a présentée alors sous la forme de l'équation (F, §. 7.) et que l'on peut maintenant mettre sous une forme plus concise qui résulte de l'égalité actuelle des moments μ', μ et qui n'a point lieu dans le premier cas général. Supprimant en effet le facteur commun $\mu' = \mu$ dans tous les termes, et observant que $X\cos\omega' + Y\cos\varphi' + Z\cos\psi'$ exprime la projection de (R) sur l'axe principal $0A'$ de (S′), tandis que $X'\cos\omega + Y'\cos\varphi + Z'\cos\psi$ exprime la projection de (R′) sur l'axe principal $0A$ de (ϱ), on pourra ramener la condition trouvée à la simple égalité

$$R\cos(R,\widehat{0A'}) = -R'\cos(R',\widehat{0A}),$$

qui exprime que pour que l'intersection ait lieu, la projection de la résultante fondamentale sur l'axe principal du système varié doit être égale et contraire à la projection de la résultante variée sur l'axe principal primitif. Mais cette interprétation qu'il serait peut-être difficile de réaliser par une construction purement géométrique, n'avance en rien la solution analytique de la question; et nous continuerons à employer la condition obtenue sous la forme même de l'égalité (F), savoir:

$$(F) \qquad N'X + M'Y + L'Z + NX' + MY' + LZ' = 0$$

Mais si la forme analytique est ici absolument la même que celle de l'équation (F) de la première partie, il n'en est pas moins vrai de dire que nos deux équations (F) sont très différentes quant au fond; car maintenant les quantités N', M', L' ont des valeurs toutes autres que celles du premier cas. Cette même remarque doit s'appliquer aux valeurs suivantes des coordonnées du point d'intersection des deux résultantes:

$$p_1 = \frac{LM' - ML'}{N'X + M'Y + L'Z}, \quad q_1 = \frac{NL' - LN'}{N'X + M'Y + L'Z}, \quad r_1 = \frac{MN' - M'N}{N'X' + M'Y' + LZ'}.$$

Si les forces du système fondamental se faisaient l'équilibre de rotation, ce qui

entraînerait l'équilibre général autour du point fixe (**0**), on aurait $N=0$, $M=0$, $L=0$, et partant $p_1, q_1, r_1 = 0$; ce qui est du reste évident ici, puisque cet équilibre n'a lieu qu'à la condition que la résultante effective passe par le point fixe; mais il importe de reconnaître s'il n'existe pas à cet égard quelque propriété générale, un centre de forces qui reponde, soit à un déplacement géométrique du système bien défini, soit à un ensemble de systèmes de forces ($S, S', S'', S''', \ldots.$), se déduisant tous d'un système unique (S), d'après les conditions prescrites, sans être toutefois tous infiniment voisins et sans dériver d'un seul et même mouvement du système primitif. Or le cas le plus simple et qui s'offre au premier abord à l'attention, est sans doute celui où pour former les systèmes variés ($S', S'', \ldots.$), on ferait tourner le système autour d'un axe en (0) invariable de direction; et ce cas, quoique tout spécial dans un sens, est encore fort général en cet autre sens, qu'il peut repondre à un système de forces arbitraire, et à une figure quelconque de leurs points d'application, admettant néanmoins toujours une résultante effective. Ensuite, il mérite d'autant plus un examen à part, qu'il repond au plus simple de tous les mouvements que le corps solide puisse prendre autour de son point fixe.

§. **3.** Quelle que soit la direction encore inconnue, *unique* ou *multiple*, de l'axe en (**0**) autour duquel il faut tourner le système (S) pour en déduire une suite indéfinie de systèmes variés qui admettent tous un même centre commun avec (S), si toutefois la question est possible: rien n'empêche de prendre l'axe $0z$ suivant cet axe de rotation inconnu, ou de se borner à tourner le tout autour de l'axe ($0z$) considéré d'abord comme direction arbitraire, dont on se reserve de disposer ensuite convenablement; mais dès lors l'axe $0z_1$ ne sera pas entraîné dans le mouvement; et il n'y aura que les axes ($0x_1, 0y_1$) qui le soient, et qui tournent dans le plan fixe des (y, x); on aura donc, quelle que soit la position variée de (S): $a''=0$, $b''=0$, $b'=a$, $a'=-b$, $c''=1$, $c'=0$, $c=0$, partant $X'=aX+bY$, $Y'=aY-bX$, $Z'=Z$:

$$N' = a.N + bM, \quad M' = aM - bN, \quad L' = L.$$

L'équation (**F**) devient identique à l'équation de condition d'une résultante unique: $NX + MY + LZ = 0$; de sorte qu'on sera dispensé d'en tenir un compte particulier; et les coordonnées p_1, q_1, r_1 prennent les valeurs simplifiées:

$$p_1 = \frac{(a-1)L.M - b.L.N}{(1-a)L.Z + b(MX-NY)}, \quad q_1 = \frac{(1-a)L.N - bLM}{(1-a)LZ + b(MX-NY)},$$

$$r_1 = \frac{b(M^2+N^2)}{(1-a)ZL + b(MX-NY)}.$$

La condition de l'intersection (R', R) se trouvant donc satisfaite et identique à $LZ + NX + MY = 0$, il en résulte qu'elle est une conséquence nécessaire de l'hypothèse même dans laquelle il faut raisonner; et il ne reste plus qu'à examiner de quelle manière les quantités p_1, q_1, r_1 pourront devenir indépendantes des quantités a, b, ou de la position du système varié (ϱ'). Or à une simple inspection des formules précédentes, nous voyons que cette circonstance heureuse a lieu pour ce cas particulier, au moins où l'axe de rotation serait situé dans le plan principal du système primitif (ϱ); alors on aurait en effet: $L = 0$, et $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, $r_1 = \frac{M^2+N^2}{MX-NY}$. En vertu de la condition actuelle $NX + MY = 0$, on peut aussi présenter cette valeur de r_1 tour-à-tour sous la forme:

$$r_1 = \frac{M}{X} \quad \text{et} \quad r_1 = -\frac{N}{Y}.$$

Remarquons aussi que pour n'avoir pas un centre illusoire ou qui se trouve placé à l'infini, il faut disposer les deux autres axes $(0x, 0y)$ de façon que la résultante, toujours située dans le plan principal, ne devienne pas normale à leur plan $(y0x)$, ou, ce qui revient au même, on prendra l'axe $(0z)$ suivant telle direction qu'on voudra du plan principal, avec l'attention spéciale de ne jamais le rendre parallèle à la direction de (R); car pour cette position particulière on aurait à la fois $X = 0$, $Y = 0$, partant $r_1 = \infty$; et c'est ce cas précisement qu'il suffiit d'éviter.

L'analyse précédente nous autorise donc à énoncer ce théorème général sur le centre (p_1, q_1, r_1):

Lorsque sans altérer, ni les inclinaisons mutuelles, ni les intensités, on fait tourner des forces données et leurs points d'application autour d'un axe quelconque du point fixe, non-parallèle à la direction de la résultante primitive, mais situé dans le plan principal, la résultante du système tournera invariablement autour d'un même point fixe (p_1, q_1, r_1); c'est le *centre de résultantes* ou le *centre de forces*. En outre comme on a $Z' = Z$, ou $\cos C' = \cos C$, il est manifeste que la résultante du système mobile décrit une surface conique, concentrique à un axe fixe, parallèle à l'axe de rotation général $(0z)$ du système. Le plan principal tournera lui-même sur l'axe de rotation $(0z)$, entraînant dans ce mouvement l'axe principal qui ne cesse pas pour cela de se trouver constamment dans le plan $(y0x)$; les cosinus des angles de sa direction sont:

$$\cos\omega' = \frac{aN+bM}{\mu}, \quad \cos\varphi' = \frac{aM-bN}{\mu}, \quad \cos\psi' = 0.$$

La propriété générale qu'on vient d'établir, pourrait par fois paraître évidente; mais s'il en était ainsi, elle devrait être vraie encore pour le cas d'un axe de rotation, non plus situé dans le plan principal. Or il n'en est rien; car quand L est $>$ ou < 0, et d'une valeur quelconque, on ne voit plus que les quantités p_1, q_1, r_1 puissent devenir indépendantes de la position du système de forces mobile.

Si le cas singulier a lieu où l'axe de rotation serait pris parallèle à la direction de la résultante primitive, on a $X = 0$, $Y = 0$, et les formules générales donneront:

$$p_1 = \frac{0}{0}, \quad q_1 = \frac{0}{0}, \quad r_1 = \infty;$$

ce qui rend le centre illusoire ou impossible, en le placant dans le plan principal à une distance infinie, ou en un point quelconque d'une circonférence infinie, concentrique au point fixe donné (0); mais par la nature de la question ce point, quoiqu'à l'infini, ne doit pas cesser de se trouver sur la ligne d'action de la résultante; ainsi les quantités p_1, q_1 ne sont pas réellement quelconques, ni indéterminées. Les équations de la résultante donnent en effet alors et suffisent à elles seules pour donner les valeurs: $q_1 = \frac{N}{Z}$, $p_1 = -\frac{M}{Z}$. On peut donc dire, pour conserver l'analogie, que quand on fait tourner un système quelconque de forces autour d'un axe du point fixe, parallèle à la résultante effective du système, celle-ci doit pivoter sur un point à l'infini, ou bien tourner sur elle-même, ce qui de fait la rend complètement immobile; alors donc la surface conique s'évanouit; son sommet passe à l'infini, et elle se remplace par l'axe même du cône; mais ce point à l'infini de la résultante, n'est plus un centre de forces proprement dit.

§. 4. *Lieu géométrique des résultantes.* Mais en faisant tourner le système de forces fondamental autour d'un axe quelconque, non plus situé dans le plan principal primitif, on peut se proposer de rechercher la surface, lieu géométrique des diverses positions consécutives de la résultante mobile. Pour resoudre cette seconde question, nous pouvons encore une fois confondre l'axe (0z) avec cet axe de rotation censé donné au hasard, et choisir les deux autres lignes rectangles $0x$, $0y$ dans le plan normal en (0). On aura donc ainsi: $a'' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 1$, $c' = 0$, $c = 0$, $a' = -b$, $b' = +a$, etc.

Les équations de la résultante, considérée dans une position générale, seront:
$(a.Y-b.X)p_1-(aX+bY)q_1=L, \quad Zq_1-(aY-bX)r_1=aN+b.M.$
En y joignant la relation $a^2+b^2=1$, et éliminant $a, b,$ on obtient le lieu demandé. Si l'on prend pour abréger:
$Y.p_1-X.q_1=T, \quad Xp_1+Y.q_1=U, \quad N+Y.r_1=T', \quad X.r_1-M=U',$
on obtient abréviativement pour les équations de la résultante:
$$a.T-b.U=L, \quad a.T'-b.U'=Z.q_1; \text{ d'où résulte}$$
$$a=\frac{LU'-Z.V.q_1}{TU'-T'U}, \qquad b=\frac{LT'-Z.T.q_1}{TU'-T'.U},$$
et l'équation à la surface gauche sera la suivante:
$$(S) \qquad (L.U'-Z.Vq_1)^2+(L.T'-Z.T.q_1)^2=(TU'-T'U)^2;$$
elles est manifestement du quatrième degré par rapport aux coordonnées courantes p_1, q_1, r_1.

Si l'on veut exprimer que la surface est développable, il faut mettre la nouvelle condition que deux résultantes consécutives et infiniment voisines sur la surface se coupent; ce qui revient à faire varier a et b dans les équations de l'une d'elles, et à laisser en même temps les coordonnées (p_1, q_1, r_1) constantes. De cette manière on parvient à la nouvelle équation de condition:
$$(I) \qquad UT'-T.U'=0,$$
laquelle entraîne l'égalité à zéro de chaque terme quarré du premier membre de (S); mais comme l'une de ces dernières égalités est une conséquence identique de l'autre, en combinaison avec (I), il suffira de joindre à celle-ci cette autre:
$$(II) \qquad L.U'-Z.U.q_1=0.$$
Les développements des égalités précédentes (I) et (II) sont:
$$(\sigma) \qquad (X^2+Y^2)q_1r_1+(NX+MY)p_1-(MX-NY)q_1=0,$$
$$(\sigma') \qquad X.p_1.q_1+Y.q_1^2-L.X.r_1+M.L=0.$$
La courbe enveloppe des diverses positions de la résultante dans le cas d'une surface développable, ou l'arête de rebroussement elle-même de cette surfaee est donc représentée par les équations simultanées (σ, σ') qui expriment des surfaces gauches du second degré. Les projections de cette arête sur les trois plans coordonnés dont l'un est normal à l'axe de rotation du système de forces mobile, tandis que les deux autres plans passent suivant cet axe même, sont donc également connues.

Examinons en peu de mots ce que pourra nous fournir cette analyse

pour le cas particulier de $L = 0$. Le facteur de p_1 de (σ) deviendra nul à cause de $NX + MY = -LZ = 0$; il reste donc les expressions

$$(\sigma) \qquad (X^2+Y^2)\,q_1 r_1 + (NY - MX)\,q_1 = 0,$$
$$(\sigma') \qquad X.p_1 q_1 + Y.q_1^2 = 0.$$

Celles-ci seront d'abord satisfaites par l'hypothèse de $q_1 = 0$; ainsi tous les points de la courbe tombent alors dans le plan $(x0z)$ qui passe suivant l'axe de rotation; mais pour qu'ils se réduisent à un point unique, situé sur la résultante primitive $Yp_1 - Xq_1 = 0$, $Zq_1 - Yr_1 = N$, on doit avoir aussi d'après la première équation $p_1 = 0$; ce qui donne par la seconde:

$$r_1 = -\frac{N}{Y} = +\frac{M}{X}.$$

Nous voilà donc ainsi retombé sur la solution déjà obtenue plus haut par des considérations spéciales, déduites aussi de la nature du sujèt. Examinons si les équations particulières (σ, σ') provenant de $L = 0$, ne sauraient fournir d'autre solution. En y supprimant d'abord le facteur q_1, on en tire celles-ci:

$$r_1 = \frac{MX - NY}{X^2+Y^2}; \quad X.p_1 + Yq_1 = 0.$$

Or en combinant la dernière avec la première $Yp_1 - Xq_1 = 0$, on en deduit ce résultat: $(X^2+Y^2)p_1 = 0$, ce qui laissera par conséquent p_1 et q_1 indéterminées, ou ce qui reproduira $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, et la dernière valeur de r_1; mais la seconde équation de la résultante, savoir $Zq_1 - Y.r_1 = N$, donne aussi pour r_1, à cause de $q_1 = 0$, la première valeur de r_1 déjà obtenue plus haut: on est donc porté ainsi à croire à une double solution pour le cas de $L = 0$; mais il n'en est rien, vu que les deux valeurs de r_1 ainsi obtenues, étant égalées entr'elles, ramenent à l'équation censée satisfaite $NX + MY = 0$; et elles ne différent par conséquent que par la forme apparente. Il faudrait maintenant savoir encore si le centre n'est plus possible pour aucun cas différent de celui qu'on a reconnu, d'après l'analyse précédente il ne paraît pas qu'il y ait d'autres solutions; du moins nous n'avons rien trouvé à cet égard.

Remarque. La surface du second degré (σ) est un hyperboloïde à une nappe qui a un système de génératrices rectilignes parallèles au plan des (zx), et un autre parallele au plan (yx), normal à l'axe de rotation et dont les sections faites par des plans parallèles à celui $(y0z)$ sont des hyperboles. La surface du second degré (σ') est un paraboloïde hyperbolique qui a un système de génératrices rectilignes, parallèles au plan des $(z0x)$, et dont les sections planes parallèles au plan $(x0y)$ sont des hyperboles, tandis que les

sections parallèles à $(y0z)$ sont des paraboles. Il est manifeste aussi que le lieu des résultantes est la surface développable formée par les tangentes consécutives à la courbe (σ, σ'); car il faut prendre en considération que ces tangentes ne doivent pas se trouver placées sur les deux surfaces gauches (σ) et (σ') mêmes; enfin ajoutons à cela que l'équation (s) du cas général se reduit à la forme suivante, étant développée:

$$(S)\quad (\boldsymbol{L}.X.r_1-\boldsymbol{LM}-\boldsymbol{Z}.X.p_1q_1-\boldsymbol{Z}.\boldsymbol{Y}.q_1^2)^2+(\boldsymbol{LN}+\boldsymbol{LY}.r_1-\boldsymbol{ZY}p_1q_1+\boldsymbol{Z}.X.q_1^2)^2$$
$$=[\boldsymbol{LZ}.p_1+(\boldsymbol{MX}-\boldsymbol{NY})q_1-(X^2+\boldsymbol{Y}^2)q_1r_1]^2.$$

Quand on fait tourner le système de forces primitif autour de son axe principal initial, on a $M=0$, $N=0$, partant $Z=0$; et l'égalité précedente deviendra:

$$(q_1^2R^2-L^2)r_1^2=0,$$

et celle-ci est satisfaite le plus généralement par la supposition de $r_1=0$; ainsi dans ce cas la résultante mobile ne sortira pas du plan $(y0x)$ ou principal, où elle aura pour enveloppe une circonférence de cercle de rayon $\frac{L}{R}$, et concentrique au point fixe donné. Quand on produit la rotation autour d'un axe parallèle à la résultante, l'équation (ϱ) est satisfaite identiquement, et le lieu des résultantes n'existe plus sous forme de surface; car dès lors on a $Y=0$, $X=0$, $L=0$; il faut donc que la résultante reste fixe de position, ou qu'elle tourne sur elle-même.

Il n'existe plus de centre pour un système quelconque de forces situées dans un même plan, et que l'on ferait tourner avec les points d'application autour d'un axe normal au plan; alors on obtient:

$$q_1=-\frac{L}{X},\quad p_1=-\frac{1-a}{b}\cdot\frac{L}{X}=-\frac{\sqrt{(1-a)}}{\sqrt{(1+a)}}\cdot\frac{L}{X}.$$

Mais le centre se reproduit dans le cas où l'on ferait tourner le système comme un seul tout rigide autour d'un axe quelconque du plan même; ce dernier théorème est-à-peu près évident sans calcul, et se trouve d'ailleurs compris comme cas spécial dans le cas examiné plus haut.

§. 5. Ce qui précède montre comment et d'après qu'elles conditions fort simples le centre de forces existe dans le cas d'un mouvement de rotation imprimé au système autour d'un axe fixe. Il s'agit maintenant de reconnaître si ce point ne peut pas exister encore dans de certains cas généraux où les systèmes de forces variés ne dérivent plus du système fondamental d'après une loi de mouvement plus ou moins simple, mais d'après des condi-

tions soit géométriques soit analytiques qui restent arbitraires entre de certaines limites. Mais comme il importe d'apporter les plus grandes simplifications possibles à nos formules, prenons l'axe des abscisses $0x$ suivant l'axe du moment principal primitif; et nous aurons, quelle que soit la direction encore arbitraire des deux autres axes rectangles dans le plan en (0) normal à $0x$: $L = 0$, $M = 0$, partant $X = 0$.

Les formules générales de transformation deviennent de leur côté:

$$N' = a.N, \quad M' = a'N, \quad L' = a''N;$$

$$X' = bY + cX, \quad Y' = b'Y + c'Z, \quad Z' = b''Y + c''Z,$$

et la formule (F) qui exprime la condition d'intersection, prend la forme:

$$(F') \qquad a'.Y + a''Z + bY + c.Z = 0,$$

et pour les coordonnées d'intersection de la résultante qui répond à la position (a, a', a'', b, c, etc.) avec la résultante initiale, on obtient:

$$p_1 = 0, \quad q_1 = \frac{a''.N}{a'Y + a''Z}, \quad r_1 = -\frac{a'N}{a'Y + a''Z}.$$

Mais il ne suffit pas, pour avoir un centre proprement dit, ou un point d'intersection d'une haute multiplicité, d'avoir la condition (F'); il faut encore que les quantités q_1, r_1 deviennent indépendantes des quantités a', a'', b, c, etc. ou de la direction des axes entrainés ($0x_1$, $0y_1$, $0z_1$). Pour cela il faut manifestement que les deux cosinus variables a'', a' conservent entr'eux un rapport constant que nous pouvons nous donner d'une manière arbitraire, mais qu'il faut maintenir ensuite pour toutes les valeurs possibles des 9 coëfficients variables: si donc π désigne un nombre arbitraire, mais donné, on devra prendre:

$$(G') \qquad a'' = \pi.a';$$

d'où résulte

$$p_1 = 0, \quad q_1 = \frac{\pi.N}{Y + \pi Z}, \quad r_1 = -\frac{N}{Y + \pi Z}.$$

Or pour déterminer les trois inconnues distinctes auxquelles se reduisent les 9 coëfficients, c'est-à-dire pour obtenir la direction des axes entraînés ou la position du système varié de forces, nous n'avons ainsi par les conditions du problème que deux équations de condition, savoir (F') et (G'); et l'une de nos inconnues reste par conséquent entièrement arbitraire. Pour exprimer la chose autrement, disons que pour déterminer 9 inconnues (a, b, c, ... c'') on n'a que 8 équations de condition, savoir les 6 équations connues qui résultent de la transformation des coordonnées, et les deux égalités (F', G'); donc l'une quelconque des 9 inconnues, a par exemple, reste arbitraire entre les limites 0 et ± 1; ainsi, étant donné un système quelconque de forces à résultante

effective, on peut trouver d'une infinité de manières différentes un système de forces varié, de même inclinaisons mutuelles et de mêmes intensités, dont les résultantes coupent la résultante fondamentale en un seul et même point; mais ces différents systèmes que l'on ne peut plus soumettre à une même définition géométrique, à une même loi de mouvement plus ou moins simple, peuvent avoir entr'eux des différences de position finies ou infiniment petites, selon qu'on fait varier la quantité arbitraire et indépendante a par degrès finis ou infiniment petits. Ils offrent l'inconvénient de ne se différencier d'autres systèmes absolument arbitraires que par les équations de condition purement analytiques (F', G') dont la première exprime la condition d'intersection d'une seule résultante mobile avec la résultante initiale, et dont la seconde exprime la proportionnalité de a'' et de a'; a'' est ainsi le cosinus de l'hypothénuse d'un triangle sphérique rectangle dont l'un des côtés relatif à π est constant, tandis que l'autre côté est l'arc variable de cosinus a'; mais cela encore n'est vrai que pour le cas où le paramètre π est moindre que l'unité. Le procédé de calculer cette multiplicité de systèmes variés de forces est d'ailleurs manifeste. Soient

$$a_1, a_2, a_3, a_8, a_5, \ldots . a_n$$

des valeurs arbitraires et en nombre quelconque pour la quantité a. L'équation $a^2 + a'^2 + a''^2 = a^2 + a'^2(1+\pi^2) = 1$ donnera pour a' la suite correspondante:

$$a_1', a_2', a_3', a_4', a_5', \ldots . a_n',$$

d'où l'on tirera par le moyen de l'équation (G') pour a'' cette troisième suite de valeurs:

$$a_1'', a_2'', a_3'', a_4'', a_5'', \ldots . a_n''.$$

Les valeurs correspondantes de b, c se calculeront par les équations

$$a'(X+\pi.Z) + b.Y + cZ = 0, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

dans lesquelles on substituera tour-à-tour au lieu de a' et de a les valeurs contemporaines $(a_1', a_1)\ (a_2', a_2)\ (a_3', a_3) \ldots . (a_n', a_n)$, ce qui donnera pour b et c les deux suites:

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots . b_n, \qquad c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots . c_n.$$

Enfin on calculera b' et c' par les conditions

$$0 = ab + a'b' + a''b'' = ab + a'b' + a''.\sqrt{(1-b^2-b'^2)},$$
$$0 = ac + a'c' + a''c'' = ac + a'c' + a''\sqrt{(1-c^2-c'^2)};$$

ce qui donnera les deux autres suites de valeurs:

$$b_1', b_2', b_3', b_4', b_5', \ldots . b_n', \qquad c_1', c_2', c_3', c_4', c_5', \ldots . c_n',$$

et des relations $b''c'' = -(bc + b'c')$, $b''^2 + c''^2 = 1 - a''^2$ on tirera enfin pour b'', c'' les deux suites:

$$b''_1, b''_2, b''_3, b''_4, b''_5, \ldots b''_n, \qquad c''_1, c''_2, c''_3, c''_4, c''_5, \ldots c''_n.$$

De cette manière on aura n systèmes de forces $(S, S_1, S_2, S_3, \ldots S_n)$ dont les n résultantes concourent en un même point $(p_1 = 0, q_1, r_1)$; c'est le centre des systèmes. Supposons maintenant que l'on recommence ces calculs avec une autre valeur de π_1 et π. On formera une seconde suite de n systèmes qui admettent encore un centre de forces, différemment placé que le premier; avec une troisième valeur π_2 de π on formera une troisième suite qui aura encore un centre particulier etc. Tous ces autres se trouvent sur la résultante primitive; ce qui est évident, et ce qui résulte aussi de l'élimination de π entre les valeurs de p_1 et q_1.

On peut encore distinguer le cas de la suite spéciale de systèmes qui repond au paramètre $\pi = 1$; alors l'axe entraîné $0x_1$ doit faire dans chacune de ses positions des angles égaux avec les deux axes fixes $(0y, 0z)$ du plan principal; on aura ici $q_1 = \frac{N}{Y+Z} = -r_1$, ce qui place le centre à l'extrêmité d'un quarré construit sur $(+y0, -z0)$. Si dans le plan principal on avait pris l'axe $0y$ parallèle à la résultante, on aurait eu $Z = 0$, et $p_1 = 0$, $q_1 = \frac{\pi . N}{Y}$, $r_1 = -\frac{N}{Y}$ et $a' + b = 0$, au lieu de (F').

§. 5. L'équation d'un plan principal quelconque qui repond à la résultante mobile, est de la forme

$$N'p_1 + M'q_1 + L'r_1,$$

ou, par la substitution des valeurs de N', M', L' en N, M', L, a et b:

$$(Np_1 + Mq_1)a + (Mp_1 - Nq_1)b + L.r_1 = 0;$$

et de là il sera facile de conclure que l'enveloppe de ce plan mobile, conservant le point fixe (0), est une surface ayant ce point pour sommet:

$$(N^2 + M^2)(p_1^2 + q_1^2) - L^2 r_1^2 = 0.$$

Pour le cas particulier de $L = 0$, on aura $p_1 = 0$, $q_1 = 0$; de sorte qu'alors le plan principal tourne autour de l'axe de rotation $(0z)$ lui-même; et c'est ce que l'on sait déjà et ce qui est évident.

Si l'on voulait avoir le lieu ou la surface sur laquelle se balance l'axe du moment principal, on emploiroit les équations

$$M'p_1 - N'q_1 = 0, \qquad L'q_1 - M'r_1 = 0,$$

ou bien celles-ci

$$(aM - bN)p_1 - (aN + bM)q_1 = 0, \qquad L.q_1 - (aM - bN)r_1 = 0;$$

on en tirerait a et b, pour les substituer dans la relation perpétuelle $a^2+b^2=1$, et l'on en tirerait le résultat suivant:

$$L^2(p_1^2+q_1^2) - (M^2+N^2)r_1^2 = 0,$$

qui est la surface conique réciproque de celle qui enveloppe les plans principaux; et ces propriétés sont vraies pour un système quelconque de forces, lors même qu'il n'admettrait pas de résultante.

Troisième partie. Nouveaux développements sur les moments et l'axe principal.

§. 1. Nous allons présenter maintenant quelques considérations, tant connues qu'inconnues encore, et qui ne sont pas sans analogie avec ce qui a été déjà exposé au commencement de la première partie.

Nommons (a, b, c) les coordonnées d'un centre de moments quelconque $(0')$, différent de l'origine des coordonnées; concevons en ce point $0'$ trois axes $(0'x', 0'y', 0'z')$, parallèles aux axes $(0x, 0y, 0z)$ de l'origine primitive, et soient N', M', L' les moments d'un système quelconque de forces, autour de ces axes respectifs; on trouvera facilement:

$$L' = L - aY + bX, \quad N' = N - bZ + c.Y, \quad M' = M - cX + aZ.$$

Soit V' le moment principal ou maximum des forces relatif au nouveau centre $(0')$; on aura donc

$$V'^2 = (L-aY+bX)^2 + (N - bZ + cY)^2 + (M-cX+aZ)^2.$$

D'après cette formule il sera aisé de déterminer le centre $(0')$ ou le lieu de ce centre pour lequel le moment principal ou maximum soit lui-même un minimum en comparaison du moment principal relatif à tout autre centre de moments; mais cette recherche, étant déjà connue dans ses résultats (*Poisson* t. I. p. 547—549), il suffira de l'indiquer sommairement. On trouvera entre a, b, c les trois trois équations de condition:

$$a(Y^2+Z^2) - bXY - c.XZ = LY - MZ,$$
$$b(X^2+Z^2) - aY.X - cY.Z = NZ - LX,$$
$$c(X^2+Y^2) - aZX - b.Y.Z = MX - NY.$$

Or en éliminant de celles-ci, deux des inconnues, la troisième disparait d'elle-même, et il en résulte à chaque fois une équation identique entre constantes. Cela prouve que l'une quelconque de ces trois équations est identique aux deux autres; de sorte que le centre cherché se trouve en un point quelconque de la ligne d'intersection des deux plans représentés par les deux premières de ces équations. En éliminant d'entr'elles et tour-à-tour chacune des trois

variables, on obtient pour les équations des projections de cette ligne d'intersection les formules suivantes déjà données par *Poisson* dans son livre profond de mécanique, et adoptées avec des notations différentes par Mr. *Schœins*:

$$(0'R')\quad b.X-a.Y=\frac{KZ}{R^2}-L,\ c.Y-b.Z=\frac{K.X}{R^2}-N,\ aZ-cX=\frac{K.Y}{R^2}-M.$$

Elles démontrent que le lieu linéaire des centres de moments, pour chacun desquels le moment principal est un *minimum* relatif, est une ligne droite parallèle à la résultante de transport des forces données. On obtient pour la valeur de ce moment principal *minimum,* ou pour ce *minimum maximorum*, $V'=K:R$; la quantité K dénotant pour abréger la combinaison connue $NX+MY+LZ$; ainsi cette valeur est constante d'un point à un autre de l'axe $(0'R')$; comme cela doit être d'après la nature de l'extrême grandeur. En outre l'axe principal relatif à chaque point de la ligne $(0'R')$, coïncide avec cette ligne même, et il est par conséquent aussi constamment parallèle à la resultante de transport R.

S'il fallait trouver le centre du moment principal maximum ou minimum parmi tous les points $(0')$ distribués sur une même surface $f(a,b,c)=0$, il faudrait dans la différentiation de la fonction V' tenir compte de la dépendance ainsi établie entre a, b, c, et l'on obtiendrait à la fois le centre du moment *maximum* et *minimum* en comparaison des moments principaux relatifs à tous les autres points de la surface proposée $f(a, b, c) = 0$.

On procéderait d'une manière semblable pour le cas où le centre $(0')$ serait assujetti à une courbe donnée. On pourrait de même rechercher celui $(0')$ des différents points d'une droite donnée, pour lequel le moment principal fût encore un minimum en comparaison des moments principaux relatifs à tous les autres points de la droite donnée.

Les valeurs L', N', M' données ci-dessus montrent aussi que le moment principal conserve une valeur fixe et invariable pour tous les points de l'espace dans le cas où les forces données ont une résultante de transport nulle. L'axe principal reste donc alors aussi parallèle à lui-même.

Soit $(0A)$ l'axe principal en (0), et tirons $(0R)$ parallèle à la résultante de transport. Le moment total des forces autour de la ligne $(0R)$ sera évidemment:

$$\sqrt{(L^2+N^2+M^2)}.\cos(0A,\hat{}0R)=(NX+MY+LZ):R=K:R,$$

en vertu de la valeur de $\cos(0A, 0R)=\frac{N}{\sqrt{(\ldots.)}}\cdot\frac{X}{R}+$ etc.

Or cette valeur exprime précisement celle du moment qui est le minimum maximorum, et lequel a lieu autour de la ligne $(0'R')$.

Concevons par l'origine un axe faisant avec les directrios coordonnées les angles (p, q, r); et par un point quelconque de l'espace $0' = (a, b, c)$ soit menée une droite parallèle à (p, q, r). Soit $\mathfrak{M}'$ le moment des forces autour de cette droite, et $\mathfrak{M}$ celui autour de la lige (p, q, r); on aura en $(0')$:

$$\mathfrak{M}' = L' \cos r + N' \cos p + M' \cos q,$$

et en substituant les valeurs de L', N', M' et tenant compte de l'équation qui donne $\mathfrak{M}$, on obtient:

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + a(Z\cos q - Y.\cos r) + b(X\cos r - Z\cos p) + c(Y\cos p - X\cos q).$$

Or en faisant coïncider la ligne (p, q, r) d'abord avec la droite $(0R)$, on voit s'anéantir les termes en a, b, c; donc, tant que $\mathfrak{M} >$ ou < 0, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ sera dans le même cas. Il est donc impossible de trouver dans l'espace aucun axe parallèle à la résultante de transport et autour duquel la somme des moments des forces puisse être égale à zéro. De plus, cette somme restera au contraire constante et égale au moindre moment principal, à cause que $\mathfrak{M}$ devient maintenant

$$L\cos R + N\cos p + M\cos q = L\cos C + \text{etc.} = (LZ + NX + MY) : R = K : R.$$

Cette circonstance explique pourquoi le moindre moment principal est possible autour de l'axe $(0'R')$, parallèle à la résultante de transport. Si l'on fait coïncider ensuite la ligne (p, q, r) avec l'axe principal lui-même en (0), la quantité $\mathfrak{M}$ devient égale au moment principal en (0), et la somme $\mathfrak{M}'$ des moments des forces autour de tout axe parallèle et passant par un point (a, b, c), deviendra:

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + a \cdot \frac{ZM - Y.L}{\mathfrak{M}} + b \cdot \frac{XL - ZN}{\mathfrak{M}} + c \cdot \frac{Y.N - XM}{\mathfrak{M}}.$$

Soient p', q', r' les angles de l'axe principal en (a, b, c); pour que ce nouvel axe (p', q', r') soit parallèle à l'axe principal primitif, il faut avoir les conditions:

$$L' : \mathfrak{M}' = L : \mathfrak{M}, \quad N' : \mathfrak{M}' = N : \mathfrak{M}, \quad M' : \mathfrak{M}' = M : \mathfrak{M}.$$

De là il est facile de conclure que le point (a, b, c) devrait être dans trois plans à la fois, passant par l'origine des coordonnées; de sorte que l'on ne saurait trouver aucun point, different de l'origine pour lequel l'axe principal reste parallèle à lui-même et à l'axe principal primitif.

§. 2. *Examen du cas de deux forces équivalentes à un système quelconque de forces données.* Continuons à considérer un système de forces général, n'admettant de résultante effective et unique. Soient $R_1, R_{,,}$ les deux forces capables du même effet; (x_1, y_1, z_1) $(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,})$ les coordonnées de leurs

points d'application, ou plutôt les coordonnées courantes d'un point quelconque de leurs lignes d'action; (X_1, Y_1, Z_1) $(X_{,,}, Y_{,,}, Z_{,,})$ les projections orthogonales de R_1, $R_{,,}$ sur les axes rectangles. Il faudra donc avoir les équations de condition:

$$(A)\quad \begin{cases} X_{,,} + X_1 = X, \quad Y_{,,} + Y_1 = Y, \quad Z_{,,} + Z_1 = Z, \\ (Y_{,,}x_{,,} - X_{,,}y_{,,}) + (Y_1x_1 - X_1y_1) = L, \\ (Z_{,,}y_{,,} - Y_{,,}z_{,,}) + (Z_1y_1 - Y_1z_1) = N, \\ (X_{,,}z_{,,} - Z_{,,}x_{,,}) + (X_1z_1 - Z_1.x_1) = M. \end{cases}$$

Ces équations en moindre nombre que celui-même des véritables inconnues distinctes, suffisent pour prouver que l'on peut remplacer d'une infinité de manières différentes un système quelconque de forces par deux forces seulement; cependant il faudra que ces deux forces satisfassent constamment à de certaines conditions fixes et invariables qu'il importe de rechercher; et tel est aussi l'objet de l'article de Monsieur *Schweins* de Heidelberg, inséré dans le troisième cahier du tome 32 du présent journal.

Si l'on pose, pour abréger, un instant:

$$L - (Y_1x_1 - X_1y_1) = L_1, \quad N - (Z_1y_1 - Y_1z_1) = N_1, \quad M - \text{etc.} = \text{etc.},$$
$$L - (Y_{,,}x_{,,} - X_{,,}y_{,,}) = L_{,,}, \quad N - (Z_{,,}y_{,,} - Y_{,,}z_{,,}) = N_{,,}, \quad M - \text{etc.} = \text{etc.},$$

on déduîra des trois dernières équations (A), et à l'imitation de ce qui se pratique déjà pour le cas d'une résultante, les deux égalités suivantes:

$$L_1Z'' - N_1X_{,,} + M_1Y_{,,} = 0, \qquad L_{,,}Z_1 + N_{,,}X_1 + M_{,,}Y_1 = 0.$$

Celles-ci qui sont la première linéaire par rapport aux quantités (x_1, y_1, z_1) et la seconde par rapport à celles $(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,})$, expriment par conséquent deux surfaces planes dans lesquelles se trouvent les lignes d'action des deux forces R_1, $R_{,,}$. On peut aisément les mettre sous la forme suivante ($R'.R''$ marquant un produit de deux lignes arbitraires, dont on déterminera la valeur plus loin):

$$(I)\quad \frac{Z_{,,}Y_1 - Z_1Y_{,,}}{R'R''}.x_1 + \frac{X_{,,}Z_1 - X_1Z_{,,}}{R'.R''}.y_1 + \frac{Y_{,,}X_1 - Y_1X_{,,}}{R'R''}.z_1 = \frac{LZ_{,,} + NX_{,,} + MY_{,,}}{R'R''},$$

$$(II)\quad \frac{Z_{,,}Y_1 - Z_1Y_{,,}}{R'R''}x_{,,} + \frac{X_{,,}Z_1 - X_1Z_{,,}}{R'R''}.y_{,,} + \frac{Y_{,,}X_1 - Y_1.X_{,,}}{R'R''}z_{,,} = \frac{LZ_1 + MY_1 + NX_1}{R'R''},$$

et l'on voit par là que les deux plans (I, II) sont parallèles.

Soient (λ, μ, ν) les angles avec les axes coordonnés de la perpendiculaire indéfinie tirée de l'origine sur ces plans; cette droite croisera donc chaque ligne d'action R_1, $R_{,,}$ sous un angle droit, et la portion de cette droite comprise entre les deux plans parallèles sera égale et parallèle à la plus courte

distance Δ entre les deux lignes d'action. Mais d'après les équations (I. et II.) les distances de l'origine aux plans qu'elles expriment respectivement, sont:

$$\frac{LZ_{,,}+NX_{,,}+MY_{,,}}{R'R''} \quad \text{et} \quad \frac{LZ_1+NX_1+MY_1}{R'R''},$$

et celles-ci donnent immédiatement pour Δ qui doit équivaloir à leur différence:

$$\Delta = \frac{LZ+NX+MY}{R'R''} = \frac{K}{R'R''} \quad \text{et} \quad K = \Delta . R' . R''.$$

Or toutes les fois que les deux forces se coupent, les plans (I., II.) doivent se confondre en un seul, et il faut avoir $\Delta = 0$, partant $K = 0$; mais quand les deux plans se confondent, sans que les forces se coupent, celles-ci sont nécessairement parallèles, et l'équation $K = 0$ est satisfaite sans qu'on puisse assurer que la résultante des deux forces équivalentes ou du système de forces données ait lieu; car pour être en droit d'affirmer cela, il faudrait avoir prouvé au préalable, ce qui n'est généralement pas, que deux forces parallèles ont o ujours une résultante. Il est donc ainsi prouvé suffisamment que l'existence d'une résultante entraîne la condition $K = 0$, mais que cette équation de condition n'entraîne pas nécessairement la condition d'existence d'une résultante. Mais dès qu'on veut une fois admettre, conformément à la loi de continuité et à l'esprit de l'analyse, que deux forces parallèles, égales et contraires, ont une résultante infiniment petite, pourvue d'un bras de levier infini, la conclusion réciproque est permise, parcequ'alors deux forces parallèles ont toujours une résultante. D'ailleurs nous ne donnons pas cette remarque comme nouvelle, mais comme une conséquence naturelle et frappante de l'équation: $\Delta . R_1 . R_{,,} = K$; car *Poisson* a déjà présenté la même remarque, en prenant toutefois un point de départ différent.

En faisant observer maintenant que l'équation du plan (I.) qui a une direction (λ, μ, ν) pour normale, peut par suite être mise sous la forme

$$\cos\lambda . x_1 + \cos\mu . y_1 + \cos\nu . z_1 = (LZ_{,,}+NX_{,,}+MY_{,,}) : R' . R'',$$

on obtient immédiatement pour (λ, μ, ν) les formules:

$$\cos\lambda = (Z_{,,}Y_1 - Z_1Y_{,,}) : R' . R'' = (ZY_1 - Z_1Y) : R' . R'',$$
$$\cos\mu = (X_{,,}Z_1 - Z_{,,}X_1) : R' . R'' = (XZ_1 - ZX_{,,}) : R' . R'',$$
$$\cos\nu = (Y_{,,}X_1 - Y_1X_{,,}) : R' . R'' = (Y . X_1 - XY_1) : R' . R'';$$

de là on conclut la valeur de R', R'' par l'équation

$$R'^2R''^2 = (ZY_1 - Z_1Y)^2 + (XZ_1 - X_1Z)^2 + (Y . X_1 - XY_1)^2;$$

on a ensuite pour l'angle compris en Δ et R:

$$\cos(\Delta, R) = \cos\lambda . \cos A + \cos\mu . \cos B + \cos\nu . \cos C.$$

Substituant les valeurs précédentes de λ, μ, ν, on en déduit:

$$\cos(\Delta\hat{,}R) = 0, \quad \text{et} \quad (\Delta\hat{,}R) = 90^0;$$

ainsi la direction de la plus courte distance entre les lignes d'action R_1, R'' doit croiser à angle droit la résultante de transport des forces données. Il faut donc aussi toujours disposer les lignes des forces R_1, $R_{,,}$ de manière que cette condition soit constamment observée.

Considérons maintenant la plus courte distance dans sa vraie position, et soient (a',b',c') les coordonnées de son point de rencontre avec R_1; (a'',b'',c'') celles de sa rencontre avec $R_{,,}$; on obtiendra:

$$a'' - a' = \Delta \cos\lambda, \quad b'' - b' = \Delta \cos\mu, \quad c'' - c' = \Delta \cos\nu,$$

de sorte que quand on connaît ou qu'on donne les trois quantités a', b', c', et celle R_1 ou $R_{,,}$, on pourra calculer celles (a'', b'', c'').

§. 3. Cela posé, menons suivant la droite Δ sur laquelle se mesure la plus courte distance Δ, prise dans sa vraie position, un plan parallèle à la résultante de transport ou à l'axe $(0'R')$ du moindre moment principal; et suivant $(0'R')$ menons un plan (P') parallèle à la ligne de Δ: en dénotant par (λ', μ', ν') les angles de la normale Δ' à ces deux plans, avec les directrices coordonnées, nous aurons pour les équations de ces plans nouveaux:

$$(P) \qquad a' \cos\lambda' + b' \cos\mu' + c' \cos\nu' = D',$$
$$(P') \qquad a \cos\lambda' + b \cos\mu' + c \cos\nu' = D'';$$

car (P) doit passer par le point spécial (a', b', c'), pied de Δ avec R_1; D', D'' designent les distances de l'origine aux deux plans parallèles. Dans (P'') (a,b,c) n'expriment pas seulement les coordonnées courantes; on peut admettre aussi que ce sont les coordonnées, du pied de la normale commune Δ' aux deux plans, élevée en un point désigné ou arbitraire de la ligne $(0'R')$. Il est d'ailleurs évident que Δ', la plus courte distance entre les deux lignes $(0'R')$ et Δ, doit être égale à l'excès $D' - D''$; elle serait donc connue si on connaissait encore (λ', μ', ν'); car sauf ce que (a, b, c) renferment d'arbitraire, ils peuvent être calculés; mais Δ' étant à la fois normal à Δ et à $U'R'$, ces trois lignes rentrent (quant à leurs directions) dans le cas de trois axes rectangulaires, et l'on aura en conséquence:

$$\cos\lambda' = \cos\mu \cdot \frac{Z}{R} - \cos\nu \cdot \frac{Y}{R}, \quad \cos\mu' = \cos\nu \cdot \frac{X}{R} - \cos\lambda \cdot \frac{Z}{R},$$
$$\cos\nu' = \cos\lambda \cdot \frac{Y}{R} - \cos\mu \cdot \frac{X}{R}.$$

Ces valeurs substituées dans (P, P') donnent:

$$R.D' = \cos\lambda(c'Y-b'X) + \cos\mu(a'Z-c'X) + \cos\nu(b'X-a'Y),$$
$$R.D'' = \cos\lambda(cY-b.Z) + \cos\mu(aZ-cX) + \cos\nu(bX-aY).$$

En substituant dans cette dernière formule les valeurs des combinaisons $cY-bZ$, $aZ-cX$, $bX-aY$, fournies par les équations $(0'R')$, et observant toujours la condition de la normalité de Δ avec $(0'R')$, on obtient la valeur très simple:

$$R.D'' = -(N\cos\lambda + M\cos\mu + L\cos\nu),$$

d'où $R(D'-D'')$ ou

$$R.\Delta' = (N+c'Y-b'Z)\cos\lambda+(M+a'Z-c'X)\cos\mu+(L+b'X-a'Y)\cos\nu.$$

Or il est manifeste par les valeurs de L', N', M' exposées au §. 1. que le second membre de la dernière équation exprime le moment total des forces proposées autour d'un axe, passant par (a', b', c') et faisant avec les axes coordonnés les angles (λ, μ, ν), c'est-à-dire autour de l'axe même de la vraie plus courte distance Δ; mais la somme des moments des deux forces R_1, $R_{,,}$ autour de cet axe est identiquement nulle, puisque chaque ligne d'action coupe Δ. Donc il en est nécessairement de même du moment total des forces proposées autour de Δ, et il faut qu'on ait par conséquent:

$$\Delta' = 0,$$

ce qui prouve, conformément au théorème de Mr. *Schœins*, que la plus courte distance entre les lignes d'action de deux forces équivalentes à un système de forces données coupe à angle droit l'axe du moindre moment principal.

Vérifions aussi ce résultat par le calcul. En remplaçant les quantités $(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,})$ (x_1, y_1, z_1) par (a'', b'', c''), (a', b', c'), ce qui est toujours permis, dans le cas d'un assemblage rigide, et substituant à $X_{,,}$, $Y_{,,}$, $Z_{,,}$ leurs valeurs en $(X, X_1, \ldots$ etc.) dans les équations (A) du §. 2., on obtient:

$$N + c'Y - b'Z = \Delta.\cos\mu.(Z-Z_1) - \Delta.\cos\nu\,(Y-Y_1),$$
$$M + a'Z - c'X = \Delta.\cos\nu.(X-X_1) - \Delta.\cos\lambda\,(Z-Z_1),$$
$$L + b'X - a'Y = \Delta.\cos\lambda\,(Y-Y_1) - \Delta.\cos\mu.(X-X_1).$$

Multipliant la première formule par $\cos\lambda$, la seconde par $\cos\mu$, la troisième par $\cos\nu$, on obtient pour la somme des trois premiers membres de ces égalités une valeur identiquement nulle, conformément à ce qui doit arriver d'après la nature mécanique de la question. Mais remarquons qu'il ne serait pas même difficile de retrouver sans calcul cette propriété de la plus courte distance de couper l'axe $(0'R')$ sous un angle droit.

En effet, tout plan perpendiculaire en un point quelconque (0′) à l'axe (0′R') est le plan principal en ce point; de sorte que le moment des forces autour d'un axe quelconque coupant la ligne (0′R') sous un angle droit, est nul; mais il ne saurait être nul autour d'un axe différent, croisant seulement l'axe (0′R') à angle droit. De plus, le moment des forces autour de la ligne Δ doit être manifestement nul: l'axe de la ligne Δ doit donc croiser et couper à la fois à angle droit la ligne (0′R'), c. q. f. d. Examinons en dernier lieu le moyen de calculer les coordonnées du point d'intersection de la ligne de Δ avec l'axe (0′R'). A cet effet il faut substituer dans (P′) la valeur de D'' déjà donnée plus haut, et les valeurs de b, c en fonction a données par les équations (0′R'). En posant dans celles-ci pour abréger:

$$\frac{KZ}{R^2} - L = \beta_1, \quad \frac{KY}{R^2} - M = \gamma_1, \quad L\cos\lambda + M\cos\mu + N\cos\nu = \mathfrak{N},$$

on obtient pour déterminer a, et parsuite b, c, la condition:

$$a(X.R\cos\lambda' + Y.R\cos\mu' + Z.R\cos\nu') + \mathfrak{N}.X + \beta_1 R\cos\mu' - \gamma_1 R\cos\nu' = 0.$$

Or en vertu des valeurs de cos λ', cos μ', cos ν' déjà établies, le coëfficient de a est nul, de sorte que cette équation laisse indéterminées non seulement les valeurs mais l'expression analytique même des quantités a, b, c, et qu'il faut avoir en outre l'équation de condition

$$\mathfrak{N}.X + \beta_1 R_1\cos\mu' - \gamma_1.R\cos\nu' = 0,$$

et il est facile de vérifier que celle-ci est encore une fois identique, en admettant que 0′R' et Δ sont à angle droit.

Ce qui vient d'être dit nous met à même de construire pour ainsi dire géométriquement chaque couple de forces, équivalentes à un système quelconque de forces données. En effet, donnons à volonté l'intensité et la direction de l'une R_1 de ces deux forces, mais avec la restriction de $R_1 >$ ou $< R$, ou de $R_1 = R$, mais d'une autre direction que R; on connaîtra donc aussi X_1, Y_1, Z_1, et parsuite à l'aide des égalités (A) l'intensité et la direction de $R_{,,}$. Cela posé: comme le point d'intersection de Δ avec (0′R') est resté arbitraire, et qu'il est même indéterminé quant à son expression analytique, tirons par un point quelconque de (0′R') une normale à l'axe (0′R') et faisons la tourner autour de lui jusqu'à ce qu'elle fasse avec les trois axes coordonnés les angles λ, μ, ν fournis par les équations

$$\cos\lambda = (ZY_1 - Z_1Y) : R'R'', \quad \cos\mu = \ldots., \quad \cos\nu = \ldots. \text{ etc.}$$

A un point quelconque (a', b', c'), pris sur cette normale indéfinie, appliquons

la force R_1 suivant une direction parallèle à celle qui est donnée; calculons ensuite Δ par l'équation

$$\Delta = K : R'R'' = \frac{LZ+NX+MY}{\sqrt{((ZY_1-Z_1Y)^2+(XZ_1-X_1Z)^2+YX_1-Y_1X)^2)}} ;$$

à la seconde extrêmité (a'', b'', c'') de Δ ainsi calculé, appliquons la force $R_{,,}$ déjà connue d'intensité et de direction, et nous aurons ainsi un premier couple de forces équivalentes. On peut construire ainsi tous les couples en nombre infini, capables chacun de remplacer l'ensemble des forces proposées. En se donnant ainsi R_1 en intensité et en direction, on voit que la distance Δ résulte de ces données. Les éléments qui restent encore arbitraires sont le point de départ ou d'intersection de Δ avec $0'R'$, et la position du point d'application de l'une des deux forces sur la ligne de Δ; mais la condition perpétuelle qu'il faut observer chaque fois, est celle qui exige que Δ parte d'un point quelconque même de l'axe $(0'R')$ et sous un angle droit.

Bruxelles ce 5 Octobre 1846.

19.

Anwendung der bestimmten Integrale zur Reihensummirung; nebst Bemerkungen über die unendlichen Reihen und die bestimmten Integrale überhaupt.

(Von Herrn *J. Dienger*, Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 17. 38ten Bandes.)

§. 3.

Durch dieselben Umformungen wie in (§. 2.) erhält man

$$1. \qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2r} x\,dx = \frac{(2r-1)(2r-3)....1}{2r.(2r-2)....2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{(2r-1)(2r-3)....1}{2r.(2r-2)....2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi,$$

woraus sich, im Vorbeigehen gesagt,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2r} x \sin^{2r+1} y\,dx\,dy = \frac{1}{2r+1} \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

ergiebt. Es ist aber

$$\sin^{2r} x = \frac{(-1)^r}{2^{2r-1}} [\cos 2rx - 2r \cos(2r-2)x + \frac{(2r.2r-1)}{1.2} \cos(2r-4)x - ....$$

$$.... (-1)^r \frac{2r(2r-1)....(r+1)}{1.2....r} \cdot \tfrac{1}{2}],$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2r} x dx = \frac{(-1)^{2r}}{2^{2r}} \cdot \frac{2r.(2r-1)....(r+1)}{1.2....r} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (1.), so ergiebt sich die Relation

$$\frac{2r.(2r-1)....(r+1)}{1.2....r} = \frac{(2r-1)(2r-3)....1}{2r.(2.r-2)....3} \cdot 2^{2r}, \quad \text{oder}$$

$$2. \qquad 2r.(2r-1) .... (r+1) = (2r-1)(2r-3) .... 1.2^r.$$

Für $r = 2n$ ist

$$3. \qquad 4^n = \frac{4n.(4n-2)....(2n+2)}{(2n-1)(2n-3)....1}.$$

§. 4.

Bekanntlich ist

$$\int e^{-mx} \cos nx dx = \frac{-m\cos nx + n\sin nx}{m^2+n^2} \cdot e^{-mx}, \quad \text{also ist}$$

$$1. \qquad \int_0^\infty e^{-mx} \cos nx dx = \frac{m}{m^2+n^2} .$$

Ferner ist

$$\int e^{-mx} \sin^n x dx = -\frac{e^{-mx}\sin^{n-1}x(m\sin x+n\cos x)}{m^2+n^2} + \frac{n.(n-1)}{m^2+n^2}\int e^{-mx}\sin^{n-2}x dx;$$

also ist für $n > 1$

$$\int_0^\infty e^{-mx}\sin^n x dx = \frac{n.(n-1)}{m^2+n^2}\int_0^\infty e^{-mx}\sin^{n-2}x dx,$$

und für $n = 1$:

$$2. \qquad \int_0^\infty e^{-mx}\sin x dx = \frac{1}{m^2+1^2} .$$

Demnach ist

$$3. \qquad \int_0^\infty e^{-mx}\sin^{2r} x dx = \frac{2r.(2r-1)}{m^2+(2r)^2}\cdot\frac{(2r-2)(2r-3)}{m^2+(2r-2)^2}\cdots\frac{2.1}{m^2+2^2}\int_0^\infty e^{-mx}dx$$
$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{2r(2r-1)}{m^2+(2r)^2}\cdot\frac{(2r-2)(2r-3)}{m^2+(2r-2)^2}\cdots\frac{2.1}{m^2+2^2},$$

$$4. \qquad \int_0^\infty e^{-mx}\sin^{2r+1} x dx = \frac{(2r+1)2r}{m^2+(2r+1)^2}\cdot\frac{(2r-1)(2r-2)}{m^2+(2r-1)^3}\cdots\frac{2.3}{m^2+3^2}\cdot\frac{1}{m^2+1^2} .$$

Wie oben findet sich auch

$$5. \qquad \int_0^\infty e^{-mx}\sin nx dx = \frac{n}{m^2+n^2} .$$

Nun ist allgemein

$$\sin^{2r} x = \frac{(-1)^r}{2^{2r-1}}\left[\cos 2rx - \frac{2r}{1}\cos(2r-2)x + \frac{2r.(2r-1)}{1.2}\cos(2r-4)x - \cdots\right.$$
$$\left.\cdots (-1)^{r-1}\frac{2r.(2r-1)....(r+2)}{1.2....r-1}\cos 2x + (-1)^r\frac{2r.(2r-1)....(r+1)}{1.2....r}\cdot\tfrac{1}{2}\right],$$

$$\sin^{2r+1} x = \frac{(-1)^r}{2^{2r}}\left[\sin(2r+1)x - \frac{2r+1}{1}.\sin(2r-1)x + \cdots (-1)^r\frac{(2r+1)2r....(r+2)}{1.2....r}\sin x\right],$$

folglich, mit Rücksicht auf die Formeln (1.) und (3.):

$$\int_0^\infty e^{-mx}\sin^{2r} x dx = \frac{(-1)^r}{2^{2r-1}}\left[\frac{m}{m^2+(2r)^2} - \frac{2r}{1}\cdot\frac{m^2+(2r-2)^2}{m} + \cdots (-1)^r\frac{2r....(r+1)}{1.2....r}\cdot\frac{1}{2m}\right].$$

$$\int_0^\infty e^{-mx}\sin^{2r+1} x dx = \frac{(-1)^r}{2^{2r}}\left[\frac{2r+1}{m^2+(2r+1)^2} - \frac{2r+1}{1}\cdot\frac{2r-1}{m^2+(2r-1)^2} + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots (-1)^r\frac{(2r+1)2r....(r+2)}{1.2....r}\frac{1}{m^2+1}\right].$$

Vergleicht man diese beiden Resultate mit (3.) und (4.), so ergiebt sich

$$6. \qquad \frac{1}{m^2+(2r)^2} - \frac{2r}{1}\cdot\frac{1}{m^2+(2r-2)} + \frac{2r(2r-1)}{1.2}\frac{1}{m^2+(2r-4)^2} - \cdots$$
$$\cdots (-1)^r\frac{2r.(2r-1)....(r+1)}{1.2....r}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^2} = (-1)^r\cdot\frac{2r(2r-1)....2.1}{(m^2+(2r)^2)(m^2+(2r-2)^2)....(m^2+2^2)m^2}\cdot 2^{2r-1}$$

für ein ganzzahliges $r > 0$ und $m > 0$, und

$$7. \quad \frac{2r+1}{m^2+(2r+1)^2} - \frac{2r-1}{1}\frac{2r-1}{m^2+(2r-1)^2} + \ldots. (-1)^r \cdot \frac{(2r+1)2r\ldots.(r+2)}{1.2\ldots.r}\frac{1}{m^2+1}$$
$$= (-1)^r \frac{(2r+1).2r\ldots.2.1}{(m^2+(2r+1)^2)(m^2+(2r-1)^2)\ldots.(m^2+3^2)(n^2+1)} \cdot 2^{2r}$$

für ein ganzzahliges $r \gtreqless 0$ und für $m > 0$.

§. 5.

Es ist allgemein

$$\int e^{-mx} \cos^n x dx = \frac{e^{-mx}\cos^{n-1}x(n\sin x - m\cos x)}{m^2+n^2} + \frac{n.(n-1)}{m^2+n^2}\int e^{-mx}\cos^{n-2}x dx,$$

also für $m > 0$ und $n > 1$:

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos^n x dx = \frac{m}{m^2+n^2} + \frac{n.(n-1)}{m^2+n^2}\int_0^\infty e^{-mx}\cos^{n-2}x dx,$$

und für $n = 1$:

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos x\, dx = \frac{m}{m^2+1}.$$

Hieraus folgt

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos^{2r}x dx$$
$$= \frac{1.2\ldots.2r}{m(m^2+2^2)(m^2+4^2)\ldots.(m^2+(2r)^2)}\left[1 + \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^2(m^2+2^2)}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{m^2(m^2+2^2)\ldots.(m^2+(2r-2)^2)}{1.2\ldots.2r}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos^{2r+1}x dx$$
$$= \frac{1.2\ldots.(2r+1)}{m(m^2+1)(m^2+3^2)\ldots.(m^2+(2r+1)^2)}\left[\frac{m^2}{1} + \frac{m^2(m^2+1)}{1.2.3} + \ldots + \frac{m^2(m^2+1^2)\ldots.(m^2+(2r-1)^2)}{1.2\ldots.(2r+1)}\right].$$

Entwickelt man dies nach den bekannten Formeln in Reihen, integrirt und vergleicht die Resultate, so ergiebt sich

$$1. \quad \frac{1.2.3\ldots.2r.2^{2r-1}}{m^2(m^2+2^2)\ldots.(m^2+(2r)^2)}\left[1 + \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^2(m^2+2^2)}{1\ldots.4} + \ldots + \frac{m^2(m^2+2^2)(m^2+4^2)\ldots.(m^2+(2r-1)^2)}{1.2\ldots.2r}\right]$$
$$= \frac{1}{m^2+(2r)^2} + \frac{2r}{1}\cdot\frac{1}{m^2+(2r-2)^2} + \frac{2r.(2r-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2+(2r-4)^2} + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{2r.(2r-1)\ldots.(r+1)}{1.2\ldots.r}\cdot\frac{1}{m^2}$$

für ein ganzzahliges $r > 0$ und für $m > 0$, und

$$2. \quad \frac{(2r+1)2r\ldots.2.1.2^{2r}}{(m^2+1^2)(m^2+3^2)\ldots.(m^2+(2r+1)^2)}\left[1 + \frac{m^2+1^2}{1.2.3} + \frac{(m^2+1^2)(m^2+3^2)}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{(m^2+1)\ldots.(m^2+(2r-1)^2)}{1.2\ldots.2r+1}\right]$$
$$= \frac{1}{m^2(2r+1)^2} + \frac{2r+1}{1}\cdot\frac{1}{m^2+(2r-1)^2} + \ldots + \frac{(2r+1)2r\ldots.(r+2)}{1.2\ldots.r}\cdot\frac{1}{m^2+1}$$

für ein ganzzahliges $r > 0$ und für $m < 0$.

§. 6.

Setzt man

$$a^2 + b^2 = r^2, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

und r bloss positiv, so ist bekanntlich

$$l(a+bi) = \tfrac{1}{2}l(r^2) + \varphi i,$$

wenn man den einfachsten Werth nimmt; was hier nothwendig ist, indem entsprechende Reihen angewendet werden sollen, deren Summen immer den einfachsten Werthen imaginärer Formen gleich sind.

Es ist also

$$l[1-2e^{\delta i}\cos\alpha + e^{2\delta i}] = l[1-2\cos\alpha\cos\delta+\cos 2\delta+(\sin 2\delta - 2\cos\alpha\sin\delta)i]$$
$$= \tfrac{1}{2}l(r^2) + \varphi i.$$

Nun ist hier

$$r^2 = (1-2\cos\alpha\cos\delta+\cos 2\delta)^2 + (\sin 2\delta - 2\cos\alpha\sin\delta)^2 = 4(\cos\alpha-\cos\delta)^2,$$
$$r = \pm 2(\cos\alpha-\cos\delta), \quad \text{je nachdem} \quad \cos\alpha \gtrless \cos\delta,$$

$$\cos\varphi = \frac{1-2\cos\alpha\cos\delta+\cos 2\delta}{2\sqrt{(\cos\alpha-\cos\delta)^2}} = \cos\delta\cdot\frac{\cos\delta-\cos\alpha}{\sqrt{(\cos\alpha-\cos\delta)^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin 2\delta - 2\cos\alpha\sin\delta}{2\sqrt{(\cos\alpha-\cos\delta)^2}} = \sin\delta\,\frac{\cos\delta-\cos\alpha}{\sqrt{(\cos\alpha-\cos\delta)^2}}.$$

Ist jetzt $\cos\alpha - \cos\delta < 0$, also $\cos\delta - \cos\alpha > 0$, was künftig angenommen werden soll, so ist offenbar

$$\varphi = \delta.$$

Demnach ist unter dieser Voraussetzung

$$l[1-2e^{-\delta i}\cos\alpha+e^{2\delta i}] = l[2(\cos\delta-\cos\alpha)] + \delta i;$$

desgleichen ergiebt sich

$$l[1-2e^{-\delta i}\cos\alpha+e^{-2\delta i}] = l[2(\cos\delta-\cos\alpha)] - \delta i.$$

Betrachtet man diese Beziehungen, so findet sich für ein gerades (ganzes) n:

$$\cos\frac{\pi}{n}l[1-2e^{\delta i}\cos\frac{\pi}{n}+e^{2\delta i}] + \cos\frac{3\pi}{n}l[1-2e^{\delta i}\cos\frac{3\pi}{n}+e^{2\delta i}] + \ldots.$$
$$\ldots. + \cos\frac{n-1}{n}\pi\,l[1-2e^{\delta i}\cos\frac{n-1}{n}\pi+e^{2\delta i}]$$
$$= \cos\frac{\pi}{n}l[2(\cos\delta-\cos\frac{\pi}{n}) + \cos\frac{3\pi}{n}l[2(\cos\delta-\cos\frac{3\pi}{n})] + \ldots.$$
$$\ldots. + \cos\frac{n-1}{n}\pi\,l[2(\cos\delta-\cos\frac{n-1}{n}\pi)] + \delta i[\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\ldots.+\cos\frac{n-1}{n}\pi],$$

vorausgesetzt, dass $\cos\delta - \frac{\pi}{n} > 0$, $\cos\delta - \frac{3\pi}{n} > 0$, $\ldots.$ $\cos\delta - \cos\frac{n-1}{n}\pi > 0$ ist, d. h. dass

$$\delta^2 < \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \quad \text{ist.}$$

Nun ist für ein ganzzahliges gerades n:

$$\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \cos\frac{5\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{n-1}{n}\pi = 0:$$

daher ist die obige Summe gleich

$$l\left[\left(\cos\delta - \cos\frac{\pi}{n}\right)^{\cos\frac{\pi}{n}}\left(\cos\delta - \cos\frac{3\pi}{n}\right)^{\cos\frac{3\pi}{n}} \ldots \left(\cos\delta - \cos\frac{n-1}{n}\pi\right)^{\cos\frac{n-1}{n}\pi}\right].$$

Die gleiche Formel gilt auch für ein negatives δ, wenn nur immer

$$\delta^2 < \left(\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

und n eine gerade Zahl > 0 ist.

Ferner hat man

$$\text{arc}\,(\text{tg} = a + bi) = \tfrac{1}{2}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{2a}{1-a^2-b^2}\right) + \frac{i}{4}\,l\left(\frac{(i+b)^2+a^2}{(1-b)^2+a^2}\right),$$

wenn man wieder den einfachsten Werth nimmt. Demnach ist

$$\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{e^{\delta i}\sin\alpha}{1-e^{\delta i}\cos\alpha}\right) = \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\cos\delta\sin\alpha + i\sin\delta\sin\alpha}{1-\cos\delta\cos\alpha - i\sin\delta\cos\alpha}\right)$$

$$= \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{(\cos\delta-\cos\alpha)\sin\alpha}{1-2\cos\delta\cos\alpha+\cos^2\alpha} + \frac{i\sin\delta\sin\alpha}{1-2\cos\delta\cos\alpha+\cos^2\alpha}\right)$$

$$\tfrac{1}{2}\,\text{arc}\,(\text{tg} = -\,\text{tg}\,\alpha) + \frac{i}{4}\,l\left(\frac{1-\cos(\alpha+\delta)}{1-\cos(\alpha-\delta)}\right).$$

Ist nun $\delta < \alpha$, so ergiebt sich

$$\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{e^{\delta i}\sin\alpha}{1-e^{\delta i}\cos\alpha}\right) = \tfrac{1}{2}(\pi-\alpha) + \frac{i}{4}\,l\left(\frac{1-\cos(\alpha+\delta)}{1-\cos(\alpha-\delta)}\right),$$

indem für $\delta = 0$,

$$\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = \text{arc}\,(\text{tg} = \text{cotg}\,\tfrac{1}{2}\alpha) = \tfrac{1}{2}(\pi-\alpha)$$

sein muss. Desgleichen findet sich

$$\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{e^{-\delta i}\sin\alpha}{1-e^{-\delta i}\cos\alpha}\right) = \tfrac{1}{2}(\pi-\alpha) + \frac{i}{4}\,l\left(\frac{1-\cos(\alpha-\delta)}{1-\cos(\alpha+\delta)}\right);$$

also erhält man für ein ganzzahliges gerades $n > 0$:

$$\sin\frac{\pi}{n}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{e^{\delta i}\sin\frac{\pi}{n}}{1-e^{\delta i}\cos\frac{\pi}{n}}\right)+\sin\frac{3\pi}{n}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{e^{\delta i}\sin\frac{3\pi}{n}}{1-e^{\delta i}\cos\frac{3\pi}{n}}\right)+\ldots.$$

$$\ldots.+\sin\frac{n-1}{n}\pi\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{e^{\delta i}\sin\frac{n-1}{n}\pi}{1-e^{\delta i}\cos\frac{n-1}{n}\pi}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots.+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right]$$

$$-\frac{\pi}{2n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+3\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots.+(n-1)\sin\frac{n-1}{n}\pi\right]$$

$$+\frac{i}{4}l\left[\left(\frac{1-\cos\left(\delta+\frac{\pi}{n}\right)}{1-\cos\left(\delta-\frac{\pi}{n}\right)}\right)^{\sin\frac{\pi}{n}}\left(\frac{1-\cos\left(\delta+\frac{3\pi}{n}\right)}{1-\cos\left(\delta-\frac{3\pi}{n}\right)}\right)^{\sin\frac{3\pi}{n}}\ldots.\left(\frac{1-\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{n-1}{n}\pi}\right].$$

Nun ist aber

$$\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots.+\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$\sin\frac{\pi}{n}+3\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots.+(n-1)\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

also ist die obige Summe gleich

$$\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{n}}+\frac{i}{4}l\left[\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{\pi}{n}}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{3\pi}{n}+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{3\pi}{n}-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{3\pi}{n}}\ldots.\right.$$

$$\left.\ldots.\left(\frac{1-\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{n-1}{n}\pi}\right],$$

für $\delta^2<\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$.

§. 7.

Ist n eine ganze gerade Zahl >0, so ist bekanntlich

$$\int_0^1\frac{e^{\delta i}dx}{1+e^{n\delta i}x^n}=-\frac{1}{n}\Sigma\cos\frac{r\pi}{n}l(1-2e^{\delta i}\cos\frac{r\pi}{n}+e^{2\delta i})$$

$$+\frac{2}{n}\Sigma\sin\frac{r\pi}{n}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{e^{\delta i}\sin\frac{r\pi}{n}}{1-e^{\delta i}\cos\frac{r\pi}{n}}\right);$$

wo das Summirungszeichen sich auf alle ungeraden ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$ einschliesslich erstreckt.

Beachtet man nun die Formeln in (§. 6.), so ergiebt sich

$$\int_0^1 \frac{e^{\delta i}dx}{1+e^{n\delta i}x^n} = -\frac{1}{n}\Sigma l\left[\left(\cos\delta - \cos\frac{r\pi}{n}\right)^{\cos\frac{r\pi}{n}}\right] + \frac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$+ \frac{i}{2n}\Sigma l\left[\left(\frac{1-\cos(\frac{r\pi}{n}+\delta)}{1-\cos(\frac{r\pi}{n}-\delta)}\right)^{\sin\frac{r\pi}{n}}\right]$$

Demnach ist

$$\int_0^1 \left(\frac{e^{\delta i}}{1+e^{n\delta i}x^n} + \frac{e^{-\delta i}}{1+e^{-n\delta i}x^n}\right)dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{2}{n}\Sigma l\left(\cos\delta - \cos\frac{r\pi}{n}\right)^{\cos\frac{r\pi}{n}}.$$

Nun ist

$$\frac{e^{\delta i}}{1+e^{n\delta i}x^n} + \frac{e^{-\delta i}}{1+e^{-n\delta i}x^n} = e^{\delta i} - e^{(n+1)\delta i}x^n + e^{(2n+1)\delta i}x^{2n} - \ldots.$$
$$+ e^{-\delta i} - e^{-(n+1)\delta i}x^n + e^{-(2n+1)\delta i}x^{2n} - \ldots.$$

(von $x=0$ bis $x=1$, wenn $\delta^2 < (\frac{\pi}{n})^2$)

$$= 2(\cos\delta - \cos(n+1)\delta x^n + \cos(2n+1)\delta x^{2n} - \ldots.) \quad \text{und}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{e^{\delta i}}{1+e^{n\delta i}x^n} + \frac{e^{-\delta i}}{1+e^{-n\delta i}x^n}\right)dx$$

$$= 2\left[\cos\delta - \frac{1}{n+1}\cos(n+1)\delta + \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\delta - \ldots.\right].$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem frühern, so erhält man

$$1.\quad \cos\delta - \frac{1}{n+1}\cos(n+1)\delta + \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\delta - \frac{1}{3n+1}\cos(3n+1)\delta + \ldots.$$

$$= \frac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{1}{n}\Sigma l\left(\cos\delta - \cos\frac{r\pi}{n}\right)^{\cos\frac{r\pi}{n}},$$

wo n eine gerade Zahl >0 und $\delta^2 < \left(\frac{\pi}{n}\right)^2$ ist. Das Zeichen Σ erstreckt sich auf alle ungeraden Werthe von r, von $r=1$ bis $r=n-1$ einschliesslich.

Ganz eben so ergiebt sich aus dem Werthe von

$$\int_0^1 \left(\frac{e^{\delta i}}{1+e^{n\delta i}x^n} - \frac{e^{-\delta i}}{1+e^{-n\delta i}x^n}\right)dx:$$

2. $$\sin\delta - \frac{1}{n+1}\sin(n+1)\delta + \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\delta - \frac{1}{3n+1}\sin(3n+1)\delta + \ldots.$$
$$= \frac{1}{2n}\Sigma l\left(\frac{1-\cos\left(\frac{r\pi}{n}+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{r\pi}{n}-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{r\pi}{n}};$$

was unter den gleichen Bedingungen gültig ist, wie die Gleichung (1.).

§. 8.

Ist n eine ganze ungerade Zahl > 0, so ist

$$\int_0^1 \frac{e^{\delta i}dx}{1+e^{n\delta i}x^n} = \frac{1}{n}l(1+e^{\delta i})$$
$$- \frac{1}{n}\Sigma\cos\frac{r\pi}{n}l(1-2e^{\delta i}\cos\frac{r\pi}{n}+e^{2\delta i})$$
$$+ \frac{2}{n}\Sigma\sin\frac{r\pi}{n}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{e^{\delta i}\sin\frac{r\pi}{n}}{1-e^{\delta i}\cos\frac{r\pi}{n}}\right);$$

wo sich das Summirungszeichen auf alle ungraden Werthe von r, von $r=1$ bis mit $r=n-2$ erstreckt.

Nun findet sich

$$\frac{1}{n}l(1+e^{\delta i}) = \frac{1}{n}l(2\cos\tfrac{1}{2}\delta) + i\frac{\delta}{2n},$$
$$\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots. + \sin\frac{n-2}{n}\pi = \tfrac{1}{2}\cot\frac{\pi}{2n},$$
$$\sin\frac{\pi}{n} + 3\sin\frac{3\pi}{n} + \ldots. + (n-2)\sin\frac{n-2}{n}\pi = \tfrac{1}{2}n\cot\frac{\pi}{n},$$
$$\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \ldots. + \cos\frac{n-2}{n}\pi = \tfrac{1}{2},$$

also

$$\int_0^1 \frac{e^{\delta i}dx}{1+e^{n\delta i}x^n} = -\frac{1}{n}\Sigma l\left(\cos\delta - \cos\frac{r\pi}{n}\right)^{\cos\frac{r\pi}{n}} + \frac{1}{n}l(2^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}\delta) + \frac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{n}}$$
$$+ \frac{i}{2n}\Sigma l\left(\frac{1-\cos\left(\frac{r\pi}{n}+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{r\pi}{n}-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{r\pi}{n}},$$

für $\delta^2 < \left(\frac{\pi}{n}\right)^2$.

Hieraus erhält man, eben wie im vorigen Paragraph:

$$1.\quad \cos\delta - \frac{n+1}{1}\cos(n+1)\delta + \frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\delta - \frac{1}{3n+1}\cos(3n+1)\delta + \ldots.$$

$$= \frac{\pi}{2n\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{1}{n}\Sigma l\left(\cos\delta - \frac{r\pi}{n}\right)^{\cos\frac{r\pi}{n}} + \frac{1}{n}l(\sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\delta),$$

$$2.\quad \sin\delta - \frac{1}{n+1}\sin(n+1)\delta + \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\delta - \frac{1}{3n+1}\sin(3n+1)\delta + \ldots.$$

$$= \frac{1}{2n}\Sigma l\left(\frac{1-\cos\left(\frac{r\pi}{n}+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{r\pi}{n}-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{r\pi}{n}}.$$

In diesen beiden Gleichungen ist n eine ungerade ganze Zahl > 1 und $\delta^2 < \left(\frac{\pi}{n}\right)^2$, und es erstreckt sich das Zeichen Σ auf alle ganzen ungeraden Werthe von r, von $r = 1$ bis $r = n - 2$ einschliesslich.

§. 8.

Eben wie im Vorstehenden erhält man

$$\int_0^1 \frac{e^{\delta i}dx}{1-e^{2n\delta i}x^{2n}} = \frac{1}{2n}l\left(\frac{1+e^{\delta i}}{1-e^{\delta i}}\right) - \frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{r\pi}{n}l(1-2e^{\delta i}\cos\frac{r\pi}{n}+e^{2\delta i})$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r=n-1}\sin\frac{r\pi}{n}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{e^{\delta i}\sin\frac{r\pi}{n}}{1-e^{\delta i}\cos\frac{r\pi}{n}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{e^{\delta i}dx}{1-e^{(2n+1)\delta i}x^{2n+1}} = -\frac{1}{2n+1}l(1-e^{\delta i}) - \frac{1}{2n+1}\sum_{r=1}^{r=n}\cos\frac{2r\pi}{2n+1}l(1-2e^{\delta i}\cos\frac{2r\pi}{2n+1}+e^{2\delta i})$$

$$+ \frac{2}{2n+1}\sum_{r=1}^{r=n}\sin\frac{2r\pi}{2n+1}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{e^{\delta i}\sin\frac{2r\pi}{2n+1}}{1-e^{\delta i}\cos\frac{2r\pi}{2r+1}}\right),$$

unter Bedingungen, die den frühern analog sind. δ ist > 0 vorausgesetzt. Beachtet man nun, dass

$$\frac{1}{2n}l\left(\frac{1+e^{\delta i}}{1-e^{\delta i}}\right) = \frac{1}{4n}l\left(\frac{1+\cos\delta}{1-\cos\delta}\right) + \frac{1}{4n}.\pi i,$$

$$\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \ldots. + \cos\frac{n-1}{n}\pi = 0,$$

$$\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots. + \sin\frac{n-1}{n}\pi = \cot\frac{\pi}{2n},$$

$$\sin\frac{\pi}{n} + 2\sin\frac{2\pi}{n} + 3\sin\frac{3\pi}{n} + \ldots. + (n-1)\sin\frac{n-1}{n}\pi = \tfrac{1}{2}n\cot\frac{\pi}{2n},$$

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots.+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\tfrac{1}{2},$$

$$\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots.+\sin\frac{2n\pi}{2n+1}=\tfrac{1}{2}\cot\frac{\frac{1}{2}\pi}{2n+1},$$

$$\sin\frac{2\pi}{2n+1}+2\sin\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots.+n\sin\frac{2n\pi}{2n+1}=\frac{2n+1}{4\sin\frac{\pi}{2n+1}},$$

$$-\frac{1}{2n+1}l(1-e^{\delta i})=-\frac{1}{2(2n+1)}l[2(1-\cos\delta)]+\frac{1}{2(2n+1)}(\pi-\delta)i$$

ist, so ergiebt sich leicht:

1. $$\cos\delta+\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)\delta+\frac{1}{4n+1}\cos(4n+1)\delta+\ldots.$$
$$=\frac{1}{4n}l\left(\frac{1+\cos\delta}{1-\cos\delta}\right)-\frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{r=n-1}l\left(\cos\delta-\cos\frac{r\pi}{n}\right)^{\cos\frac{r\pi}{n}}\frac{\pi}{4n}\cot\frac{\pi}{2n};$$

2. $$\sin\delta+\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)\delta+\frac{1}{4n+1}\sin(4n+1)\delta+\ldots.$$
$$=\frac{\pi}{4n}+\frac{1}{4n}\sum_{r=1}^{r=n-1}l\left[\left(\frac{1-\cos(\frac{r\pi}{n}+\delta)}{1-\cos(\frac{r\pi}{n}-\delta)}\right)^{\sin\frac{2\pi}{n}}\right].$$

Diese beiden Gleichungen gelten für ein ganzzahliges $n>0$, und für $\delta\begin{matrix}>0\\<\frac{\pi}{n}\end{matrix}$. Ferner ist

3. $$\cos\delta+\frac{1}{2n+2}\cos(2n+2)\delta+\frac{1}{4n+3}\cos(4n+3)\delta+\frac{1}{6n+4}\cos(6n+4)\delta+\ldots.$$
$$=-\frac{1}{2(2n+1)}l(1-\cos\delta)-\frac{1}{2n+1}\sum_{r=1}^{r=n}l\left(\cos\delta-\cos\frac{2r\pi}{2r+1}\right)^{\cos\frac{2r\pi}{2n+1}}$$
$$+\frac{\pi}{2(2n+1)}\cot\frac{\pi}{2n+1},$$

für ein ganzzahliges $n\gtreqless 0$ und $\delta\begin{matrix}>0\\<\frac{2\pi}{2n+1}\end{matrix}$. Desgleichen

4. $$\sin\delta+\frac{1}{2n+2}\sin(2n+2)\delta+\frac{1}{4n+3}\sin(4n+3)\delta+\ldots.$$
$$=\frac{\pi}{2(2n+1)}+\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{r=1}^{r=n}l\left(\frac{1-\cos(\frac{2r\pi}{2n+1}+\delta)}{1-\cos(\frac{2r\pi}{2n+1}-\delta)}\right)^{\sin\frac{2r\pi}{2n+1}}.$$

für ein ganzzahliges $n > 0$ und $\delta \begin{matrix} > 0 \\ < \frac{2\pi}{2n+1} \end{matrix}$.

Die Resultate von (§. 6. bis 9.) lassen sich auf folgende Weise noch weiter verallgemeinern, obwohl die Reihen schon ziemlich allgemein sind.

§. 10.

Wenn nämlich $m-1 < 2n$ und $\gtrless 0$ ist, so ist bekanntlich

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{r=0}^{r=n-1} \cos\frac{(2r+1)m\pi}{2n}\, l[1-2a\cos\frac{2r+1}{2n}\pi + x^2]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1}\sin\frac{(2r+1)m\pi}{2n}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\frac{x\sin\frac{(2r+1)\pi}{2n}}{1-x\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}}\right).$$

Man setze hier $e^{\delta i}x$ statt x, so erhält man

$$\int \frac{e^{m\delta i}x^{m-1}dx}{1+e^{2n\delta i}x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{r=0}^{r=n-1}\cos\frac{(2r+1)m\pi}{2n}\, l[1-2e^{\delta i}x\cos\frac{2r+1}{2n}\pi + x^2e^{2\delta i}]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1}\sin\frac{(2r+1)m\pi}{2n}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\frac{e^{\delta i}x\sin\frac{2r+1}{2n}\pi}{1-e^{\delta i}x\cos\frac{2r+1}{2n}\pi}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{e^{m\delta i}x^{m-1}dx}{1+e^{2n\delta i}x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{r=0}^{r=n-1}\cos\left(\frac{2r+1}{2n}m\pi\right) l[1-2e^{\delta i}\cos\frac{2r+1}{2n}\pi + e^{\delta i}]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{r=n-1}\sin\left(\frac{2r+1}{2n}m\pi\right)\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\frac{e^{\delta i}\sin\frac{(2r+1)\pi}{2n}}{1-e^{\delta i}\cos\frac{(2r+1)\pi}{2n}}\right).$$

Nun ist

$$l[1-2e^{\delta i}\cos\varphi + e^{2\delta i}] = l[2(\cos\delta-\cos\varphi)] + \delta i,$$

wenn $\cos\delta - \cos\varphi > 0$; was im Folgenden vorausgesetzt wird. (Siehe §. 6.) Führt man hier alle in (§. 6.) aufgezählten Werthe ein, so findet sich

$$\int_0^1 \frac{e^{m\delta i}x^{m-1}dx}{1+e^{2n\delta i}x^{2n}} = -\frac{1}{2n}l\left(2^{\sum_{n=0}^{r=n-1}\cos\frac{2r+1}{2n}m\pi}\right) - \frac{1}{2n}\sum_{n=0}^{r=n-1} l\left(\cos\delta-\cos\frac{2r+1}{2n}\pi\right)^{\cos\frac{2r+1}{2n}m\pi}$$

$$-\frac{\delta}{2n}i\sum_{r=0}^{r=n-1}\cos\frac{(2r+1)m\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n}\sum_{r=0}^{r=n-1}\sin\frac{2r+1}{2n}m\pi - \frac{\pi}{4n^2}\sum_{r=0}^{r=n-1}((2r+1)\sin\frac{2r+1}{2n}m\pi)$$

$$+\frac{i}{4n}\sum_{r=0}^{r=n-1} l\left[\frac{1-\cos\left(\frac{(2r+1)\pi}{2n}+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{(2r+1)\pi}{2n}-\delta\right)}\right]^{\sin\frac{(2r+1)}{2n}m\pi}.$$

Nun findet sich weiter

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \cos \frac{2r+1}{2n} m\pi = 0,$$

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \sin \frac{2r+1}{2n} m\pi = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(m\pi)}{\sin \frac{m\pi}{2n}},$$

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} (2r+1) \sin \frac{2r+1}{2n} m\pi = -\frac{n \cos m\pi}{\sin \frac{m\pi}{2n}} = \frac{(-1)^{m+1} n}{\sin \frac{m\pi}{2n}}.$$

Führt man diese Relationen ein, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{e^{m\delta i} x^{m-1} dx}{1+e^{2n\delta i} x^{2n}} = -\frac{1}{2n} \sum_{r=0}^{r=n-1} l\left[\cos\delta - \cos\frac{2r+1}{2n}\pi\right] \cos\frac{2r+1}{2n} m\pi + \frac{\pi}{4n \sin \frac{m\pi}{2n}}$$

$$+ \frac{i}{4n} \sum_{r=0}^{r=n-1} l\left[\frac{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n}\pi+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n}\pi-\delta\right)}\right] \sin\frac{2r+1}{2n} m\pi.$$

Diese Formel ist gültig, wenn $\delta^2 < \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2$.

Entwickelt man die Grösse

$$\frac{e^{m\delta i} x^{m-1}}{1+e^{2n\delta i} x^{2n}}$$

in eine nach steigenden Potenzen von a fortgehende unendliche Reihe, so ist dieselbe gültig von $x = 0$ bis $x = 1$, wenn $\delta^2 < \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2$. Integrirt man alsdann innerhalb der Gränzen 0 und 1, und vergleicht das Resultat, so erhält man

1. $$\frac{1}{m} \cos m\delta - \frac{1}{2n+m} \cos(2n+m)\delta + \frac{1}{4n+m} \cos(4n+m)\delta - \ldots.$$
$$= -\frac{1}{2n} \sum_{r=0}^{r=n-1} l\left[\cos\delta - \cos\frac{2r+1}{2n}\pi\right] \cos\frac{2r+1}{2n} m\pi + \frac{\pi}{4n \sin \frac{m\pi}{2n}},$$

2. $$\frac{1}{m} \sin m\delta - \frac{1}{2n+m} \sin(2n+m)\delta + \frac{1}{4n+m} \sin(4n+m)\delta - \ldots.$$
$$= \frac{1}{4n} \sum_{r=0}^{r=n-1} l\left[\frac{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n}\pi+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n}\pi-\delta\right)}\right] \sin\frac{2r+1}{2n} m\pi.$$

In diesen beiden Gleichungen ist $\delta^2 < \left(\frac{\pi}{2n}\right)$, $m \gtreqless \begin{matrix}0\\2n+1\end{matrix}$; n und m sind ganze positive Zahlen und $n > 0$.

Setzt man hier $m=1$, so erhält man die Gleichungen (1. und 2. §. 7.).

§. 11.

Unter ähnlichen Bedingungen wie im vorhergehenden Paragraph erhält man

$$\int_0^1 \frac{e^{m\delta i} x^{m-1} dx}{1+e^{(2n+1)\delta i} x^{2n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{2n+1} l(1+e^{\delta i}) - \frac{1}{2n+1} \sum_{r=0}^{r=n-1} \cos \frac{2r+1}{2n+1} m\pi \, l\left[1-2e^{\delta i} \cos \frac{2r+1}{2n+1}\pi + e^{2\delta i}\right]$$

$$+ \frac{2}{2n+1} \sum_{r=0}^{r=n-1} \sin \frac{2r+1}{2n+1} m\pi \,.\, \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{e^{\delta i} \sin \frac{2r+1}{2n+1}\pi}{1-e^{\delta i} \cos \frac{2r+1}{2n+1}\pi}\right).$$

Beachtet man die früheren Formeln, so ergiebt sich

$$\int_0^1 \frac{e^{m\delta i} x^{m-1} dx}{1+e^{(2n+1)\delta i} x^{2n+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1} l(2\cos \tfrac{1}{2}\delta) + \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1} \cdot \tfrac{1}{2}\delta \,.\, i$$

$$- \frac{1}{2n+1} l\left(2 \sum_{r=0}^{r=n-1} \cos \frac{2r+1}{2n+1} m\pi\right) - \frac{1}{2n+1} \sum_{r=0}^{r=n-1} l \,.\, (\cos\delta - \cos \frac{2r+1}{2n+1}\pi)^{\cos \frac{2r+1}{2n+1} m\pi}$$

$$- \frac{1}{2n+1} \delta i \sum_{r=0}^{r=n-1} \cos \frac{2r+1}{2n+1} m\pi + \frac{\pi}{2n+1} \sum_{r=0}^{r=n-1} \sin \frac{2r+1}{2n+1} m\pi$$

$$- \frac{\pi}{(2n+1)^2} \sum_{r=0}^{r=n-1} (2r+1) \sin \frac{2r+1}{2n+1} m\pi$$

$$+ \frac{i}{2(2n+1)} \sum_{r=0}^{r=n-1} l\left[\frac{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n+1}\pi+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n+1}\pi-\delta\right)}\right]^{\sin \frac{2r+1}{2n+1} m\pi}$$

Nun ist

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \cos \frac{2r+1}{2n+1} m\pi = (-1)^{m+1} \cdot \tfrac{1}{2},$$

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \sin \frac{2r+1}{2n+1} m\pi = \frac{1}{2\sin \frac{m\pi}{2n+1}} + \tfrac{1}{2}(-1)^{m+1} \cot \frac{m\pi}{2n+1},$$

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} (2r+1) \sin \frac{2r+1}{2n+1} m\pi = (-1)^{m+1} \cdot \tfrac{1}{2}(2n+1) \cot \frac{m\pi}{2n+1}.$$

Führt man diese Werthe ein, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{e^{m\delta i}x^{m-1}dx}{1+e^{(2n+1)\delta i}x^{2n+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}l(2\cos\tfrac{1}{2}\delta) + \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}\tfrac{1}{2}\delta.i + (-1)^m.\frac{1}{2(2n+1)}l(2)$$
$$- \frac{1}{2n+1}\sum_{r=0}^{r=n-1} l.\left[\cos\delta - \cos\frac{2r+1}{2n+1}\pi\right]^{\cos\frac{2r+1}{2n+1}m\pi} + \frac{(-1)^m\delta.i}{2(2n+1)} + \frac{\pi}{2(2n+1)\sin\frac{m\pi}{2n+1}}$$
$$+ \frac{(-1)^{m+1}\pi\cot\frac{m\pi}{2n+1}}{2(2n+1)} + \frac{(-1)^m\pi\cot\frac{m\pi}{2n+1}}{2(2n+1)}$$
$$+ \frac{i}{2(2n+1)}\sum_{r=0}^{r=n-1} l\left[\frac{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n+1}\pi+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n+1}\pi-\delta\right)}\right]^{\sin\frac{2r+1}{2n+1}m\pi}$$
$$= \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}l(2\cos\tfrac{1}{2}\delta) + \frac{(-1)^m l(2)}{2(2n+1)} - \frac{1}{2n+1}\sum_{r=0}^{r=n-1} l\left[\cos\delta - \cos\frac{2r+1}{2n+1}\pi\right]^{\cos\frac{2r+1}{2n+1}m\pi}$$
$$+ \frac{\pi}{2(2n+1)\sin\frac{m\pi}{2n+1}} + \frac{i}{2(2n+1)}\sum_{r=0}^{r=n-1} l\left[\frac{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n+1}\pi+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n+1}\pi-\delta\right)}\right]^{\sin\frac{2r+1}{2n+1}m\pi}$$
$$= \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}l(\sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\delta) - \frac{1}{2n+1}\sum_{r=0}^{r=n-1} l\left(\cos\delta - \cos\frac{2r+1}{2n+1}\pi\right)^{\cos\frac{2r+1}{2n+1}m\pi}$$
$$+ \frac{\pi}{2(2n+1)\sin\frac{m\pi}{2n+1}} + \frac{i}{2(2n+1)}\sum_{r=0}^{r=n-1} l\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n+1}\pi+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{2r+1}{2n+1}\pi-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{2r+1}{2n+1}m\pi}.$$

Entwickelt man die Grösse unter dem Integralzeichen in eine unendliche Reihe (deren Gültigkeit unter ähnlichen Bedingungen wie früher Statt findet), integrirt und vergleicht die beiden Resultate, so ergiebt sich

1. $$\frac{1}{m}\cos m\delta - \frac{1}{2n+1+m}\cos(2n+m+1)\delta + \frac{1}{2(2n+1)+m}\cos(4n+m+2)\delta - \ldots.$$
$$= \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}l(\sqrt{2}.\cos\tfrac{1}{2}\delta) - \frac{1}{2n+1}\sum_{r=0}^{r=n-1} l\left[\cos\delta - \cos\frac{2r+1}{2n+1}\pi\right]^{\cos\frac{2r+1}{2n+1}m\pi}$$
$$+ \frac{\pi}{2(2n+1)\sin\frac{m\pi}{2n+1}},$$

$$2.\quad \frac{1}{m}\sin m\delta - \frac{1}{2n+1+m}\sin(2n+1+m)\delta + \frac{1}{2(2n+1)+m}\sin(4n+m+2)\delta - \ldots$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)}\sum_{r=0}^{r=n-1} l\left(\frac{1-\cos(\frac{2r+1}{2n+1}\pi+\delta)}{1-\cos(\frac{2r+1}{2n+1}\pi-\delta)}\right)^{\sin\frac{2r+1}{2n+1}m\pi}.$$

Diese beiden Formeln gelten für ein ganzzahliges $n > 0$, für ein ganzes $m \gtrless 2n+2$ und für $\delta^2 < \left(\frac{\pi}{2n+1}\right)^2$.

Für $m = 1$ erhält man die Formeln (1. und 2. §. 8.).

§. 12.

Es ist

$$\int_0^1 \frac{e^{m\delta i}x^{m-1}dx}{1-e^{2n\delta i}x^{2n}} = -\frac{1}{2n}l(1-e^{\delta i}) + \frac{(-1)^{m+1}}{2n}l(1+e^{\delta i})$$

$$-\frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{rm\pi}{n}\,l(1-2e^{\delta i}\cos\frac{r\pi}{n}+e^{2\delta i})$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{r=n-1}\sin\frac{rm\pi}{n}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{e^{\delta i}\sin\frac{r\pi}{n}}{1-e^{\delta i}\cos\frac{r\pi}{n}}\right).$$

Nun ist $\delta > 0$ und $< \frac{\pi}{2n}$

$$-\frac{1}{2n}l(1-e^{\delta i}) = -\frac{1}{2n}l(2\sin\tfrac{1}{2}\delta) + \frac{\pi-\delta}{4n}i,$$

also

$$\int_0^1 \frac{e^{m\delta i}x^{m-1}dx}{1-e^{2n\delta i}x^{2n}} = -\frac{1}{2n}l(2\sin\tfrac{1}{2}\delta) + \frac{\pi-\delta}{4n}i + \frac{(-1)^{m+1}}{2n}l(2\cos\tfrac{1}{2}\delta) + \frac{(-1)^{m+1}\delta}{4n}i$$

$$-\frac{1}{2n}\sum_{r=1}^{r=n-1}l(\cos\delta-\cos\frac{r\pi}{n})^{\cos\frac{rm\pi}{n}} - \frac{1}{2n}l\left[2^{\sum_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{rm\pi}{n}}\right] - \frac{\delta}{2n}i\sum_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{rm\pi}{n}$$

$$+\frac{\pi}{2n}\sum_{r=1}^{r=n-1}\sin\frac{rm\pi}{n} - \frac{\pi}{2n^2}\sum_{r=1}^{r=n-1}r\sin\frac{rm\pi}{n} + \frac{i}{4n}\sum_{r=1}^{r=n-1}l\left(\frac{1-\cos(\frac{r\pi}{n}+\delta)}{1-\cos(\frac{r\pi}{n}-\delta)}\right)^{\sin\frac{rm\pi}{n}}$$

Es ist aber

$$\sum_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{rm\pi}{n} = -\cos^2\tfrac{1}{2}(m\pi),$$

$$\sum_{r=1}^{r=n-1}\sin\frac{rm\pi}{n} = \sin^2\tfrac{1}{2}(m\pi)\ \cot\frac{m\pi}{2n},$$

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} r \sin\frac{rm\pi}{n} = -\tfrac{1}{2} n \cos m\pi \cot\frac{m\pi}{2n} = \tfrac{1}{2}(-1)^{m+1} n \cot\frac{m\pi}{2n}.$$

Führt man diese Werthe ein, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{e^{m\delta i} x^{m-1} dx}{1-x^{2n}e^{2n\delta i}} = -\frac{1}{2n} l(2\sin\tfrac{1}{2}\delta) + \frac{(-1)^{m+1}}{2n} l(2\cos\tfrac{1}{2}\delta)$$
$$- \frac{1}{2n} \sum_{r=1}^{r=n-1} l\left[\cos\delta - \cos\frac{r\pi}{n}\right]^{\cos\frac{rm\pi}{n}} + \frac{1}{2n}\cos^2\tfrac{1}{2}(m\pi) l(2)$$
$$+ \frac{\pi}{2n}\sin^2\tfrac{1}{2}(m\pi)\cot\frac{m\pi}{2n} + (-1)^m\frac{\pi}{4n}\cot\frac{m\pi}{2n}$$
$$+ i\left[\frac{\pi-\delta}{4n} + \frac{(-1)^{m+1}\delta}{4n} + \frac{\delta}{2n}\cos^2\tfrac{1}{2}m\pi + \frac{1}{4n}\sum_{r=1}^{r=n-1} l\left(\frac{1-\cos(\frac{r\pi}{n}+\delta)}{1-\cos(\frac{r\pi}{n}-\delta)}\right)^{\sin\frac{rm\pi}{n}}\right].$$

Entwickelt man dies in eine Reihe, integrirt und vergleicht die Resultate, so erhält man

1. $$\frac{1}{m}\cos m\delta + \frac{1}{2n+m}\cos(2n+m)\delta + \frac{1}{4n+m}\cos(4n+m)\delta + \ldots.$$
$$= \frac{1}{2n}\left[(-1)^{m+1} l(2\cos\tfrac{1}{2}\delta) - l(2\sin\tfrac{1}{2}\delta) + \cos^2\tfrac{1}{2}(m\pi) l(2)\right.$$
$$\left. + \pi\sin^2\tfrac{1}{2}m\pi\cot\frac{m\pi}{2n} + (-1)^m\tfrac{1}{2}\pi\cot\frac{m\pi}{2n} - \sum_{r=1}^{r=n-1} l\left(\cos\delta-\cos\frac{r\pi}{n}\right)^{\cos\frac{rm\pi}{n}}\right],$$

2. $$\frac{1}{m}\sin m\delta + \frac{1}{2n+m}\sin(2n+m)\delta + \frac{1}{4n+m}\sin(4n+m)\delta + \ldots.$$
$$= \frac{1}{2n}\left[\delta\cos^2\tfrac{1}{2}m\pi + \tfrac{1}{2}(\pi-\delta) + (-1)^{m+1}\tfrac{1}{2}\delta\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-1} l\left(\frac{1-\cos\left(\frac{r\pi}{n}+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{r\pi}{n}-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{rm\pi}{n}}\right].$$

Diese Gleichungen gelten für ein ganzzahliges $n > 0$, für ein ganzzahliges $m \begin{matrix}>0\\<2n+1\end{matrix}$ und $\delta \begin{matrix}>0\\<\frac{\pi}{n}\end{matrix}$.

Setzt man $m = 1$, so erhält man die Gleichungen (1. u. 2. §. 9.).

§. 13.

Endlich ist

$$\int_0^1 \frac{e^{m\delta i}x^{m-1}dx}{1-e^{(2n+1)\delta i}x^{2n+1}} = -\frac{1}{2n+1}l(1-e^{\delta i}) - \frac{1}{2n+1}\sum_{r=1}^{r=n}\cos\frac{2rm\pi}{2n+1}\,l\left(1-2e^{\delta i}\cos\frac{2r\pi}{2n+1}+e^{2\delta i}\right)$$

$$+\frac{2}{2n+1}\sum_{r=1}^{r=n}\sin\frac{2rm\pi}{2n+1}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\frac{e^{\delta i}\sin\frac{2r\pi}{2n+1}}{1-e^{\delta i}\cos\frac{2r\pi}{2n+1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2n+1}l\left(2\sin\tfrac{1}{2}\delta\right)+\frac{\pi-\delta}{2(2n+1)}i-\frac{l(2)}{2n+1}\sum_{r=1}^{r=n}\cos\frac{2rm\pi}{2n+1}$$

$$-\frac{1}{2n+1}\sum_{r=1}^{r=n}\left(\cos\delta-\cos\frac{2r\pi}{2n+1}\right)^{\cos\frac{2rm\pi}{2n+1}}-\frac{\delta}{2n+1}i\sum_{r=1}^{r=n}\cos\frac{2rm\pi}{2n+1}+\frac{\pi}{2n+1}\sum_{r=1}^{r=n}\sin\frac{2rm\pi}{2n+1}$$

$$-\frac{2\pi}{(2n+1)^2}\sum_{r=1}^{r=n}r\sin\frac{2rm\pi}{2n+1}+\frac{i}{2(2n+1)}\sum_{r=1}^{r=n}l\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2r\pi}{2n+1}+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{2r\pi}{2n+1}-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{2rm\pi}{2n+1}}.$$

Nun ist

$$\sum_{r=1}^{r=n}\cos\frac{2rm\pi}{2n+1}=-\tfrac{1}{2},$$

$$\sum_{r=1}^{r=n}\sin\frac{2rm\pi}{2n+1}=\tfrac{1}{2}\cot\frac{m\pi}{2n+1}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{m+1}}{\sin\frac{m\pi}{2n+1}},$$

$$\sum_{r=1}^{r=n}r\sin\frac{2rm\pi}{2n+1}=\frac{(-1)^{m+1}(2n+1)}{4\sin\frac{m\pi}{2n+1}};$$

also folgt

$$\int_0^1\frac{e^{m\delta i}x^{m-1}dx}{1-e^{(2n+1)\delta i}x^{2n+1}}=$$

$$-\frac{1}{2n+1}l\left(2\sin\tfrac{1}{2}\delta\right)+\frac{l(2)}{2(2n+1)}-\frac{1}{2n+1}\sum_{r=1}^{r=n}l\left(\cos\delta-\cos\frac{2r\pi}{2n+1}\right)^{\cos\frac{2rm\pi}{2n+1}}$$

$$+\frac{\pi}{2(2n+1)}\left(\cot\frac{m\pi}{2n+1}+\frac{(-1)^{m+1}}{\sin\frac{m\pi}{2n+1}}\right)+\frac{(-1)^m\pi}{2(2n+1)\sin\frac{m\pi}{2n+1}}$$

$$+i\left[\frac{\pi-\delta}{2(2n+1)}+\frac{\delta}{2(2n+1)}+\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{r=1}^{r=n}l\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2r\pi}{2n+1}+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{2r\pi}{2n+1}-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{2rm\pi}{2n+1}}\right].$$

Entwickelt man die unendliche Reihe, integrirt und vergleicht die Resultate, so erhält man

1. $$\frac{1}{m}\cos m\delta + \frac{1}{2n+1+m}\cos(2n+1+m)\delta + \frac{1}{4n+2+m}\cos(4n+2+m)\delta + ..$$
$$= \frac{1}{2n+1}\left[\tfrac{1}{2}\pi\ \cot\frac{m\pi}{2n+1} - l(\sqrt{2}.\sin\tfrac{1}{2}\delta) - \sum_{r=1}^{r=n} l\left(\cos\delta - \cos\frac{2r\pi}{2n+1}\right)^{\cos\frac{2rm\pi}{2n+1}}\right],$$

2. $$\frac{1}{m}\sin m\delta + \frac{1}{2n+1+m}\sin(2n+1+m)\delta + \frac{1}{4n+2+m}\sin(4n+2+m)\delta + ...$$
$$= \frac{1}{2(2n+1)}\left[\pi + \sum_{r=1}^{r=n} l\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2r\pi}{2n+1}+\delta\right)}{1-\cos\left(\frac{2r\pi}{2n+1}-\delta\right)}\right)^{\sin\frac{2rm\pi}{2n+1}}\right].$$

Diese beiden Formeln gelten für ein ganzzahliges $n > 0$, für ein ganzzahliges $m \begin{matrix}>0\\<2n+2\end{matrix}$, und für $\delta \begin{matrix}>0\\<\frac{2\pi}{2n+1}\end{matrix}$.

Setzt man $m = 1$, so erhält man die Formeln (3. und 4. §. 9.).

Die Formeln der letzten vier Paragraphen enthalten die in (§. 9.) angedeutete Verallgemeinerung der Formeln (§. 6. bis 9.). Sie sind vielleicht die allgemeinsten, die sich hier aufstellen lassen.

§. 14.

Es findet sich auf die bekannte Weise

$$\int \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x).dx = x\ \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x) - \tfrac{1}{2}l(1+x^2).$$

Setzt man hierin statt x nun $e^{\delta i}x$, so erhält man

$$\int_0^1 \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = e^{\delta i}x)\,dx = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = e^{\delta i}) - \frac{1}{2e^{\delta i}}l(1+e^{\delta i}).$$

Nun ist

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = e^{\delta i}) = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}il\left(\frac{(1+\sin\delta)^2+\cos^2\delta}{(1-\sin\delta)^2+\cos^2\delta}\right) = \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}il\left(\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}\right),$$

vorausgesetzt, dass $\cos\delta$ nicht Null sei und

$$l(1+e^{2\delta i}) = l(2\cos\delta) + \delta i;$$

und vorausgesetzt, dass nicht $\cos 2\delta = -1$ sei,

$$\frac{1}{e^{\delta i}}l(1+e^{2\delta i}) = (l(2\cos\delta) + \delta i)\,(\cos\delta - i\sin\delta)$$
$$= l(2\cos\delta)^{\cos\delta} + \delta\sin\delta + i(\delta\cos\delta - l(2\cos\delta)^{\sin\delta}).$$

Ferner ist von $x = 0$ bis $x = 1$:

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = e^{\delta i}x) = \frac{1}{e^{\delta i}x} - \frac{e^{2\delta i}x^3}{3} + \frac{e^{2\delta i}x^5}{5} - ....$$

$$\int_0^1 \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = e^{\delta i}x)\,dx = \frac{e^{\delta i}}{1.2} - \frac{e^{3\delta i}}{3.4} + \frac{e^{5\delta i}}{5.6} - ....$$

Vergleicht man diese Resultate, so ergiebt sich, wie früher:

$$1. \quad \frac{\cos\delta}{1.2} - \frac{\cos 3\delta}{3.4} + \frac{\cos 5\delta}{5.6} - \ldots = \tfrac{1}{4}\pi - l(2\cos\delta)^{\frac{1}{2}\cos\delta} - \tfrac{1}{2}\delta \sin\delta,$$

$$2. \quad \frac{\sin\delta}{1.2} - \frac{\sin 3\delta}{3.4} + \frac{\sin 5\delta}{5.6} - \frac{\sin 7\delta}{7.8} + \ldots$$
$$= \tfrac{1}{4} l\left(\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}\right) - \tfrac{1}{2}\delta\cos\delta + l(2\cos\delta)^{\frac{1}{2}\sin\delta}.$$

Diese beiden Gleichungen gelten für $\delta^2 < (\frac{1}{2}\pi)^2$.

§. 15.

Es ist

$$\int \operatorname{arc}(\sin = x)\,dx = x \operatorname{arc}(\sin = x) + \sqrt{(1-x^2)};$$

vorausgesetzt, dass man für $\operatorname{arc}(\sin = x)$ den Werth nimmt, dessen Cos. positiv ist. Hieraus folgt

$$\int_0^1 \operatorname{arc}(\sin = e^{\delta i}x)\,dx = \operatorname{arc}(\sin = e^{\delta i}) + \frac{1}{e^{\delta i}}\sqrt{(1-e^{2\delta i})} - \frac{1}{e^{\delta i}}.$$

Nun ist

$$\operatorname{arc}(\sin = e^{\delta i}) = \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\cos\delta}{(1+\sin\delta)^{\frac{1}{2}}}\right) + il((1+\sin\delta)^{\frac{1}{2}} + \sin\tfrac{1}{2}\delta),$$

wenn $\sin\delta$ positiv ist. Ist auch $\sin 2\delta$ positiv, so erhält man

$$\sqrt{(1-e^{2\delta i})} = (2-2\cos 2\delta)^{\frac{1}{4}}[\cos(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\delta) - i\sin(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\delta)],$$
$$\frac{1}{e^{\delta i}}\sqrt{(1-e^{2\delta i})} = (2\sin\delta)^{\frac{1}{2}}[\cos(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\delta) - i\sin(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\delta)].$$

Entwickelt man die Grösse unter dem Integralzeichen in eine unendliche Reihe, integrirt und vergleicht die Resultate, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$1. \quad \frac{\cos\delta}{1.2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 3\delta}{2.4} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\cos 5\delta}{5.6} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\cos 7\delta}{7.8} + \ldots.$$
$$= \operatorname{arc}\left(\sin\delta = \frac{\cos\delta}{(1+\sin\delta)^{\frac{1}{2}}}\right) + (2\sin\delta)^{\frac{1}{2}}\cos(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\delta) - \cos\delta,$$

$$2. \quad \frac{\sin\delta}{1.2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 3\delta}{3.4} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\sin 5\delta}{5.6} + \ldots.$$
$$= l[(1+\sin\delta)^{\frac{1}{2}} + \sin^{\frac{1}{2}}\delta] - (2\sin\delta)^{\frac{1}{2}}\sin(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\delta) + \sin\delta.$$

Diese beiden Formeln gelten dem Obigen zufolge für $\delta \gtreqless 0$ und $\lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$. Setzt man $\delta = 0$, so ergiebt sich aus (1.):

$$3. \quad \tfrac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.4} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5.6} + \ldots.$$

§. 16.

Es ist

$$\int e^x dx = e^x,$$

also

$$\int e^{x(\cos\delta + i\sin\delta)} dx = \frac{1}{\cos\delta + i\sin\delta} e^{x(\cos\delta + i\sin\delta)}$$
$$= (\cos\delta - i\sin\delta)\,[\cos(x\sin\delta) + i\sin(x\sin\delta)]\,e^{x\cos\delta}$$
$$= [\cos(x\sin\delta - \delta) + i\sin(x\sin\delta - \delta)]\,e^{x\cos\delta},$$

$$\int_0^1 e^{x(\cos\delta + i\sin\delta)} dx = \cos(\sin\delta - \delta).e^{\cos\delta} - \cos\delta + i[\sin(\sin\delta - \delta).e^{\cos\delta} + \sin\delta].$$

Hieraus ergiebt sich, immer auf dieselbe Weise:

1. $$1 + \frac{\cos\delta}{1.2} + \frac{\cos 2\delta}{1.2.3} + \frac{\cos 3\delta}{1.2.3.4} + \ldots. = e^{\cos\delta}.\cos(\sin\delta - \delta) - \cos\delta,$$

2. $$\frac{\sin\delta}{1.2} + \frac{\cos 2\delta}{1.2.3} + \frac{\cos 3\delta}{1.2.3.4} + \ldots. = e^{\cos\delta}\sin(\sin\delta - \delta) + \sin\delta.$$

Diese beiden Formeln gelten allgemein, was auch δ sein mag. Für $\delta = 0$ erhält man die bekannte Reihe:

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots.$$

§. 17.

Aus

$$\int \cos bx.dx = \frac{1}{b}\sin bx + C$$

folgt

$$\int_0^1 \cos bx.dx = \frac{1}{b}\sin b.$$

Setzt man $b = r(\cos\delta + i\sin\delta)$, so findet sich

$$\frac{1}{b}\sin b = \frac{1}{2r}(e^{-r\sin\delta} + e^{r\sin\delta})\sin(r\cos\delta).\cos\delta + \frac{e^{r\sin\delta} - e^{-r\sin\delta}}{2r}\cos(r\cos\delta).\sin\delta$$
$$+ i\frac{e^{r\sin\delta} - e^{-r\sin\delta}}{2r}\cos(r\cos\delta).\cos\delta - i\frac{e^{-r\sin\delta} + e^{r\sin\delta}}{2r}\sin(r\cos\delta).\sin\delta$$
$$= \frac{1}{2r}[e^{-r\sin\delta}\sin(r\cos\delta - \delta) + e^{r\sin\delta}\sin(r\cos\delta + \delta)]$$
$$+ \frac{i}{2r}[e^{r\sin\delta}\cos(r\cos\delta + \delta) - e^{-r\sin\delta}\cos(r\cos\delta - \delta)]$$

Entwickelt man die Reihe, integrirt und vergleicht, so erhält man

1. $$1 - \frac{r^2\cos 2\delta}{1.2.3} + \frac{r^4\cos 4\delta}{1....5} - \ldots.$$
$$= \frac{1}{2r}[e^{-r\sin\delta}\sin(r\cos\delta - \delta) + e^{r\sin\delta}\sin(r\cos\delta + \delta)],$$

$$2. \quad -\frac{r^2\sin 2\delta}{1.2.3}+\frac{r^4\sin 4\delta}{1....5}-\ldots.$$

$$=\frac{1}{2r}[e^{r\sin\delta}\cos(r\cos\delta+\delta)-e^{-r\sin\delta}\cos(r\cos\delta-\delta);$$

was für jedes r und δ gültig ist; nur muss $r>0$ sein.

Aus

$$\int_0^1 \sin bx\,dx=-\frac{1}{b}\cos b+\frac{1}{b}$$

ergiebt sich

$$3. \quad \frac{r\cos\delta}{1.2}-\frac{r^3\cos 3\delta}{1.2.3.4}+\frac{r^5\cos 5\delta}{1....6}-\ldots.$$

$$=-\frac{1}{2r}[e^{-r\sin\delta}\cos(r\cos\delta-\delta)+e^{r\sin\delta}\cos(r\cos\delta+\delta)]+\frac{1}{r}\cos\delta,$$

$$4. \quad \frac{r\sin\delta}{1.2}-\frac{r^3\sin 3\delta}{1.2.3.4}+\frac{r^5\sin 5\delta}{1....6}-\ldots.$$

$$=\frac{1}{2r}[e^{r\sin\delta}\sin(r\cos\delta+\delta)-e^{-r\sin\delta}\sin(r\cos\delta-\delta)]-\frac{1}{r}\sin\delta;$$

was unter den gleichen Bedingungen gültig ist wie (1. und 2.).

§. 18.

Es ist bekanntlich

$$\int_0^1 (1+l(1+bx))\,dx=\frac{1+b}{b}\,l(1+b).$$

Setzt man

$$b=r(\cos\delta+i\sin\delta)$$

und verfährt auf die obige Weise, so erhält man folgende Endresultate:

$$1. \quad 1+\frac{r\cos\delta}{1.2}-\frac{r^2\cos 2\delta}{2.3}+\frac{r^3\cos 3\delta}{3.4}-\frac{r^4\cos 4\delta}{4.5}+\ldots.$$

$$=\frac{r+\cos\delta}{2r}\,l(1+2r\cos\delta+r^2)+\frac{\varphi}{r}\sin\delta \quad \text{und}$$

$$2. \quad \frac{r\sin\delta}{1.2}-\frac{r^2\sin 2\delta}{2.3}+\frac{r^3\sin 3\delta}{3.4}-\ldots.=\frac{r+\cos\delta}{r}.\varphi-\frac{\sin\delta}{2r}\,l(1+2r\cos\delta+r^2).$$

Die Grösse φ ist hier der (numerisch) kleinste Bogen, welche die Formeln

$$\sin\varphi=\frac{r\sin\delta}{(1+2r\cos\delta+r^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \cos\varphi=\frac{1+r\cos\delta}{(1+2r\cos\delta+r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

bestimmen. Damit diese Formeln (1. und 2.) gelten, muss $r\begin{matrix}\geq 0\\ <1\end{matrix}$ sein; ist $r=1$, so darf nicht $\cos\delta=-1$ sein.

Ferner ist

$$\int_0^1 (1+bx)^m\,dx=\frac{1}{(m+1)b}(1+b)^{m+1}-\frac{1}{(m+1)b}.$$

Setzt man wieder

$$b = r(\cos\delta + i\sin\delta),$$

so erhält man auf gleiche Art wie früher:

$$3. \quad 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{r\cos\delta}{2} + \frac{m.(m-1)}{1.2}\cdot\frac{r^2\cos 2\delta}{3} + \ldots.$$

$$= \frac{1}{(m+1)r}\left[(1+2r\cos\delta+r^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}\cos((m+1)\varphi-\delta) - \cos\delta\right],$$

$$4. \quad \frac{m}{1}\cdot\frac{r\sin\delta}{2} + \frac{m.(m-1)}{1.2}\cdot\frac{r^2\sin 2\delta}{3} + \ldots.$$

$$= \frac{1}{(m+1)r}\left[(1+2r\cos\delta+r^2)^{\frac{1}{2}(m+1)}\sin((m+1)\varphi-\delta) + \sin\delta\right].$$

In diesen letzten Formeln (3. und 4.) muss $m > -1$ sein, in welchem Falle sie für $r \gtreqless \begin{matrix}0\\1\end{matrix}$ gelten. Ist $r=1$, so gelten sie für $m>0$; ist nicht $\cos\delta=-1$, so gelten sie auch für $r=1$ und $m \gtreqless \begin{matrix}-1\\0\end{matrix}$.

Die vorstehenden Resultate dürften genügen, um die Art und Weise dieser Reihenbildung deutlich zu machen. Sie könnten noch leicht vervielfältigt werden, und selbst die angegebenen Resultate sind noch nicht erschöpfend untersucht; was aber auch nicht beabsichtigt wurde. Einerseits fehlt es dem Verfasser an Musse, um die noch möglichen Erweiterungen auszuführen, andrerseits wollte er nur auf den Gegenstand aufmerksam machen, da, so viel ihm bekannt, der hier angedeutete Weg noch wenig betreten ist, gleichwohl aber eine schöne Anwendung der imaginären Formen gewährt. Die Resultate sind nicht ausführlich hergeleitet, sondern immer nur die Hauptmomente angegeben worden, da die Abhandlung sonst bedeutend länger geworden wäre und eine zu weitläuftige Ausführung leicht ermüdend ist. Dagegen finden sich bei den Resultaten die Bedingungen der Geltung immer genau angegeben, so, wie sie aus den ihnen vorstehenden Entwicklungen hervorgehen.

Im August 1845.

20.

Ueber die Anwendung einiger Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen auf ein bekanntes Problem der Geometrie.

(Von dem Herrn Professor *Richelot* zu Königsberg i. Pr.)

Zwischen den Radien und der Distanz der Mittelpuncte zweier Kreise, deren einer einem Viereck eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist, besteht bekanntlich eine Relation, welche in ihrer *einfachsten rationalen* Form von *Euler* zuerst für das Dreieck, von *Fuss* und *Steiner* für das Viereck, Fünfeck, Sechseck und Achteck aufgestellt ist. Nachdem *Jacobi* in seiner berühmten Abhandlung im dritten Bande dieses Journals (No. 35.) die zwischen den obigen geometrischen Stücken obwaltende Bedingung mit der Theilung eines ganzen elliptischen Integrals in eben so viel gleiche Theile, als die Seitenanzahl des Polygons beträgt, in Zusammenhang gesetzt hat, fragt es sich, wie die algebraische Bedingungsgleichung aus dieser transcendenten Form in rationaler und von allen überflüssigen Factoren freien Form abgeleitet werden könne? Diese Frage erhält dadurch für das Problem selbst eine etwas grössere Bedeutung, dass über das Viereck hinaus die directe geometrisch-algebraische Ableitung dieser eben erwähnten Gleichungen in der angeführten Form Schwierigkeiten mit sich führt. So ist sie für das Fünfeck nicht ohne einige glücklich getroffene Reductionen, wie in einer Abhandlung von *Fuss* im dreizehnten Bande der Petersburger nova acta und in dem zweiten Paragraph der oben erwähnten Abhandlung gefunden, für das Siebeneck aber in *dieser einfachsten Form* bisher gar nicht aufgestellt.

In der Abhandlung No. 18 im fünften Bande dieses Journals, worin die Bedingungsgleichungen für die analoge Construction auf der Kugeloberfläche aus den für die Ebene geltenden abgeleitet werden, habe ich beiläufig mit Hülfe der Verdoppelungsformeln der elliptischen Functionen gezeigt, wie man aus der rationalen, für das n Eck geltenden Bedingungsgleichung die für das $2n$ Eck geradezu abschreiben kann. Auf eine ähnliche Weise

kann man die einfachsten rationalen Bedingungsgleichungen für alle übrigen Vielecke aus denen ableiten, deren Seitenanzahl eine Primzahl ist. Hienach bleibt zur Beantwortung obiger Frage nur übrig: die Bedingungsgleichungen für diejenigen Vielecke, deren Seitenanzahl eine Primzahl ist, in ihrer rationalen und einfachsten Form aus den Gleichungen abzuleiten, welche sich auf die Theilung der elliptischen Functionen beziehen. Ich werde im Folgenden diese Aufgabe auf verschiedene Weise behandeln, am Schlusse aber dadurch vollständig lösen, dass ich sie auf eine gewöhnliche algebraische Division zurückführe.

I.

Aus der oben angeführten 35ten Abhandlung im 3ten Bande dieses Journals, und namentlich aus dem darin (Seite 388.) aufgestellten Theoreme ergeben sich sofort folgende Resultate. Es seien

R der Radius des umgeschriebenen Kreises,
r der Radius des eingeschriebenen Kreises,
a die Distanz der Mittelpuncte beider Kreise,
$2m+1$ die Anzahl der Seiten des Polygons mit einem Umlaufe,

und die Grössen k und K durch die Gleichungen

$$k = \sqrt{\left(\frac{4Ra}{(R+a)^2-r^2}\right)}, \qquad K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

bestimmt. Giebt man nun (was immer freisteht, da die Anfangs-Ecke des Vielecks beliebig angenommen werden kann) dem Vielecke eine solche Lage, dass seine erste Ecke in der Centrale beider Kreise liegt, so ist die transcendente Bedingung dafür, dass das $2m+1$ Eck sich nach einmaligem Umlaufe schliesst, die, dass der zwischen der ersten und zweiten Ecke enthaltene Bogen des äussern Kreises $= 2\,\mathrm{am}\left(\frac{2K}{2m+1}, k\right)$ wird. Zugleich ergiebt sich, dass die analogen Bogen

zwischen der ersten und dritten Ecke $= 2\,\mathrm{am}\left(\frac{4K}{2m+1}, k\right)$,

zwischen der ersten und vierten Ecke $= 2\,\mathrm{am}\left(\frac{6K}{2m+1}, k\right)$,

zwischen der ersten und $2m+1$ten Ecke $= 2\,\mathrm{am}\left(\frac{(4m-2)K}{2m+1}, k\right)$

sind. Da nun die geometrische Betrachtung zeigt, dass der Cosinus der Hälfte jenes ersten Bogens $= \frac{r}{R+a}$ ist, so erhält man folgende zwei wichtige Formeln:

1. $$\cos\text{am}\left(\frac{2K}{2m+1}, k\right) = \frac{r}{R+a}, \qquad \sin\text{coam} = \left(\frac{2K}{2m+1}, k\right) = \frac{r}{R-a}.$$

Hienach geht die so eben erwähnte transcendente Bedingung in diejenige algebraische, von k unabhängige Relation über, welche zwischen den Grössen

$$\cos\text{am}\left(\frac{2K}{2m+1}, k\right) \quad \text{und} \quad \sin\text{coam}\left(\frac{2K}{2m+1}, k\right)$$

besteht. Will man daher die Bedingungsgleichung zwischen $\frac{R}{r}$ und $\frac{a}{r}$ in ganzer rationaler und einfachster Form haben, so muss man diejenige ganze rationale Gleichung zwischen

$$\frac{1}{\cos\text{am}\left(\frac{2K}{2m+1}, k\right)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sin\text{coam}\left(\frac{2K}{2m+1}, k\right)}$$

aufsuchen, welche von allen sich bei ihrer Ableitung einstellenden überflüssigen Factoren befreit ist. Ich will hier sogleich die Bemerkung hinzufügen, dass diese gesuchte Gleichung in Bezug auf die beiden in ihr allein vorkommenden Grössen symmetrisch sein muss; wie es sich in der spätern Entwicklung stets herausstellt, aber auch sogleich durch den geometrischen Umstand gerechtfertigt wird, dass die Eigenschaft der Construction nicht geändert wird, wenn man den Mittelpunct des eingeschlossenen Kreises in der Centrale auf die entgegengesetzte Seite des Mittelpuncts des einschliessenden Kreises verlegt.

II.

Es bietet sich zur Auffindung der zu suchenden Relation zuerst folgender Weg dar. Man suche diejenige irreductible Gleichung ($2m+1$ als Primzahl vorausgesetzt), unter deren Wurzeln $\cos\text{am}\left(\frac{2K}{2m+1}, k\right)$ vorkommt, und deren Coefficienten Functionen von k sind. Zu dem Ende stelle ich alle verschiedenen Werthe von $\cos\text{am}\, u$ von der Art auf, dass u der Gleichung $\cos\text{am}\, mu + \cos\text{am}\,(m+1)u = 0$ genügt. Es gehen dieselben, wenn man

$$i = \sqrt{-1}, \qquad k_1 = \sqrt{(1-k^2)}, \qquad K_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}}$$

setzt, in folgende über:

$$2.\quad \left\{\begin{array}{lll} -1, & \cos\mathrm{am}\,\frac{2K}{2m+1}, & \cos\mathrm{am}\,\frac{6K}{2m+1}, \quad \cos\mathrm{am}\,\frac{(2m-1)2K}{2m+1}, \\ & \cos\mathrm{am}\,\frac{2K_1}{2m+1}, & \cos\mathrm{am}\,\frac{6iK_1}{2m+1}, \quad \cos\mathrm{am}\,\frac{(2m-1)2iK_1}{2m+1}, \\ & \cos\mathrm{am}\,\frac{2K\pm 4iK_1}{2m+1}, & \cos\mathrm{am}\,3.\frac{2K\pm 4iK_1}{2m+1}, \quad \cos\mathrm{am}\,\frac{(2m-1)(2K\pm 4iK_1)}{2m+1}, \\ & \cos\mathrm{am}\,\frac{2K\pm 8iK_1}{2m+1}, & \cos\mathrm{am}\,3.\frac{2K\pm 8iK_1}{2m+1}, \quad \cos\mathrm{am}\,\frac{(2m-1)(2K\pm 8iK_1)}{2m+1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\

$$6.\quad \begin{cases} Z_{2h} &= 2Z_h^2N_h^2 - \{N_h^4 - k^2(N_h^2 - Z_h^2)^2\}, \\ N_{2h} &= N_h^4 - k^2(N_h^2 - Z_h^2)^2, \\ Z_{2h+1} &= 2Z_hZ_{h+1}N_hN_{h+1} - N_{2h+1}, \\ N_{2h+1} &= N_h^2N_{h+1}^2 - k^2(N_h^2 - Z_h^2)\,(N_{h+1}^2 - \cos^2\mathrm{am}\,u\,Z_{h+1}^2), \\ N_{2h}^2 - Z_{2h}^2 &= 4Z_h^2N_h^2(N_h^2 - Z_h^2)\,(N_h^2 - k^2(N_h^2 - Z_h^2)), \end{cases}$$

und für ein ungerades m folgende Formeln erhält:

$$7.\quad \begin{cases} Z_{2h} &= 2\cos^2\mathrm{am}\,u\,Z_h^2N_h^2 - N_{2h}, \\ N_{2h} &= N_h^4 - k^2(N_h^2 - \cos^2\mathrm{am}\,u\,.\,Z_h^2), \\ Z_{2h+1} &= 2Z_hZ_{h+1}N_hN_{h+1} - N_{2h+1}, \\ N_{2h+1} &= N_h^2N_{h+1}^2 - k^2(N_h^2 - \cos^2\mathrm{am}\,u\,Z_h^2)\,(N_{h+1}^2 - Z_{h+1}^2), \\ & \qquad\qquad N_{2h}^2 - Z_{2h}^2 \\ &= 4\cos^2\mathrm{am}\,u\,Z_h^2N_h^2(N_h^2 - \cos^2\mathrm{am}\,u\,Z_h^2)\,(N_h^2 - k^2[N_h^2 - \cos^2\mathrm{am}\,u\,Z_h^2]). \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ergeben sich die obigen Behauptungen sogleich für $m=2h$ und $m=2h+1$, wenn sie für $m=h$ und $m=h+1$ gelten; und da sie für $m=1$ und $m=2$ gelten, also

$$Z_1 = 1, \qquad N_1 = 1,$$
$$Z_2 = 2\cos^2\mathrm{am}\,u - N_2, \qquad N_2 = 1 - k^2(1-\cos^2\mathrm{am}\,u)^2,$$
$$N_2^2 - Z_2^2 = 4\cos^2\mathrm{am}\,u(1-\cos^2\mathrm{am}\,u)(k_1^2 + k^2\cos^2\mathrm{am}\,u),$$

ist, so sind sie allgemein bewiesen.

Substituirt man nun diese Formeln in die Gleichung

$$\cos\mathrm{am}\,mu + \cos\mathrm{am}\,(m+1)u = 0,$$

so erhält man, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Nenners für $m=2h$, die Gleichung

$$8.\qquad Z_{2h}N_{2h+1} + c\,.\,Z_{2h+1}N_{2h} = 0,$$

und für $m=2h+1$ folgende:

$$9.\qquad Z_{2h+2}N_{2h+1} + cZ_{2h+1}N_{2h+2} = 0,$$

worin der Kürze wegen $c = \cos\mathrm{am}\,u$ gesetzt ist.

Die Seiten links in diesen Gleichungen bestehen aus einer geraden und einer ungeraden ganzen Function von c, deren erstere den Grad $m^2 + (m+1)^2 - 1$, und letztere den Grad $m^2 + (m+1)^2$ nicht überschreitet. Hieraus ergiebt sich, dass die unter 2) angeführten Werthe, deren Anzahl $= m^2 + (m+1)^2$ ist, alle Wurzeln der Gleichungen (8. oder 9.) sind, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Hiernach sind die Seiten links in beiden Gleichungen durch $1+c$ ohne Rest theilbar; wovon man sich auch leicht auf algebraischem Wege durch Anwendung der Formeln (6. und 7.) überzeugt, wenn man voraussetzt, dass die Ausdrücke

$$Z_{h+1}N_h + cZ_hN_{h+1}, \quad \text{oder} \quad Z_hN_{h+1} + cZ_{h+1}N_h,$$

je nachdem h ungerade oder gerade ist, jene Eigenschaft besitzen, und bemerkt, dass für $h = 0$ und $h = 1$ dies wirklich der Fall ist.

Der nach dieser Division bleibende Quotient giebt, gleich 0 gesetzt, die gesuchte irreductible Gleichung, deren eine Wurzel cos am $\left(\frac{2k}{2m+1}, k\right)$ ist. Auf eine ganz ähnliche Weise erhält man eine Gleichung von demselben Grade, unter deren Wurzeln sin coam $\frac{2k}{2m+1}$ vorkommt, und deren Coefficienten rationale Functionen von k^2 sind. Man kann dieselbe jedoch auch geradezu aus der eben gefundenen ableiten. Es folgt nämlich aus der Formel auf der 72ten Seite der „Fundamenta nova"

$$\sin \operatorname{coam}(u, k) = \cos \operatorname{am}\left(k_1 u, \frac{ik}{k_1}\right),$$

die Gleichung

$$\frac{1}{k_1} \arg.\operatorname{am}\left(\tfrac{1}{2}\pi, \frac{ik}{k_1}\right) = K:$$

also auch folgende:

$$\sin \operatorname{coam}\left(\frac{2k}{2m+1}, k\right) = \cos \operatorname{am}\left(\frac{2 \arg.\operatorname{am}.\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{ik}{k_1}\right)}{2m+1}, \frac{ik}{k_1}\right).$$

Wenn man daher in der Gleichung, deren eine Wurzel $x = \cos \operatorname{am}\left(\frac{2k}{2m+1}, k\right)$ ist und die man durch

$$f(x, k^2) = 0$$

bezeichnen kann $-\frac{k^2}{k_1^2}$ statt k^2 setzt, so erhält man die Gleichung

$$f\left(x, -\frac{k^2}{k_1^2}\right) = 0,$$

deren eine Wurzel $x = \sin \operatorname{coam}\left(\frac{2k}{2m+1}, k\right)$ ist.

Setzt man der Kürze wegen wieder

$$c = \cos \operatorname{am}(u, k), \qquad s = \sin \operatorname{coam}(u, k),$$

so liefern die Formeln in §. 17. der „Fundamenta" sofort folgende:

$$k^2 = \frac{s^2 - c^2}{s^2(1-c^2)}, \qquad -\frac{k^2}{k_1^2} = \frac{c^2 - s^2}{c^2(1-s^2)},$$

woraus man sieht, dass zwischen s und c die beiden Gleichungen

$$f\left(c, \frac{s^2-c^2}{s^2(1-c^2)}\right) = 0, \qquad f\left(s, \frac{c^2-s^2}{c^2(1-s^2)}\right) = 0$$

bestehen, welche durch Vertauschung von s und c in einander übergehen.

Die gesuchte Bedingungsgleichung muss daher der gleich **0** gesetzte kleinste gemeinschaftliche Factor der Zähler von den Theilen links dieser beiden Gleichungen, und daher auch in Bezug auf s und c symmetrisch sein. Setzt man z. B. in der Gleichung (9.) $h = 0$, so giebt dieselbe

$$Z_2 N_1 + cZ_1 N_2 = 2c^2 - 1 + k^2(1-c^2)^2 + c(1-k^2(1-c^2)^2),$$

woraus folgt:

$$f(c, k^2) = \frac{Z_2 N_1 + cZ_1 N_2}{1+c} = -1 + 2c + k^2(1-c^2)(1-c)^2.$$

Hieraus folgt nun $= \frac{s^2-c^2}{s^2(1-c^2)}$ statt k_2 gesetzt, der Zähler

$$= (s^2-c^2)(1-c^2)(1-c)^2 - s^2(1-c^2)(1-2c).$$

Vertauscht man s und c, so erhält man den Ausdruck

$$(c^2-s^2)(1-s^2)(1-s)^2 - c^2(1-s^2)(1-2s).$$

Der gemeinschaftliche Factor dieser beiden Ausdrücke, welche wie leicht einzusehen in

$$c^2(1-c^2)(s^2-(1-c)^2), \qquad s^2(1-s^2)(c^2-(1-s)^2)$$

übergehen, ist $= s + c - 1$, und daher

$$10. \qquad s + c - 1 = 0$$

die für das Dreieck geltende Bedingungsgleichung.

III.

Die Aufsuchung des gemeinschaftlichen Factors zweier Ausdrücke ist mit einigen successiven Divisionen verbunden; daher werden folgende Bemerkungen nicht überflüssig sein. Die Gleichung

$$f(x, k^2) = 0,$$

unter deren Wurzeln $x = \cos \operatorname{am} \frac{2k}{2m+1}$ vorkommt und welche vom Grade $2m(m+1)$ ist, kann keinen in Bezug auf k^2 rationalen Factor haben; denn sonst wäre sie nicht irreductibel. Hieraus folgt, dass die zu suchende Bedingungsgleichung wenigstens vom

$$\tfrac{1}{2}m(m+1)\text{ten}$$

Grade in Bezug auf s sein muss; denn wäre sie von einem niedrigeren Grade, so würde man durch die Substitution, welche für $x = \cos \operatorname{am} \frac{2k}{2m+1}$ gültig ist,

$$s = s\,\frac{1-x^2}{x_1^2 + k^2 x^2},$$

also eine irrationale Gleichung zwischen x und k^2 erhalten, welche, weil die Bedingungsgleichung in Bezug auf s und c symmetrisch ist, auf eine rationale Gleichung führt die in Bezug auf x den Grad

$$2m(m+1)$$

nicht erreicht. Dies aber ist, wie man so eben sahe, unmöglich, wenn $2m+1$ eine Primzahl ist. Andrerseits sind die Ausdrücke (8. und 9.) in Bezug auf k^2 höchstens vom Grade $\frac{1}{2}m.(m+1)$. Setzt man daher

$$k^2 = \frac{s^2-c^2}{s^2(1-c^2)}$$

und bringt die Ausdrücke auf gleiche kleinste Benennung, so können die Zähler den Grad $\frac{1}{2}m(m+1)$ in Bezug auf s^2 nicht überschreiten. Dieselbe Function (8. oder 9.) ist in Bezug auf c nicht gerade, und kann auch durch die Division mit $1+c$ nicht in eine gerade Function von c übergehn, weil sonst die Wurzeln der Gleichung

$$f(x, k^2) = 0,$$

also die irrationalen Werthe in der Tafel (2.) paarweise gleich und entgegengesetzt sein müssten. Nach Einführung der Grösse s^2 statt k^2 kann der oben erwähnte Zähler keinen in Bezug auf s^2 rationalen Factor haben, weil die Gleichung $f(x, k^2) = 0$ irreductibel ist; aber er kann auch andrerseits seiner Unsymmetrie wegen nicht die gesuchte Bedingungsgleichung selbst geben, dadurch dass er $=0$ gesetzt wird. Es muss daher ein gleich 0 gesetzter Factor dieses Zählers die Bedingungsgleichung liefern, welcher in Bezug auf s nicht eine gerade Function ist. Wird die Bedingungsgleichung durch

$$F(c, s) = 0$$

bezeichnet, so muss das Product

$$F(c, s).\, F(c_1 - s)$$

ein Factor des eben erwähnten Zählers sein; und da letzterer den Grad

$$m(m+1)$$

in Bezug auf s nicht überschreitet, so kann auch

$$F(c, s)$$

in Bezug auf s oder c den Grad $\frac{1}{2}m(m+1)$ nicht überschreiten. Oben sah man aber, dass dieser Grad auch nicht kleiner als $\frac{1}{2}m(m+1)$ sein kann: also ist er

$$= \tfrac{1}{2}m(m+1).$$

Hieraus ergiebt sich zugleich eine Eigenschaft der obigen Geichung

$$f(x, k^2) = 0,$$

oder, was dasselbe ist, der Ausdrücke:

$$\frac{Z_{2h}N_{2h+1}+cZ_{2h+1}N_{2h}}{1+c} \text{ und}$$

$$\frac{Z_{2h+2}N_{2h+1}+cZ_{2h+1}N_{2h+2}}{1+c}.$$

Sie müssen nehmlich, wenn man

$$k^2=\frac{s^2-c^2}{s^2(1-c^2)}$$

setzt und auf gleiche Benennung bringt, solche Zähler geben, die nach Weglassung eines nur von c abhängigen Factors, in die Differenz zweier rationalen Quadrate zerlegbar sind, deren eines das Quadrat einer geraden, das andere das Quadrat einer ungeraden Function von s ist. Von den beiden hiedurch entstehenden Factoren liefert der eine, welcher in Bezug auf s und c symmetrisch ist, gleich 0 gesetzt, die gesuchte Bedingungsgleichung.

Ich werde auch diese Bemerkungen durch Beispiele bestätigen. Für $h=0$ war

$$0=\frac{Z_2N_1+cZ_1N_2}{1+c}=-1+2c+k^2(1-c^2)(1-c)^2.$$

Dieser Ausdruck liefert nach obiger Substitution wenn man den Factor $c^2(1-c^2)$ weglässt folgende Gleichung:

$$s^2-(1-c)^2=0;$$

aus welcher (da auch c nicht $=1+s$ sein kann, weil $c<1$ ist) für die gesuchte Bedingungsgleichung folgt:

$$1-s-c=0.$$

Für $h=1$, ist, mit Hülfe der Formeln (6 und 7):

$$\frac{Z_2N_3+cZ_3N_2}{1+c}$$

$$=\frac{(2c^2-N_2)N_3+c(4c^2N_2-2N_2^2-N_3)N_2}{1+c}$$

$$=2c^2N_2^2-2k^2c^2(1-c)(N_2^2-Z_2^2)-N_2N_3-2N_2^2c(1-c)(k_1^2+k^2c^2).$$

Dieser Ausdruck giebt, wenn man für N_2, Z_2, N_3 ihre Werthe schreibt und $k^2=\frac{s^2-c^2}{s^2(1-c^2)}$ setzt, die Gleichung:

$$c^6\{s^6-3s^4(1-c)^2+s^2(1-c)^2(3+2c+3c^2)-(1-c)^2(1+c)^4\}=0,$$

welche sich, nach Weglassung des Factors c^6, als die Summe zweier Quadrate

$$s^2(s^2-(1-c)^2)^2-(1-c)^2(s^2-(1+c)^2)^2=0$$

darstellt, so dass derjenige von ihren beiden Factoren, welcher in Bezug auf s und c symmetrisch ist, gleich 0 gesetzt, also der Factor:

11. $s(s^2-(1-c)^2)+(1-c)(s^2-(1+c)^2)=0$ *)

die Bedingungsgleichung für das **Fünfeck** ist.

IV.

Da von den beiden bisher vorgetragenenen Methoden, zu der gesuchten Bedingungsgleichung zu gelangen, die erste weitläuftige Rechnungen, die letzte noch eigene Kunstgriffe erfordert, so werde ich noch eine dritte mittheilen, durch welche die Aufgabe auf eine einmalige Division zurückgeführt wird, falls man sie, für das Vieleck mit zwei Seiten weniger, auf dieselbe Weise als gelöset annimmt.

Zu dem Ende werde ich die Formeln der Multiplication der elliptischen Functionen in einer eigenthümlichen Form darstellen, indem ich sie nur durch $c = \cos\mathrm{am}\, u$ und $s = \sin\mathrm{coam}\, u$ allein ausdrücke.

Es ergiebt sich aus dem Vorigen sofort, dass aus den Formeln für

$$\frac{\sin\mathrm{am}\, mu}{\sin\mathrm{am}\, u} \quad \text{und} \quad \cos\mathrm{am}\, mu\,,$$

die analogen für

$$\frac{\cos\mathrm{coam}\, mu}{\cos\mathrm{coam}\, u} \quad \text{und} \quad \sin\mathrm{coam}\, mu\,,$$

unmittelbar dadurch folgen, dass man in den ersteren die Grössen s und c mit einander vertauscht. Denn diese Vertauschung kommt auf die Vertauschung von k^2 mit $-\frac{k^2}{k_1^2}$ zurück, welche nach den Formeln des **31**ten § der „Fundamenta nova" die Vertauschung von

$$\sin\mathrm{am}\left(k_1 u, \frac{ik}{k_1}\right) \quad \text{mit} \quad \cos\mathrm{coam}\,(u,\ k)$$

$$\cos\mathrm{am}\left(k_1 u, \frac{ik}{k_1}\right) \quad \text{mit} \quad \sin\mathrm{coam}\,(u,\ k)$$

---

*) Dass gerade dieser Factor der zu wählende sei, lässt sich auch direct zeigen. Es ist

$$\sin^2\mathrm{coam}\,\tfrac{1}{2}k + \cos^2\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}k = 1,$$

also $$\sin\mathrm{coam}\,\tfrac{1}{2}k + \cos\mathrm{am}\,\tfrac{1}{2}k > 1 \quad \text{und}$$

$$0 < \sin\mathrm{coam}\,\frac{2k}{s} < 1 \quad , \quad 0 < \cos\mathrm{am}\,\frac{2k}{s} < 1\,.$$

folglich

$$s+1+c>0 \qquad s+1-c>0 \qquad s-1+c>0 \qquad s-1-c<0$$

und daher kann nicht $s(s^2-(1-c)^2)-(1-c)(s^2-(1+c)^2)=0$ sein.

$$\sin\mathrm{am}\left(mk_1u, \frac{ik}{k_1}\right) \text{ mit } \cos\mathrm{coam}(mu, k)$$

$$\cos\mathrm{am}\left(mk_1u, \frac{ik}{k_1}\right) \text{ mit } \sin\mathrm{coam}(mu, k)$$

mit sich führt. Hienach werde ich nur die Multiplicationsformeln und ihre Ableitung, für die beiden erstern Functionen aufstellen.

Aus den Formeln in §. 18 der „Fundamenta nova", ergeben sich nach kurzen Reductionen folgende:

$$12.\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\mathrm{am}2u}{\sin\mathrm{am}u} = \dfrac{2s}{1+s^2-c^2}, & \cos\mathrm{am}2u = \dfrac{-1+s^2+c^2}{1+s^2-c^2}, \\ \dfrac{\sin\mathrm{am}3u}{\sin\mathrm{am}u} = \dfrac{4s^2-(1+s^2-c^2)^2}{(1+s^2-c^2)^2-4(s^2-c^2)(1-c^2)}, & \dfrac{\cos\mathrm{am}3u}{c} = \dfrac{(1+s^2-c^2)^2-4(1-c^2)}{(1+s^2-c^2)^2-4(s^2-c^2)(1-c^2)}, \\ \dfrac{\sin\mathrm{am}2hu}{\sin\mathrm{am}u} = \dfrac{2\left(\frac{\sin\mathrm{am}hu}{\sin\mathrm{am}u}\right)\sin\mathrm{coam}hu}{\sin^2\mathrm{coam}hu+\sin^2\mathrm{am}hu}, & \cos\mathrm{am}2mu = \dfrac{\sin^2\mathrm{coam}mu-\sin^2\mathrm{am}mu}{\sin^2\mathrm{coam}mu+\sin^2\mathrm{am}mu} \\ \dfrac{\sin\mathrm{am}(2hu+1)u}{\sin\mathrm{am}u} = \dfrac{\frac{\sin^2\mathrm{am}(hu+1)u}{\sin^2\mathrm{am}u}-\frac{\sin^2\mathrm{am}hu}{\sin^2\mathrm{am}u}}{1-(s^2-c^2)\frac{\sin^2\mathrm{am}(h+1)u\sin^2\mathrm{am}hu}{s^2\sin^2\mathrm{am}u}}, \\ \dfrac{\cos\mathrm{am}(2h+1)u}{c} = \dfrac{\frac{2\cos\mathrm{am}(h+1)u\cos\mathrm{am}hu}{c}}{1-(s^2-c^2)\frac{\sin^2\mathrm{am}(h+1)u\sin^2\mathrm{am}hu}{s^2\sin^2\mathrm{am}u}}-1. \end{cases}$$

Aus denselben und aus den durch Vertauschung von s und c hieraus entstehenden folgt leicht durch eine der früher angewendeten ähnliche bekannte Schlussart dass, nach ausgeführten Substitutionen, Formeln von folgender Form hervorgehen

$$13.\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\mathrm{am}2hu}{\sin\mathrm{am}u} = s.\dfrac{S_{2h}}{N_{2h}}, & \cos\mathrm{am}2hu = \dfrac{Z_{2h}}{N_{2h}}, \\ \dfrac{\cos\mathrm{coam}2hu}{\cos\mathrm{coam}u} = c.\dfrac{S'_{2h}}{N'_{2h}}, & \sin\mathrm{coam}2hu = \dfrac{Z'_{2h}}{N'_{2h}}, \\ \dfrac{\sin\mathrm{am}(2h+1)u}{\sin\mathrm{am}u} = \dfrac{S_{2h+1}}{N_{2h+1}}, & \dfrac{\cos\mathrm{am}(2h+1)u}{c} = \dfrac{Z_{2h+1}}{N_{2h+1}}, \\ \dfrac{\cos\mathrm{coam}(2h+1)u}{\cos\mathrm{coam}u} = \dfrac{S'_{2h+1}}{N'_{2h+1}}, & \dfrac{\mathrm{sincoam}(2h+1)u}{s} = \dfrac{Z'_{2h+1}}{N'_{2h+1}}, \end{cases}$$

worin alle 12 grossen Buchstaben gerade und ganze rationale Functionen von s und c bedeuten, von denen

$$S_{2h}\ ,\quad S'_{2h}\ ,$$

den $2(h^2-1)$ten,

$$Z_{2h}\ ,\quad Z'_{2h}\ ,\quad N_{2h}\ ,\quad N'_{2h}\ ,$$

den $2h^2$ten und

$$S_{2h+1} \ , \quad S'_{2h+1} \ , \quad Z_{2h+1} \ , \quad Z'_{2h+1} \ , \quad N_{2h+1} \ , \quad N'_{2h+1} \ ,$$

den $2(h^2+)$ten Grad in Bezug auf jede der beiden Variabeln s und c nicht übersteigen.

Für die folgenden Betrachtungen sind noch die folgenden Formeln nöthig, welche man auch zum Beweise der oben ausgesprochenen Behauptungen benutzen kann nemlich:

Wenn h eine gerade Zahl ist, so ist

$$14. \quad \begin{cases} S_{2h} &= 2 S_h N_h Z'_h N'_h , \\ N_{2h} &= Z'_h Z'_h N_h N_h + s^2(1-c^2) S_h S_h N'_h N'_h , \\ S_{2h+1} &= S_{h+1} S_{h+1} N_h N_h - s^2 S_h S_h N_{h+1} N_{h+1} , \\ N_{2h+1} &= N_h N_h N_{h+1} N_{h+1} - (s^2-c^2)(1-c^2) S_h S_h S_{h+1} S_{h+1} , \end{cases}$$

und wenn h eine ungerade Zahl ist:

$$14a. \quad \begin{cases} S_{2h} &= 2 S_h Z'_h N_h N_h , \\ N_{2h} &= Z'_h Z'_h N_h N_h + (1-c^2) S_h S_h N'_h N'_h , \\ S_{2h+1} &= s^2 S_{h+1} S_{h+1} N_h N_h - S_h S_h N_{h+1} N_{h+1} , \\ N_{2h+1} &= N_h N_h N_{h+1} N_{h+1} - (s^2-c^2)(1-c^2) S_h S_h S_{h+1} S_{h+1} . \end{cases}$$

Ich stelle jetzt die beiden Ausdrücke

$$15. \quad 1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, 2hu}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} \cdot \frac{(1-\cos \mathrm{am}\, u)(\sin \mathrm{coam}\, u + \cos \mathrm{am}\, u)}{\sin \mathrm{coam}\, u}$$

$$16. \quad \frac{\sin^2 \mathrm{am}(2h+1)u}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} (1-\cos \mathrm{am}\, u)(\sin \mathrm{coam}\, u + \cos \mathrm{am}\, u) - \sin \mathrm{coam}\, u$$

auf. Beide verschwinden, je nachdem man

$$2m+1 = 4h+1 , \qquad \text{oder} \qquad = 4h+3 ,$$

setzt, für diejenigen Werthe von u, für welche der Ausdruck

$$17. \quad 1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, mu}{\sin \mathrm{am}\, u} \cdot \frac{(1-\cos \mathrm{am}\, u)(\cos \mathrm{am}\, u + \sin \mathrm{coam}\, u}{\sin \mathrm{coam}\, u}$$

verschwindet. Nun liefern die aus (12) folgenden Formeln

$$\cos \mathrm{am}\, 2v = \frac{-1 + \sin^2 \mathrm{coam}\, v + \cos^2 \mathrm{am}\, v}{1 + \sin^2 \mathrm{coam}\, v - \cos^2 \mathrm{am}\, v} ,$$

$$\sin \mathrm{coam}\, 2v = \frac{-1 + \sin^2 \mathrm{coam}\, v + \cos^2 \mathrm{am}\, v}{1 - \sin^2 \mathrm{coam}\, v + \cos^2 \mathrm{am}\, v} ,$$

die identische Gleichung

$$18. \quad 1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, v}{\sin^2 \mathrm{am}\, 2v} \cdot \frac{(1+\cos \mathrm{am}\, 2v)(\cos \mathrm{am}\, 2v + \sin \mathrm{coam}\, 2v)}{\sin \mathrm{coam}\, 2v} = 0 .$$

Setzt man hierin $v = mu$, wo u einen der $m(m+1)$ Werthe

$$19.\quad \begin{cases} \frac{2k}{2m+1}, & \frac{6k}{2m+1}, & \frac{(4m-2)k}{2m+1}, \\ \frac{2k+4ik_1}{2m+1}, & 3\cdot\frac{2k+4ik_1}{2m+1}, & (2m-1)\frac{2k+4ik_1}{2m+1}, \\ \dots\dots\dots\

$$\begin{aligned}
\sin^2 \mathrm{am}\, v &= +\sin^2 \mathrm{am}\, mu, \\
\sin^2 \mathrm{am}\, 2v &= +\sin^2 \mathrm{am}\, u, \\
\cos \mathrm{am}\, 2v &= -\cos \mathrm{am}\, u, \\
\sin \mathrm{coam}\, 2v &= +\sin \mathrm{coam}\, u.
\end{aligned}$$

Derselbe Ausdruck 21) verschwindet ausserdem, wenn m ungerade ist, für $u = k$.

Es versteht sich von selbst, dass man zu jedem dieser Werthe noch ein beliebiges Vielfache des Index hinzufügen kann, um welchen die Functionen:

$$\cos \mathrm{am}\, u \quad , \quad \sin \mathrm{coam}\, u$$

zugleich periodisch sind, also:

$$4Hk \pm 4iH_1 k_1,$$

wo H und H_1 beliebige ganze Zahlen sind.

Führt man in den Ausdruck 17) die Formeln 13) ein, so erhält man rationale Functionen von s und c, deren Zähler, je nachdem m gerade oder ungerade ist, die Form haben:

$$N_m^2 - s(1-c)(c+s)S_m^2 \text{ und}$$

24. $$(1-c)(c+s)S_m^2 - sN_m^2.$$

Es lässt sich sogleich algebraisch nachweisen, dass und wie der letztere dieser beiden Ausdrücke durch c ohne Rest getheilt werden kann. Zu dem Ende setze man $m = 2h+1$ und benutze die identische Gleichung

$$\frac{(1-c)(c+s)\,S_{2h+1}^2 - sN_{2h+1}^2}{c}$$

$$= (1-c-s)S_{2h+1}^2 - s\,.\,c\frac{N_{2h+1}^2 - S_{2h+1}^2}{c^2}\,.$$

Dieselbe lehrt, dass jene Eigenschaft Statt findet, sobald

$$\frac{N_{2h+1}^2 - S_{2h+1}^2}{c^2}$$

durch c ohne Rest theilbar ist. Nun liefern die Formeln 14), für ein gerades und ein ungerades h respective folgende:

$$\frac{N_{2h+1} + S_{2h+1}}{c^2} = \frac{N_h^2 - S_h^2}{c^2}\,.\,(N_{h+1}^2 - s^2 S_{h+1}^2) + (1-c^2-s^2)S_h^2 S_{h+1}^2, \text{ und}$$

$$\frac{N_{2h+1} - S_{2h+1}}{c^2} = \frac{N_{h+1}^2 - S_{h+1}^2}{c^2}\,.\,(N_h^2 - s^2 S_h^2) + (1-c^2-s^2)S_h^2 S_{h+1}^2\,;$$

woraus man sofort sieht, dass

$$\frac{N_{2h+1}^2 - S_{2h+1}^2}{c^2}$$

eine ganze Function ist, sobald, je nachdem h gerade oder ungerade ist,

$$\frac{N_{h+1}^2 - S_{h+1}^2}{c^2} \quad \text{oder} \quad \frac{N_h^2 - S_h^2}{c^2}$$

ganze Functionen sind. Für $h = 1$, und $h = 3$, findet aber, weil

$$\frac{N_1^2 - S_1^2}{c^2} = 0 \quad , \quad \text{und}$$

$$\frac{N_3^2 - S_3^2}{c^2} = 8(1 - c^2 + s^2)(1 - c^2 - s^2)(1 + c^2 - s^2) ,$$

ist, diese Eigenschaft Statt: also gilt sie allgemein.

Hienach sind die Ausdrücke

$$25. \quad N_m^2 - s(1-c)(c+s) S_m^2 \quad \text{und}$$

$$26. \quad \frac{(1-c)(c+s)S_m^2 - sN_m^2}{c} ,$$

je nachdem m gerade oder ungerade ist, ganze rationale Functionen von c und s, welche, wie man aus dem oben angeführten Grade der Functionen S und N sieht, sowohl in Bezug auf c, als in Bezug auf s, vom m^2ten Grade sind. Die gleichen Eigenschaften besitzen die Ausdrücke:

$$25'. \quad N_m^2 + s(1-c)(c-s) S_m^2 \quad \text{und}$$

$$26'. \quad \frac{(1-c)(c-s)S_m^2 + sN_m^2}{c} ,$$

welche aus den vorigen dadurch entstehen, dass man das Zeichen von s ändert.

Nach dem Vorigen müssen die Ausdrücke 25) und 26) verschwinden, wenn man

$$c = \cos\mathrm{am}\, u \qquad \text{und} \qquad s = \sin\mathrm{coam}\, u ,$$

setzt, wo u ein beliebiger von den $2m^2$ Werthen 19) und 20) ist. Eben so verschwinden die Ausdrücke 25' und 26' für diese Werthe von c und s, wenn u ein beliebiger der $2m^2$ Werthe 22 und 23 ist. Multiplicirt man daher die Ausdrücke

25) und 25'), wenn m gerade ist und

26) und 26'), wenn m ungerade ist,

und formt die Producte durch Einführung der Formel

$$s^2 = \frac{c}{k_1^2 + k^2 c^2}$$

in eine in Bezug auf c rationale Function um, so kommen alle verschiedenen Werthe von c, für welche diese Producte verschwinden, auf $c = \cos\mathrm{am}\, u$ zurück; wo für u einer der $4m^2$ Werthe aus 19) 20) 22) 23) gesetzt werden kann. Die Zähler dieser Producte sind aber, wie man sich leicht überzeugt, vom Grade $4m^2$ in Bezug auf c; daher sind jene $4m^2$ verschiedenen $\cos\mathrm{am}$ die Wurzeln der Gleichung, welche man dadurch erhält, dass man diese Zähler gleich 0 setzt. Ich bezeichne diese Gleichung der Kürze wegen durch

$$\Sigma_{2m+1} = 0.$$

Bildet man dieselben Gleichungen für $2m-1$, so erhält man

$$\Sigma_{2m-1} = 0,$$

als eine Gleichung vom $4(m-1)^2$ten Grade in Bezug auf c, welche mit der vorigen die Wurzeln $c = \cos\mathrm{am}\, u$ gemein hat; wo u einer der $2m(m-1)$ Werthe 20) und 23) ist. Dieselben stimmen mit den $2m(m-1)$ irrationalen Werthen der Tafel 2 überein, wenn man daselbst $m-1$ statt m setzt; die übrig bleibenden Wurzeln der Gleichung $\Sigma_{2m+1} = 0$ sind die $2m(m+1)$ rationalen Werthe der Tafel 2 selbst, und die übrig bleibenden Wurzeln der Gleichung

$$\Sigma_{2m-1} = 0$$

stimmen mit den $2(m-1)(m-2)$ irrationalen Werthen überein, welche man aus 2) erhält, wenn man statt m, $m-2$ setzt.

Nach dem Vorigen haben die Ausdrücke

$$\Sigma_{2m+1} \qquad \text{und} \qquad \Sigma_{2m-1}$$

einen gemeinschaftlichen Factor, welcher, gleich 0 gesetzt, die Gleichung vom $2m(m-1)$ Grade giebt, deren eine Wurzel $\cos\mathrm{am}\,\frac{2k}{2m-1}$ ist. Der dann übrig bleibende Factor von Σ_{2m+1}, gleich 0 gesetzt, giebt die Gleichung vom $2m(m+1)$ten Grade, deren Wurzel $\cos\mathrm{am}\,\frac{2k}{2m+1}$ ist.

Jede dieser Gleichungen lässt sich aber nach dem Vorigen in zwei Factoren zerlegen, welche in Bezug auf s und c rational sind, und in einander dadurch übergehen, dass man das Zeichen von s ändert. Σ_{2m+1} wird nämlich in die Factoren **25** und **25′** und **26** und **26′** zerlegt, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Eben so zerlegt man Σ_{2m-1} respective in die Factoren

27. $\dfrac{(1-c)(c+s)S_{m-1}^2 - sN_{m+1}^2}{c}$, 27′. $\dfrac{(1-c)(c-s)S_{m-1}^2 + sN_{m-1}^2}{c}$,

28. $N_{m-1}^2 - s(1-c)(c+s)S_{m-1}^2$, 28′. $N_{m-1}^2 + s(1-c)(c-s)S_{m-1}^2$.

Aus dem Bisherigen schliesse ich, dass der Ausdruck **25)** einen in Bezug auf s und c rationalen Factor vom $\frac{1}{2}m(m-1)$ten Grade mit dem Producte der Ausdrücke 27 und 27′ gemein haben muss; und eben so der Ausdruck **25′**. Nun kann aber der Ausdruck **25** keinen Factor mit **27′** gemein haben, welcher für dieselben $m(m-1)$ zusammengehörigen je zwei Werthe

$$s = \sin\mathrm{coam}\, u \qquad \text{und} \qquad c = \cos\mathrm{am}\, u,$$

wo u einer der $m(m-1)$ Werthe **19)** ist, verschwindet, weil **27′** dafür nicht verschwindet: also müssen die Ausdrücke **25)** und **27)** einen gemeinschaftlichen

Factor vom Grade $\frac{1}{2}m(m-1)$ in Bezug auf s und c gemein haben. Dasselbe gilt von den Ausdrücken 26) und 28). Hat man durch diesen Factor die Ausdrücke 25) oder 26) dividirt, so erhält man, dadurch dass man den Quotienten $= 0$ setzt, eine Bedingungsgleichung zwischen

$$\cos\mathrm{am}\frac{2k}{2m+1} \quad \text{und} \quad \sin\mathrm{coam}\frac{2k}{2m+1}.$$

Sie ist, wenn $2m+1$ eine Primzahl ist, zugleich die einfachste gesuchte Bedingungsgleichung für das $2m+1$ Eck.

Ebenso giebt der $= 0$ gesetzte gemeinschaftliche Factor eine Bedingungsgleichung zwischen

$$\cos\mathrm{am}\frac{2k}{2m-1} \quad \text{und} \quad \sin\mathrm{coam}\frac{2k}{2m-1}.$$

Wäre man statt von dem Ausdruck 17), von dem durch Vertauschung von $\cos\mathrm{am}\,u$ mit $\sin\mathrm{coam}\,u$ entstehenden analogen Ausdruck

$$1-\frac{\cos^2\mathrm{coam}\,mu}{\cos^2\mathrm{coam}\,u}\cdot\frac{(1-\sin\mathrm{coam}\,u)(\sin\mathrm{coam}\,u+\cos\mathrm{am}\,u)}{\cos\mathrm{am}\,u},$$

ausgegangen, so würde man zu eben solchen Gleichungen gelangt sein und daraus den Schluss ziehen, dass letztere in Bezug auf s und c symmetrisch sind.

Nach allen diesen Betrachtungen gelangt man zur folgenden ganz bestimmten Methode, um die Bedingungsgleichungen für das $4h+3$ Eck und $4h+1$ Eck zu erhalten.

Man stelle die Ausdrücke auf:

$$\frac{(1-c)(c+s)S_{2h+1}^2-sN_{2h+1}^2}{c} \quad \text{und}$$

$$N_{2h}^2-s(1-c)(c+s)S_{2h}^2,$$

und bestimme darin die Grössen S und N mit Hülfe der Formeln 14), der Reihe nach für

$$h=0 \quad , \quad h=1 \quad , \quad h=2 \ldots\ldots h=h.$$

Die sich ergebenden Ausdrücke seien der Reihe nach

$$T_3 \ , \ T_5 \ , \ T_7 \ldots\ldots , \qquad T_{4h+1} \ , \ T_{4h+3} \ ;$$

Man setze die Quotienten

$$\frac{T_3}{1}=p_3 \ , \ \frac{T_5}{p_3}=p_5 \ , \ \frac{T_7}{p_5}=p_7\ldots\ldots \qquad \frac{T_{4h+1}}{p_{4h-1}}=p_{4h+1} \ , \ \frac{T_{4h+3}}{p_{4h+1}}=p_{4h+3}$$

so ist, falls $4h+1$ eine Primzahl ist,

$$p_{4h+1}=0$$

die für das $4h+1$ Eck, und falls $4h+3$ eine Primzahl ist,

$$p_{4h+3}=0$$

die für das $4h+3$Eck geltende Bedingungsgleichung, wenn man

$$s = \frac{r}{R-a} \quad , \quad c = \frac{r}{R+a} \, ,$$

setzt. Die resultirende Gleichung ist stets in Bezug auf s und c symmetrisch und vom Grade $\frac{1}{2}m(m+1)$ für das $2m+1$Eck und geht daher, durch

$$(sc)^{\frac{1}{2}m(m+1)}$$

dividirt, in eine in Bezug auf $\frac{R}{r}$ und $\frac{a}{r}$ ganze Function über.

Die oben vorkommenden Divisionen werden am einfachsten dadurch ausgeführt, dass man den Divisor und Dividend, da sie beide symmetrische Functionen von s und c sind, durch

$$s+c=\sigma \qquad sc=\pi$$

ausdrückt und nach Potenzen von π ordnet.

Ich werde das Vorige durch einige Beispiele erläutern, welche sich auf das Dreieck, Fünfeck, und Siebeneck beziehen.

Für das Dreieck

ist: $$T_3 = \frac{(1-c)(c+s)S_1^2 - sN_1^2}{c}, \quad \text{und}$$

$$S_1 = c \quad , \quad N_1 = 1 \, ,$$

folglich $$T_1 = 1-s-c.$$

Also ist $$1-\sigma = 0,$$

die gesuchte Bedingungsgleichung für das Dreieck.

Für das Fünfeck

ist $$T_5 = N_2^2 - s(1-c)(c+s)S_2^2,$$

$$S_2 = 2 \quad , \quad N_2 = 1+s^2-c^2;$$

folglich $$T_5 = (1+s^2-c^2)^2 - 4s(1-c)(c+s).$$

Nach Einführung von σ und π, ist

$$T_5 = (1-\sigma^2)^2 + 4(1-b)\sigma\pi$$

und hienach $$p_5 = \frac{T_5}{p_3} = (1+b)^2(1-b) + 4b\pi;$$

also ist die Bedingungsgleichung für das Fünfeck:

$$(1+b)^2(1-\sigma) + 4b\pi = 0.$$

Sie lässt sich auch in der Form $(1+\sigma)(1-b^2+4\pi) - 4\pi = 0$ schreiben.

Die erstere giebt die Bedingungsgleichung

$$(R^2-a^2+2Rr)^2(R^2-a^2-2Rr) + 8Rr^3(R^2-a^2) = 0;$$

die letztere dieselbe in der Form

$$(R^2+a^2+2Rr)(R^2-a^2+2ra)(R^2-a^2-2ra)-4(R^2-a^2)^2r^2=0.$$

Für das Siebeneck

ist $$T_5=\frac{(1-c)(c+s)S_3^2-sN_3^2}{c}$$
$$=(1-s-c)S_3^2-sc\cdot\frac{N_3^2-S_3^2}{c^2}.$$

Es ist aber aus den frühern Formeln

$$S_3=4s^2-(1+s^2-c^2)^2 \quad , \quad N_3=(1+s^2-c^2)^2-4(s^2-c^2)(1-c^2) \text{ und}$$
$$\frac{N_3^2-S_3^2}{c^2}=8(1-s^2-c^2)(1+s^2-c^2)(1-s^2+c^2).$$

Folglich erhält man

$$T_7=(1-s-c)[4s^2-(1+s^2-c^2)^2]^2-8sc(1-s^2-c^2)(1+s^2-c^2)(1-s^2+c^2).$$

Führt man hier die σ und π ein, so erhält man:

$$T=(1-b)[(1-b^2)^2+4(1-b^2)\pi]^2-8\pi[1-b^2+2\pi][1-b^4+4b^2\pi],$$

woraus dann endlich die Bedingungsgleichung für das Siebeneck

$$p_7=\frac{T_7}{p_5}=(1-b)^4(1+b)^2-4\pi\sigma(1-b^2)(3-b)-16\sigma\pi^2=0$$

folgt. Dieselbe geht nach einigen Reductionen in folgende über:

$$\{1-(c+s)^2\}\{1-(c^2-s^2)^2\}-2(c+s)\{1-(c-s)^2\}\{1-c^2-s^2\}=0$$

und giebt, durch c^6s^6 dividirt, nach Einführung von R, a, r folgende:

$$0=[(R^2-a^2)^2-4R^2r^2][(R^2-a^2)^4-16R^2a^2r^4]$$
$$-4Rr^3[(R^2-a^2)^2-4a^2r^2][(R^2-a^2)^2-2(R^2+a^2)r^2].$$

Anmerkungsweise füge ich hinzu, dass, falls $4h+1$ oder $4h+3$ keine Primzahlen sind, die hier beschriebene Methode nicht die einfachsten Bedingungsgleichungen liefert. Man ist aber leicht im Stande, mit Hülfe der folgenden Betrachtung die einfachsten Bedingungen für das $2m+1$ Eck aus der Gleichung $T_{2m+1}=0$,
mit Hinzuziehung der Bedingungsgleichungen für diejenigen Vielecke, deren Seitenanzahl Factoren von $2m+1$ sind, und umgekehrt, abzuleiten.

Es sei nehmlich $2m+1=p.q$,
so muss der Ausdruck T_{m+1} ausser dem Factor p_{2m-1} noch den Factor p_p enthalten. Diese Behauptung lässt sich dadurch begründen, dass die Gleichung:

$$1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,mu}{\sin^2\mathrm{am}\,u}\cdot\frac{(1-\cos\mathrm{am}\,u)(\cos\mathrm{am}\,u+\sin\mathrm{coam}\,u)}{\sin\mathrm{coam}\,u}=0\ ,$$

ausser durch $u=\frac{2k}{2m+1}$ und $u=\frac{2k}{2m-1}$, auch durch: $u=\frac{2k}{p}$,
befriedigt wird.

Als Beispiel diene die Bestimmung der Bedingungsgleichung für das Neuneck, welche hienach $\frac{T_9}{p_3 p_7} = 0$ sein muss. In der That ist:

$$T_9 = N_4^2 - s(1-c)(c+s)S_4^2,$$
$$S_4 = 4(1-s^2-c^2)(1+s^2-c^2)(1-s^2+c^2)$$
$$N_4 = 4s^2(1-c^2)(1-s^2+c^2)^2+(1+s^2-c^2)^2(1-s^2-c^2)^2.$$

Hieraus folgt: $T_9 = 16s(1-c)(c+s)(1-s^2-c^2)^2(1+s^2-c^2)^2(1-s^2+c^2)^2$
$$-\{4s^2(1-c^2)(1-s^2+c^2)^2+(1+s^2-c^2)^2(1-s^2-c^2)^2\}^2.$$

Dass dieser Ausdruck durch $p_3 = 1-s-c$ theilbar ist, ergiebt sich durch die Umformung:

$$T_9 = 16cs(1-s-c)(1-s^2-c^2)^2(1+s^2-c^2)^2(1-s^2+c^2)^2 - PQRS,$$

worin der Kürze wegen

$$P = 2sc(1-s^2+c^2)-2s(1-s^2+c^2)+(1+s^2-c^2)(1-s^2-c^2),$$
$$Q = 2sc(1-s^2+c^2)+2s(1-s^2+c^2)-(1+s^2-c^2)(1-s^2-c^2),$$
$$R = 2sc(1-s^2+c^2)+2s(1-s^2+c^2)-(1+s^2-c^2)(1-s^2-c^2),$$
$$S = 2sc(1-s^2+c^2)+2s(1-s^2+c^2)+(1+s^2-c^2)(1-s^2-c^2).$$

gesetzt ist. Es lassen sich aber P, Q, R, S noch weiter in Factoren zerlegen; nemlich:

$$P = +(1-s-c)[1-(s-c)^2-(s-c)(1-(s+c)^2)],$$
$$Q = -(1-s-c)[1-(s+c)^2-(s+c)(1-(s-c)^2)],$$
$$R = -(1+s-c)[1-(s+c)^2+(s+c)(1-(s-c)^2)],$$
$$S = +(1+s+c)[1-(s-c)^2+(s-c)(1-(s+c)^2)].$$

Man sieht hieraus, dass der Quotient $\frac{T_9}{p_3}$ in folgende Form übergeht:

$$\frac{T_9}{p_3} = 16sc(1-s^2-c^2)^2(1+s^2-c^2)^2(1-s^2+c^2)^2$$
$$-(1+s+c)(1-(s-c)^2)[(1-(s-c)^2)^2-(s-c)^2(1-(s+c)^2)^2][(1-(s+c)^2)^2-(s+c)^2(1-(s-c)^2)^2].$$

Derselbe lässt sich noch durch p_7 ohne Rest theilen und liefert dann für das Neuneck die Bedingungsgleichung $\frac{T_9}{p_3 p_7} = 0$,

welche sich auch, wie oben erwähnt, direct aus der Bedingungsgleichung für das Dreieck mit Hülfe der Formeln für die Verdreifachung ableiten lässt, nehmlich folgender:

$$\{(1+s^2-c^2)^2-4(s^2-c^2)(1-c^2)\}\{(1-s^2+c^2)^2-4(c^2-s^2)(1-s^2)\}$$
$$(s+c)(1-(s-c)^2)^2(3-2(s^2+c^2)-(s^2-c^2)^2) = 0.$$

Dieselbe geht nach Einführung von R, a, r in folgende über:

$$(R^2-a^2)[((R^2-a^2)^2-16Rar^2)^2+16Ra(R-a)^2r^4][((R^2-a^2)^2+16Rar^2)^2-16Ra(R+a)^2r^4]$$
$$+2Rr(R^2-a^2)^2-4a^2r^2)^2[3(R^2-a^2)^4-4(R^2-a^2)^2(R^2+a^2)r^2-16R^2a^2r^4] = 0.$$

Königsberg den 24. März 1848.

Druck von J. Petsch in Berlin.

Als Bei
Neuneck, wel

Hieraus folgt:

Dass dieser Au
Umformung:
$T_9 = 16cs$
worin der Kür
$P = 2s$
$Q = 2s$
$R = 2s$
$S = 2s$
gesetzt ist. Es l
$P =$
$Q =$
$R =$
$S =$

Man sieht hiera
$\frac{T_9}{p_3}$
$-(1+s+c)(1-(s$
Derselbe

für das Neunec

welche sich auch
eck mit Hülfe de
$\{(1+s^2-$
$(s$
Dieselbe geht
$(R^2-a^2)[((R^2-a$
$+2Rr(R^2-a$
Königsb

Crelle Journal d. Math. Bd. 38. Heft 1.

Fac-simile einer Ham

Io li faccio cõpagnia nella debolez
quãto piu presto mi fà soppraggi
à penare piu assai, che nõ resta
il tutto rege, e passiamocela cõ q
di animo, che sia possibile nel nro
me, e cõ questo finisco baciandole
Di Bologna il 1° di Giugno 163
D. V. S. M. Ill.re et Ecc.ma

andschrift von Cavalieri

lizza de piedi, tãto à me piu dolorosa
giũta, restãdomi a ragione di natura
ta à lei. Lasciamoci gouernare à chi
quella maggiore trãquillità, e frãchezza
rõ stato, che tãto desidero à lei, et à
e affettuosamẽte le mani, e ricordle deu.mo ser.
638

Deu.mo et Pl.mo Ser.re ad.mo
F. Bon.ta Cavalieri.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 38. Heft 2.

Fac-simile einer Handschr

Theoriae transcend

primi ordinis adumbr

Ser A. G

Quam theoriae transcen
longo tempore geometras defatigaverit, cujus
praeterito ab Academ. Paris. propositu
isse ante hos septem vel octo
tavi. Etenim quum functionibus ellipticis
methodo ab Abelianae illa et Jacobiana omnino
fuit quin animadverterem, hanc methodum
amplect
parum, imo omnium quae ex integratione q
Has meas lucubrationes cum geometris
ut aliquando tempus daretur, quo
et attentione doctorum dignen
prodierunt nuperrime in lucem bi
annis abhinc ad Dm Jacob. data
me de transcendentibus altioribus
theoria functionum ellipticarum
esset, ut mihi eandem viam
ipse absolverem. Quamobrem, ne m
quam omnino nihil dicere ma
se idem in theoria transcen
non posse fassus est. Constit
ell
constitui
manissime adjuvante, theoriae
quantulumcunque est; in quo con
optabam festinandum fuisset, si q
est, veniam lectorum pro sua bene
precor. Viam autem, quam hic geom
et excolandam relinquo, fortuna

...chrift von A. Göpel.

...endentium Abelianarum
...bratio levis.

Göpel

...scendentium Abelianarum ~~[illegible]~~ jam in lea
...ist reinice anniles et praemium anno
...tum testes sunt amplissimi; ita ~~[illegible]~~ et
...to annos nonnulle in hac re excogi
...is operam darem, statim ~~[illegible]~~ daprehendi eas
...no diversa tractari posse. Neque longum
...m ~~[illegible]~~ quaestiones multo generatiores ~~[illegible]~~
...et ~~[illegible]~~ et fundamentum esce theoriae transcendentium Abelia
... quantitatum ~~[illegible]~~ algebraicarum oriuntur.
~~[illegible]~~
...is communicare in dies distuli, sperans
~~[illegible]~~ dissertationem accurate elaborare
...em offerre ~~[illegible]~~ possem; praesertim quum analystarum neminem ~~[illegible]~~ tractationem ac suspicari quidem viderem. Verumtamen
...iuae epistolae Dni Hermite tribus
...ae (cf. T. 33 hujus diarii) in quibus quam plura doctissi-
...s disputavit, tum nonnulla ~~[illegible]~~
... proposuit, quae meis tam similia
...n ingredi videretur, quae ~~[illegible]~~
...mee ~~[illegible]~~ obsolescerent, incomte.
...alui; quanquam doctissimus vi-
...dentium Abelianarum adhuc praeterea
~~[illegible]~~
...ditor ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~
... itaque, editore hujus diarii ho-
...e novae specimen aliquod tradere,
...nscribendo quum ~~[illegible]~~ magis quam
... quid minus lucide et concinne dictum
...evolentia et illa rei conditione ~~[illegible]~~ im-
...metris patefaci, aliis persequendam
...tis, quibus "Deus haec otia fecit"

Crelle, Journal d. Math. Bd. 38. Heft 3.

Fac-simile einer

Wohlgebohrner Herr
Hochzuverehrender Herr Professor

Hr. Prof. Pfaff schrieb mir
halten habe: Euer Wohlgeboren wun
velle en Algebre; und Nachricht von de
des Ausdrucks der Fläche eines Dreyecks d
Ersuchen Theil genommen hatte.

Beyliegend habe ich die Ehre Ihnen
aus dem algebraischen Theil der Schrift
tuela (Hist. des Math. Nouv. Edit. T. II. p.
richtig. Nur hätte er bey der Erwähnung
der eine Hauptheil desselben, wie der Verf
Er theilt nämlich seinen Beweis in Lire

Handschrift von Pfleiderer.

Tübingen den 21 Decemb. 1801.

...ssor

...mir in einem Briefe, den ich vor einigen Wochen ...
...ünschten einen Auszug aus Alb. Girards Inventaire nou-
... dem Resultat meiner Nachforschungen über die Geschichte
... durch seine drey Seiten, woran er selbst ehemals auf mein

... den von Herrn Repetent Hauber verfertigten Auszug
...ll von Girard zu überschicken. Die Nachricht, welche Mon-
...p. 8. h.) von dem trigonometrischen Theil derselben giebt, ist
...ung des Girardischen Beweises hinzusetzen können, daß
...Verf. selbst anerkennt, nicht ganz geometrisch strenge ist.
...ier Theile mit folgenden Aufschriften:

Pfleiderer

Fac-simile einer

Lieb

Meinen Herzenswunsch wünsche ich, dass ich Ihnen
an meinem Pfingstfeste sagen, meinen innigsten
ich kann Ihnen aber nicht sagen, wie Ihnen
die ausgesprochene Gemeinschaft bisher war, das
gemacht haben. Ich wollte Ihnen recht viel
Herzen Blumen entpflanzen wollen, um recht
die Festzeit schön zu machen.
Auf meine Briefe habe ich viel Ihnen gesen
so viel das nicht viel interessirt. Aber
wie mein Glauben ist, dass combinatorisch einan
für sich besonders [illegible] Theil der Analysis
fällen Gesichtspunkten Hindernisse zu klassen, die
Probe zu geben, dass ich mich auch Ihnen einzi
Zeit mittheilen, die ich gefunden habe, w
für bekannt sind.

1°. $\begin{pmatrix} a & \beta & \gamma & \cdots & \omega \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}^m = x^m + m\left(\alpha x^m + \right.$

wo $\alpha^m(\beta\gamma x) = \rho\alpha^{m-2} + \gamma\alpha^{m-3} + \delta^m\alpha$

2°. Wird man die Gleichung $a - b + c$

$q^\nu = \rho^\nu K_1 + \nu\left\{\frac{\rho^{\nu+1}}{\nu+} K_2 + \frac{\rho^{\nu+}}{\nu}\right.$

Leicht wird man Tag sich leicht folgern

$q^\nu = \alpha^\nu + \nu\left(x^{K_1} y + \frac{\partial(\alpha^{\nu-1} y^1)}{\cdot 2\,\partial x}\right.$

wobei man sucht wird leicht kennt m
Sätze zu finden.

3°. Wird $\alpha - \rho x + \gamma x^2 \cdots \pm \alpha^{m} x^{n-2}$

$\frac{1}{\rho^m} + \frac{1}{q^m} + \frac{1}{r^m} \cdots = \frac{1}{\rho^m} =$

wo $\mu^m + q^m + \nu^m \cdots + \rho^m =$

Hieraus finden sich leicht, die
dass die Lemb. Bernhyl. werden

$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \text{etc} \cdots =$

ferner $\frac{1}{x} \log x = \frac{1}{x} - 2\left(\frac{1}{1^2}\right)x +$

$\begin{pmatrix} a & \beta & \gamma & \cdots & \omega \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$

.....

...r Handschrift von Buzengeiger.

...ben Hr Professor

...ssen bisdaher auf nicht geschrieben haben, da Sie so viel Antheil ... Freunden, während unsers dortigen Aufenthalts aufzuopfern. ... meine Schreiben Anfangs darüber anfängt, gewiss sonderbar ... scheinen wird, so haben wir doch nicht die Idee behaupten hören die wir dabei ...schreiben aber da wir viel beisammen geschrieben haben, wie auch dem ...st und süssen zu schreiben, so haben wir uns entschlossen, wie den ...

...n. Aufg. auszulassen, wenn denn wir aber Ihnen nicht sagen wollen wozu ... sein haben wir wie denn die Abfassung von Briefe vorgenommen ...alysis auf den Grund gehen; also wird vorher Ihnen mein eigenes ...sis die Bisdaher mangeln. Wie ist doch nun auch Gelegenheit und ... denn wir haben gar nichts als diese Abfassung. Nun Ihnen aber mein ...zigen Beifalls niemals recht gewiss bleibt haben, will ich Ihnen folgende ..., wie: Die ... muss Ihnen gebotten haben. mein Wunder zu sagen, ob

$$\varphi(x) + \frac{d(\alpha^{m+1}(\varphi\delta)^2)}{2d\alpha} + \frac{d^2(\alpha^{m+2}(\varphi\delta)^3)}{2\cdot 3\,d\alpha^2} + \frac{d^3(\alpha^{m+3}(\varphi\delta)^n)}{2\cdot 3\cdot 4\,d\alpha^3} - \dots \Big)$$

α^m ..... $px+\nu$. Jedes Formul also wenden Mapliar potenzen von α nicht mitgenommen

$+cx^2-dx^3$ .... $=0$ hat wie ein Wurzel die selben $= q$ so

$\frac{p^{\nu+2}K^3}{\nu+2} + \frac{p^{\nu+3}K^4}{\nu+3}$ + etc ... $=0$) ; $p\left[\frac{a}{b}, 0\ \frac{c}{b} - \frac{d}{b}\ +\frac{e}{b} \dots\right]$

Jgendem fortlaufen lässt, nemlich

$y^1) + \frac{d^2(\alpha^2 y^3)}{1\cdot 2\, d\alpha^2} \dots$) wo $\alpha = \frac{x}{b}$ wird $y = \alpha\alpha' A + \alpha^2\alpha'^2 A + \alpha^3\alpha'^3 A$ + etc $\left(0, \frac{c}{b}, -\frac{d}{b}, +\frac{e}{b}\right)$

d wie fasse Wege die Comb. Analysis geht, wissen auch algebr. analysl.

$x^{n-2} \mp \alpha x^{n-1} \pm x^n = 0$ deren Wurz. gelte $p.q.r \dots p$ sind so

$= \left(\begin{matrix} i^n \\ +\frac{l}{a}; -\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\delta}{\alpha} \dots \mp \frac{\alpha^n}{\alpha} ; \pm \frac{\alpha^n}{\alpha^{n-1}} \mp \frac{\alpha^n}{\alpha^n} \\ i^n \end{matrix}\right)$

$= \left(\pm\alpha^n \mp \alpha^{n-1} \dots \gamma_{n-2}, \alpha^{n-1}, \alpha^n\right)$

Die Newtonische formeln, so dass also die absolut auf die einfachsten Art ...dimensionen werden. Hieraus folgen folgende Gesätze

$= i^m]\ \pi^{2m}$ wo $a = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ $b = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ $c = \frac{1}{1\cdot 2 \dots 9}$ etc

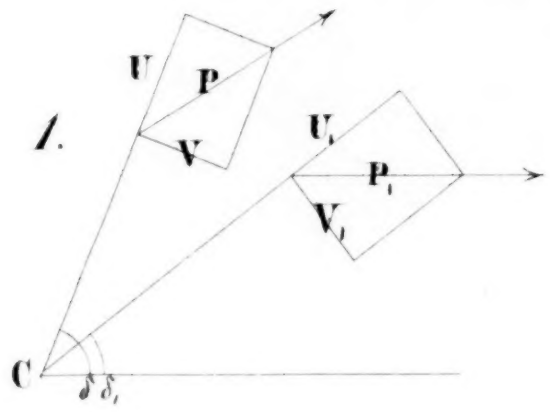
$\left(\begin{matrix} a.b.c \dots \\ 1.2.3 \dots \end{matrix}\right)$

$x + i^2]x^2 + i^3]x^3 \dots$) wo a.b.c die wenigen Factoren sind

$\left(\begin{matrix} a.b.c \dots \\ 1.2.3 \dots \end{matrix}\right)$

Buzengeiger.

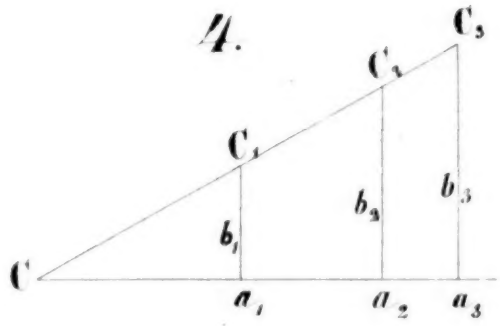
1.

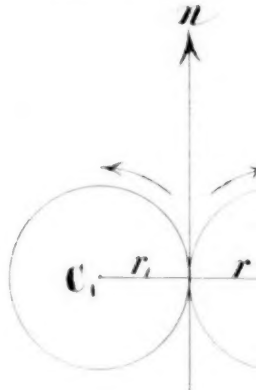

U
P
V
U₁
P₁
V₁
C
δ δ₁

2.

δ
C

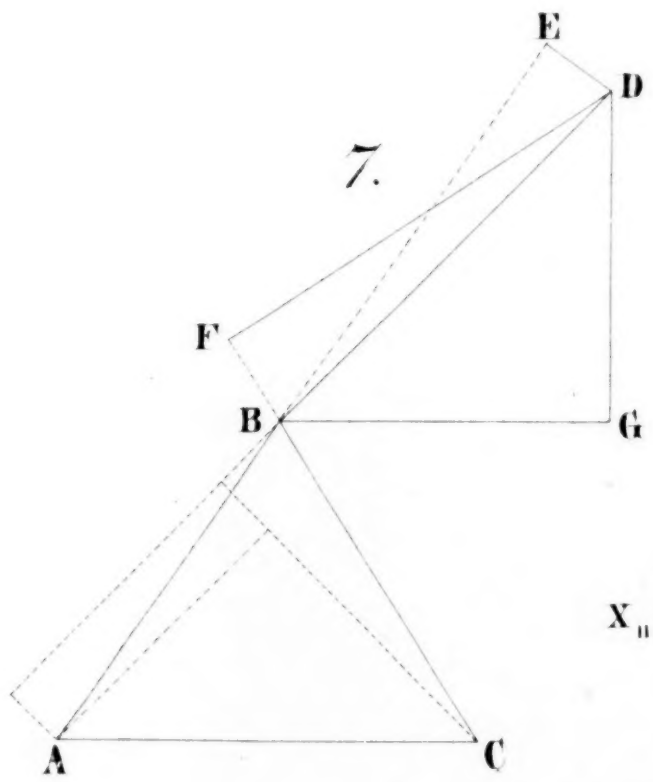
4.

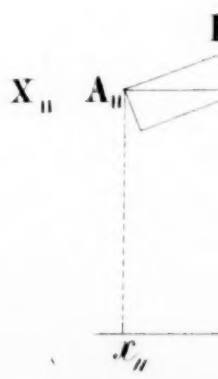

C₃
C₂
C₁
C
b₁
b₂
b₃
a₁
a₂
a₃

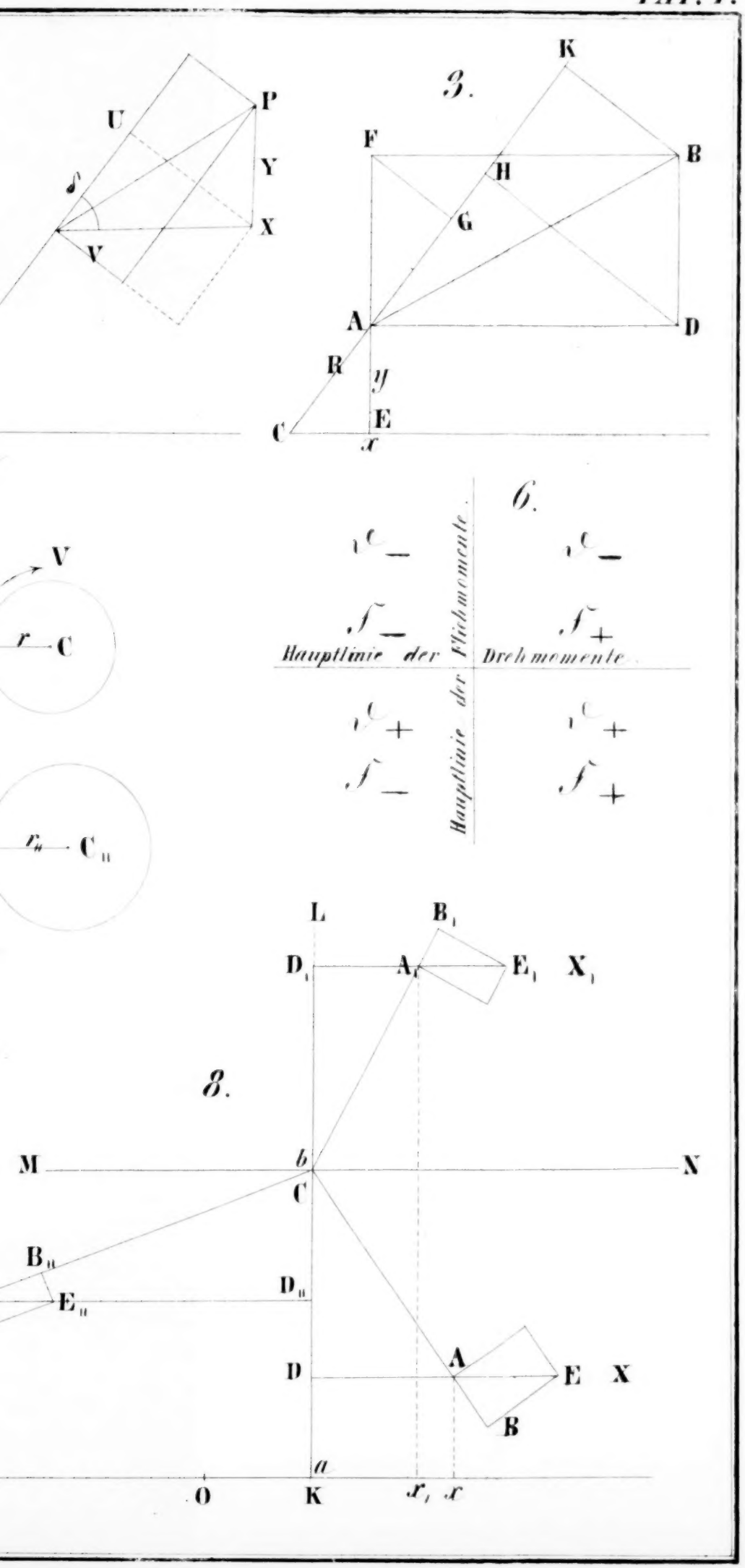

n
C₁
r₁
r
m

5.

7.


E
D
F
B
G
A
C


X_II
A_II
x_II


3.
K
F
B
H
G
A
D
R
y
E
C
x
U
P
Y
X
V
V
r
C
r_II
C_II
6.
Hauptlinie der Flichmomente
Hauptlinie der Drehmomente
8.
L
B_1
D_1
A_1
E_1
X_1
M
b
N
C
B_II
D_II
E_II
A
D
E
X
B
a
O
K
x_1
x